

# Chua 电路系统的分数阶推广及仿真

张 航<sup>1</sup>, 张 锐<sup>2</sup>

(1. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃兰州 730050;

2. 兰州城市学院 数学学院, 甘肃兰州 730070)

摘 要 蔡氏电路因其简单而著名,它是展示混沌和分歧现象的最重要的电路系统之一,在相关实践研究中有着广泛的应用.文章讨论蔡氏电路系统的分数阶推广,并对推广后的蔡氏电路进行仿真.结果表明,分数阶蔡氏电路系统已经具备了整数阶蔡氏电路系统的本质特征.可以通过研究推广后的分数阶蔡氏电路系统来进一步发现和揭示整数阶蔡氏电路系统的各种参数特征.

关键词 蔡氏电路;分数阶;仿真

中图分类号 TP301.6

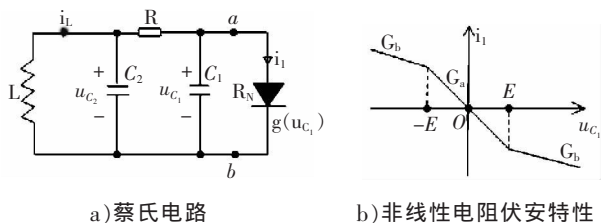
文献标志码 A

文章编号 1008-9020(2015)02-017-08

## 1. 引言

蔡氏电路(Chua's circuit)是 1983 年由美国电学专家蔡少棠(L. O. Chua)首次提出来的<sup>[1]</sup>.大量的数值试验、计算机模拟以及严格的数学分析都已经证明,在展示混沌和分歧现象的非线性系统中,蔡氏电路是最简单的电路.它在近三十年受到科学家们广泛的关注并取得了丰富的研究成果.蔡氏电路是混沌发展史上的一个重要里程碑,它的提出有力地证明了混沌现象不仅仅是人工的计算机舍入误差的结果(如 Lorenz 方程<sup>[2]</sup>),而且是可以物理实验观测到的广泛的非线性物理现象,同时也推动了混沌吸引子存在性的严格的数学证明<sup>[3]</sup>.

蔡氏电路的电路图如图 1 所示<sup>[1]</sup>:



a) 蔡氏电路

b) 非线性电阻伏安特性

图 1 蔡氏电路及其非线性电阻伏安特性

可以看出,蔡氏电路包含 5 个电子元件:一个电

感  $L > 0$ , 一个电阻  $R > 0$ , 两个电容  $C_1$  和  $C_2$ , 一个蔡氏二极管  $R_N$ . 利用电学原理,可以推出电路的状态方程为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} = \frac{1}{R} (u_{C_2} - u_{C_1}) - g(u_{C_1}) \\ C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{R} (u_{C_1} - u_{C_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -u_{C_2} \end{cases} \quad (1)$$

其中函数  $g(u_{C_1})$  是一个分段线性函数(见图 1 的右边),其形式如下:

$$g(u_{C_1}) = G_b u_{C_1} + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|u_{C_1} + E| - |u_{C_1} - E|)$$

通过变量替换,可以将(1)化成更为常见的无量纲的形式:

$$\begin{cases} x' = \alpha(y - \phi(x)) \\ y' = x - y + z, \\ z' = -\beta y \end{cases} \quad \text{其中 } \alpha, \beta \text{ 都是实参数,} \quad (2)$$

分片线性函数

$$\phi(x) = m_1 x + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) (|x + 1| - |x - 1|) \quad (3)$$

蔡氏电路的推广有多种形式,见文[4-6].文[7]利用 Grunwald-Letnikov 和 Riemann-Liouville 关于分

收稿日期 2014-12-09

作者简介 张航(1994—),男,甘肃兰州人,兰州理工大学在读硕士研究生.研究方向 电力系统分析.

数阶导数的定义对蔡氏电路做了一种分数阶推广:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{q_1} x(t) = \alpha(y(t) - x(t) - \phi(x)) \\ {}_0^C D_t^{q_2} y(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ {}_0^C D_t^{q_3} z(t) = -\beta y(t) - \gamma z(t) \end{cases} \quad (4)$$

显然,分数阶推广(4)是最一般的,它包含了文[4-6]中的几种推广形式.尽管蔡氏电路系统有多种分数阶的推广,但 Caputo 意义下的分数阶推广并不多见.文章关于基于 Caputo 意义下的分数阶导数定义对蔡氏电路进行推广,并利用 Matlab 软件对推广后的分数阶蔡氏电路进行仿真,以寻找分数阶蔡氏电路系统与整数阶电路系统的关联性,并探索吸引子的参数特征.

## 2. 分数阶蔡氏电路系统

定义 2.1<sup>[8,9]</sup>(分数阶 Caputo 导数)函数  $f(t)$  的  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) 阶 Caputo 导数定义如下:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad t > 0. \quad (5)$$

式(5)定义的 Caputo 分数阶导数是经典的整数阶导数的推广,因为

定理 2.1 假设函数  $f(x)$  二阶连续可导,则

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} {}_0^C D_t^\alpha f(t) = f'(t).$$

证明 利用分部积分公式,有

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds &= \int_0^t f''(s) d\left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \\ &= -\frac{(t-s)^{1-\alpha} f'(s)}{(1-\alpha)} \Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} f''(s) ds \\ &= \frac{t^{1-\alpha} f'(0)}{(1-\alpha)} + \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} f''(s) ds \end{aligned}$$

于是,利用公式  $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$  和  $\Gamma(1) = 1$ , 有

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} {}_0^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ t^{1-\alpha} f'(0) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} f''(s) ds \right] = f'(t) \end{aligned}$$

与 Riemann-Liouville 分数阶导数相比, Caputo 分数阶导数有它的优势: 对于初值条件, Caputo 分数阶导数与经典导数一致, 因此具有更为明确的物理解释, 这也是文章选择 Caputo 分数阶导数的理由之一.

在方程(4)中,用 Caputo 分数阶导数(5)替代 Riemann-Liouville 分数阶导数,得到下面的分数阶蔡氏电路系统的推广:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{q_1} x(t) = \alpha(y(t) - x(t) - \phi(x)) \\ {}_0^C D_t^{q_2} y(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ {}_0^C D_t^{q_3} z(t) = -\beta y(t) - \gamma z(t) \end{cases} \quad (6)$$

其中,非线性函数  $\phi(x)$  的不同选择会导致不同的推广.

根据定理 2.1, 当  $q_i \rightarrow 1^-$  ( $i=1, 2, 3$ ) 时, 方程(6)的极限状态就是整数阶蔡氏电路系统(2), 从而(6)是(2)的推广.

## 3. 分数阶蔡氏电路系统的离散化算法

为了进行仿真, 必须对 Caputo 分数阶导数进行离散. 假设要计算的时间区间为  $(0, T]$ , 将该区间  $m$  等分, 记  $h = T/m, t_i = ih, i=0, 1, 2, \dots, m$ . 在定义式(5)中, 将导数用差商替代, 得到

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha f(T) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \frac{f'(s)}{(T-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{f'(s)}{(T-s)^\alpha} ds \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{h} \frac{1}{(T-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^m \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{(T-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^m \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{h} \left( \frac{(T-t_{j-1})^{1-\alpha} - (T-t_j)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^m \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{h^\alpha} ((m-j+1)^{1-\alpha} - (m-j)^{1-\alpha}) \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{记 } c_{j,\alpha,h,m} = \frac{(m-j+1)^{1-\alpha} - (m-j)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)h^\alpha} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } L_m^\alpha f(T) &= c_{m,\alpha,h,m} f(T) + \sum_{j=1}^{m-1} (c_{j,\alpha,h,m} \\ &\quad - c_{j+1,\alpha,h,m}) f(t_j) - c_{1,\alpha,h,m} f(t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

就表示 Caputo 分数阶导数(5)对应的离散化算子. 令(8)式的参数  $\alpha \rightarrow 1^-$ , 可以得到下面的结论:

定理 3.1 关于系数  $c_{j,\alpha,h,m}$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) 有如下结论:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} c_{j,\alpha,h,m} = \begin{cases} 1/h, & j=m \\ 0 & j \neq m \end{cases}$$

利用定理 3.1 的结果并结合 (7) 式可以看出:  
(9) 中的离散化算子  $L_m^\alpha$  当参数  $\alpha \rightarrow 1$  时就对应于向前差商, 即

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} L_m^\alpha f(T) = \frac{f(T) - f(T-h)}{h}$$

注意: 当  $f(t) = at + b$  为一次多项式时, 公式(7)是精确的, 因此公式(9)表示的离散算子具有 1 阶代数精度.

为了更有效地设计算法, 需对离散算子(9)做进一步的分析. 记

$$d_{j,\alpha,m} = \begin{cases} 1, & j=m \\ \Gamma(2-\alpha)h^\alpha(c_{j,\alpha,h,m} - c_{j+1,\alpha,h,m}), & j=1, 2, \dots, m-1, \\ -\Gamma(2-\alpha)h^\alpha(c_{1,\alpha,h,m}), & j=0 \end{cases}$$

于是, 式(9)可化为

$$L_m^\alpha f(T) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^\alpha} \left[ f(T) + \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,\alpha,m} f(t_j) \right] \quad (10)$$

上式表明, 离散化的算子  $L_m^\alpha f(t)$  在  $t_m$  处的值由  $f(t)$  在  $t_j (j=0, 1, \dots, m)$  处的值按对应的权重  $d_{j,\alpha,m} (j=0, 1, \dots, m)$  贡献而来.

利用表达式(10)替代方程(6)中的分数阶导数, 得到分数阶蔡氏电路系统的离散格式如下: 对  $m=1, 2, \dots$ ,

$$\begin{cases} x(t_m) = \alpha \Gamma(2-q_1) h^{q_1} [y(t_m) - x(t_m) - \phi(x(t_m))] - \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,q_1,m} x(t_j) \\ y(t_m) = \Gamma(2-q_2) h^{q_2} [x(t_m) - y(t_m) - z(t_m)] - \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,q_2,m} y(t_j) \\ z(t_m) = \Gamma(2-q_3) h^{q_3} [-\beta y(t_m) - \gamma z(t_m)] - \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,q_3,m} z(t_j) \end{cases}$$

上式是隐式格式, 因为系统中包含非线性项, 需要求解非线性方程组, 这给计算带来了困难. 现修改上面格式如下:

$$\begin{cases} x(t_m) = \alpha \Gamma(2-q_1) h^{q_1} [y(t_m) - x(t_m) - \phi(x(t_{m-1}))] - \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,q_1,m} x(t_j) \\ y(t_m) = \Gamma(2-q_2) h^{q_2} [x(t_m) - y(t_m) - z(t_m)] - \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,q_2,m} y(t_j) \\ z(t_m) = \Gamma(2-q_3) h^{q_3} [-\beta y(t_m) - \gamma z(t_m)] - \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,q_3,m} z(t_j) \end{cases} \quad (11)$$

这是一个半隐格式, 即将线性部分使用隐格式, 非线性部分使用显格式. 利用记号

$$x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \text{ 得}$$

$$A^{(q_1, q_2, q_3)} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha \Gamma(2-q_1) h^{q_1} & -\alpha \Gamma(2-q_1) h^{q_1} & 0 \\ -\Gamma(2-q_2) h^{q_2} & 1 + \Gamma(2-q_2) h^{q_2} & -\Gamma(2-q_2) h^{q_2} \\ 0 & \beta \Gamma(2-q_3) h^{q_3} & 1 + \gamma \Gamma(2-q_3) h^{q_3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{(q_1)}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha \Gamma(2-q_1) h^{q_1} \phi(x(t)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_j = \begin{bmatrix} d_{j,q_1,m} & 0 & 0 \\ 0 & d_{j,q_2,m} & 0 \\ 0 & 0 & d_{j,q_3,m} \end{bmatrix}$$

格式(11)等价于下面的矩阵形式

$$A^{(q_1, q_2, q_3)} X(t_m) = \Phi^{(q_1)}(t_{m-1}) - \sum_{j=0}^{m-1} D_j X(t_j), m=1, 2, \dots \quad (12)$$

#### 4. 整数阶蔡氏电路系统

为了对照分析分数阶蔡氏电路系统, 下面对整数阶蔡氏电路系统做一简单讨论. 整数阶蔡氏电路系统的数学表示如下:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha(y(t) - x(t) - \phi(x)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t) + z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = -\beta y(t) - \gamma z(t) \end{cases} \quad (13)$$

其中非线性部分  $\phi$  是分片线性函数, 定义见(3)式. 方程组(13)可以使用 Matlab solver ode45 来求解. 为了方便对比, 类似于分数阶的情形, 对(13)离散如下:

$$\begin{cases} \frac{x(t_m) - x(t_{m-1})}{h} = \alpha(y(t_m) - x(t_m) - \phi(x_{m-1})) \\ \frac{y(t_m) - y(t_{m-1})}{h} = x(t_m) - y(t_m) - z(t_m), \quad m=1, 2, \dots \\ \frac{z(t_m) - z(t_{m-1})}{h} = -\beta y(t) - \gamma z(t_m) \end{cases} \quad (14)$$

利用记号  $A = \begin{bmatrix} 1 + \alpha h & -\alpha h & 0 \\ -h & 1 + h & -h \\ 0 & \beta h & 1 + \gamma h \end{bmatrix}$  和

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -\alpha h \phi(x(t)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

格式(14)可重写为下面的矩阵形式

$$AX(t_m) = \Phi(t_{m-1}) + X(t_{m-1}), \quad m=1, 2, \dots \quad (15)$$

事实上,当  $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$  时,格式(11)就化为了格式(14),类似的对于(12)和(15)也一样。

### 5. 仿真结果

所有程序代码都是在 Matlab7 以上版本完成的.关于 Matlab 代码的详细使用规则,见文[10].仿真的实施是根据公式(12)和(15)来编程并计算的,其中各参数的取值见表 1.

表 1 参数取值表

参数名称	取值
$(x(0), y(0), z(0))$	$(0.1, 0.1, 0.1)$
$(\alpha, \beta, \gamma)$	$(10, 14.87, 0)$
$(m_0, m_1)$	$(-1.27, -0.65)$

图 2、图 3 分别给出了分数阶蔡氏电路系统的相平面图和时域图.其中计算的时间范围为  $[0, 5]$ , 导数阶分别取  $(q_1, q_2, q_3) = (0.9, 0.99, 0.99)$ , 时间步长  $h = 5 \times 10^{-4}$ .从图上可以看出,分数阶蔡氏电路系统已经展现出了混沌现象。

图 4-图 6 分别给出了当  $(q_2, q_3) = (1, 1)$  固定,而  $q_1$  趋近于 1 时,即依次分别取  $(1 - 10^{-k})$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 时,解对应的曲线.作为对比,图中也给

出了整数阶蔡氏电路系统的解曲线.从图上可以看出,随着  $q_1$  趋近于 1,分数阶蔡氏电路系统的解曲线越来越趋近于整数阶蔡氏电路系统的解曲线.这说明可以用分数阶蔡氏电路系统来逼近整数阶蔡氏电路系统。

为了更进一步观察逼近情况,这里也计算了相应的误差.分别将分数阶和整数阶蔡氏电路系统的解记为

$$(x^{f(q_1, q_2, q_3)}(t), y^{f(q_1, q_2, q_3)}(t), z^{f(q_1, q_2, q_3)}(t)) \text{ 和 } (x^i(t), y^i(t), z^i(t)),$$

于是它们的误差为:

$$\|x^{f(q_1, q_2, q_3)} - x^i(t_m)\|, \|y^{f(q_1, q_2, q_3)} - y^i(t_m)\|, \|z^{f(q_1, q_2, q_3)} - z^i(t_m)\|$$

最大模误差为:

$$\max \|x^{f(q_1, q_2, q_3)} - x^i\|, \max \|y^{f(q_1, q_2, q_3)} - y^i\|, \max \|z^{f(q_1, q_2, q_3)} - z^i\|$$

图 7-图 9 分别绘出了分数阶与整数阶蔡氏电路系统的误差图.图中清晰地看到,随着  $q_1 \rightarrow 1^-$ ,误差显著改善。

图 10-图 19 分别给出了当导数的阶取  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, 0.999999, 0.9999999, 1$  这些数值时分数阶蔡氏电路系统的  $x-y-z$  相平面图、 $x-y$  相平面图、 $x-z$  相平面图、 $y-z$  相平面图以及  $t-xyz$  时域图.从图中可以看出,当阶靠近 1 时,分数阶蔡氏电路系统和整数阶蔡氏电路系统一样会表现出混沌现象.特别地,当导数阶大于  $q_1 = q_2 = q_3 > 0.99$  时,两个吸引盆的轨道清晰可见.这表明作为整数阶蔡氏电路系统的推广,分数阶蔡氏电路系统已经具有了整数阶蔡氏电路系统的本质特性。

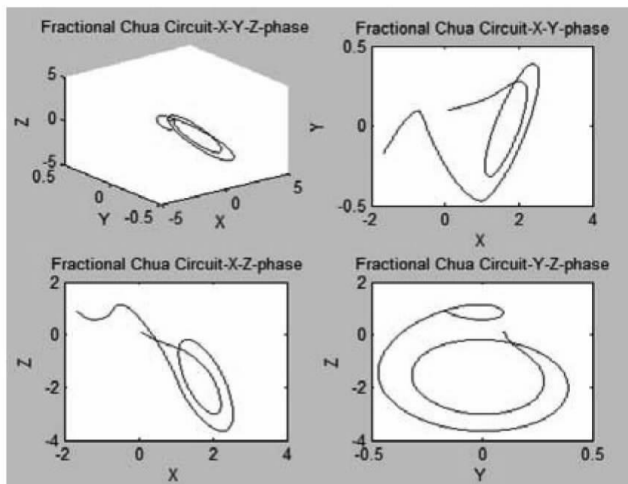


图 2 时间  $[0, 5]$  上的分数阶 Chua 电路系统相平面图  $(0.9, 0.99, 0.99)$

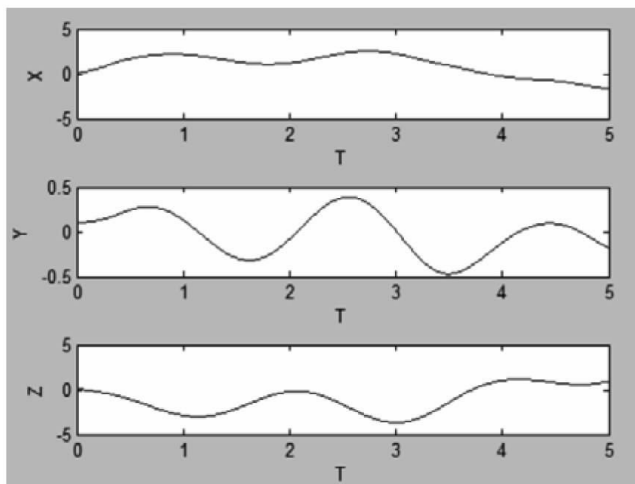


图 3 时间  $[0, 5]$  上的分数阶 Chua 电路系统时域图  $(0.9, 0.99, 0.99)$

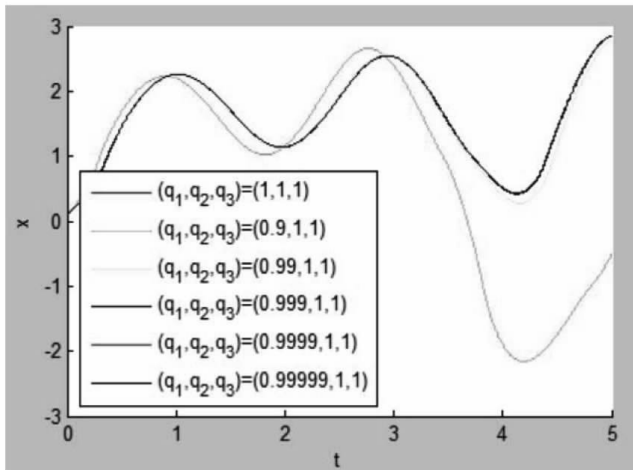


图 4 时间[0,5]上的分数阶 Chua 电路系统  
时域 t-x 随  $q_1$  趋近于 1 时的逼近

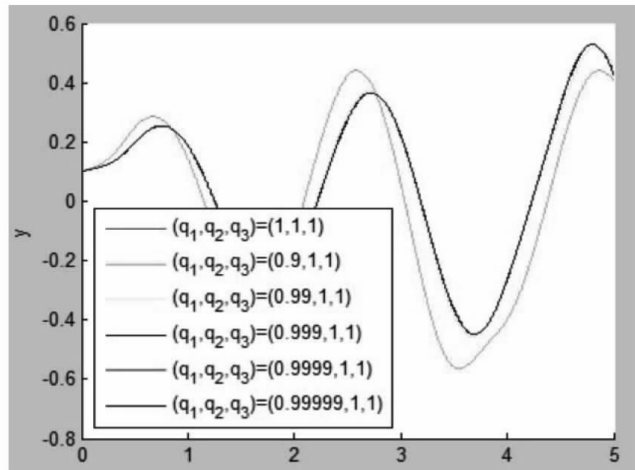


图 5 时间[0,5]上的分数阶 Chua 电路系统  
时域 t-y 随  $q_1$  趋近于 1 时的逼近

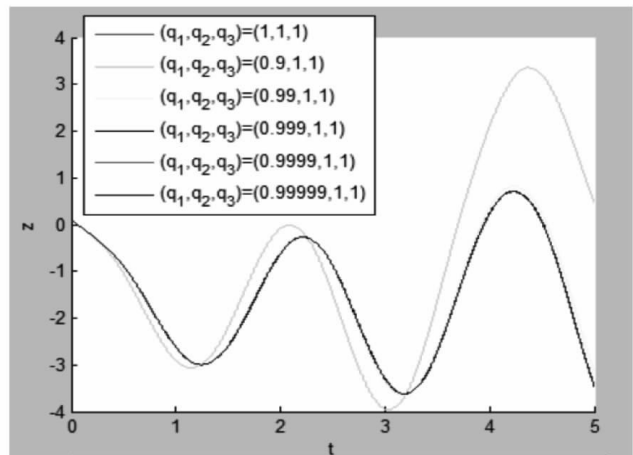


图 6 时间[0,5]上的分数阶 Chua 电路系统  
时域 t-z 随  $q_1$  趋近于 1 时的逼近

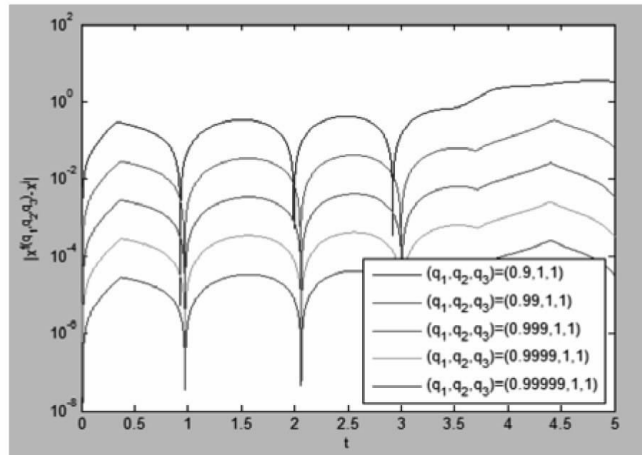


图 7 时间[0,5]上整数阶与分数阶  
蔡氏电路关于 x 的误差图

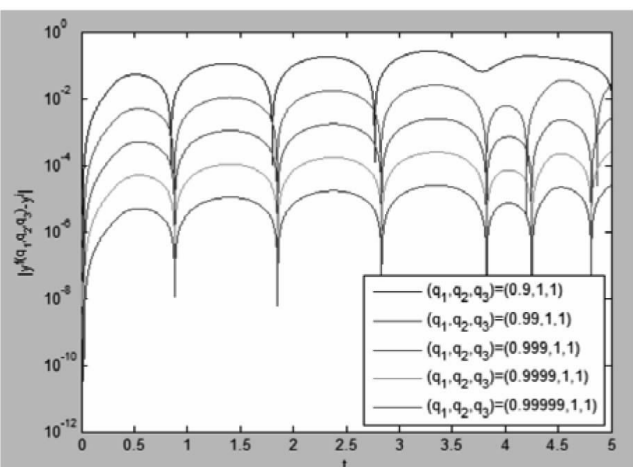


图 8 时间[0,5]上整数阶与分数阶  
蔡氏电路关于 y 的误差图

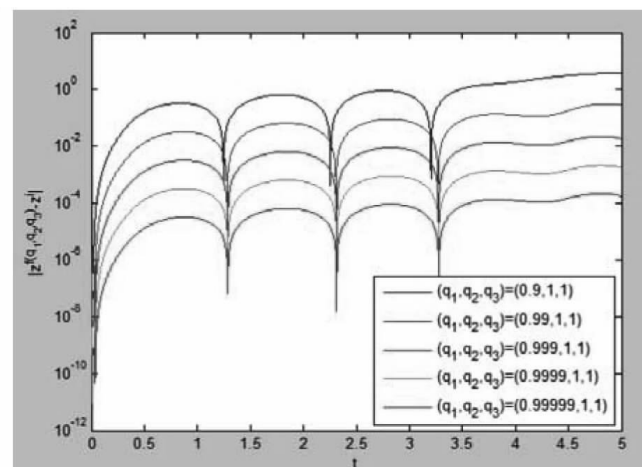


图 9 时间[0,5]上整数阶与分数阶  
蔡氏电路关于 z 的误差图

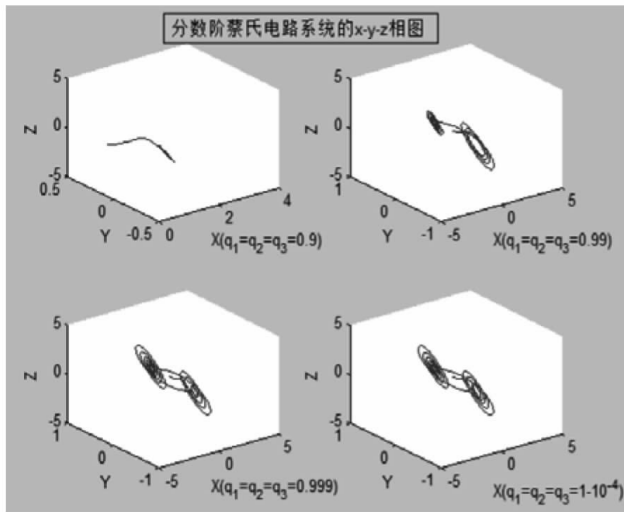


图 10 分数阶蔡氏电路系统的 x-y-z 相图 (阶从 0.9~0.9999)

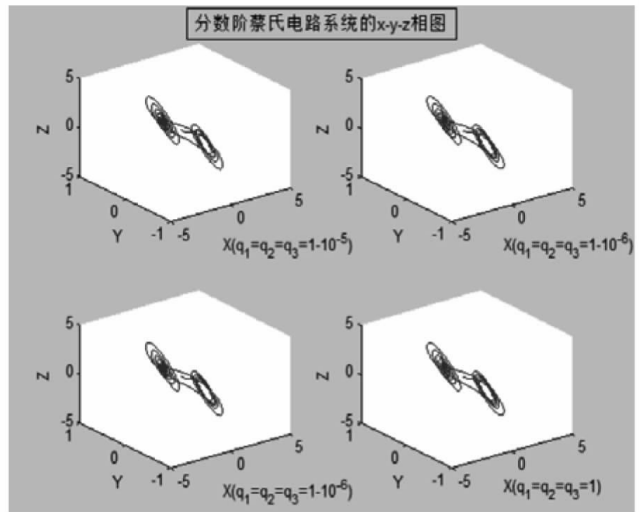


图 11 分数阶蔡氏电路系统的 x-y-z 相图 (阶从 0.99999~0.9999999,1)

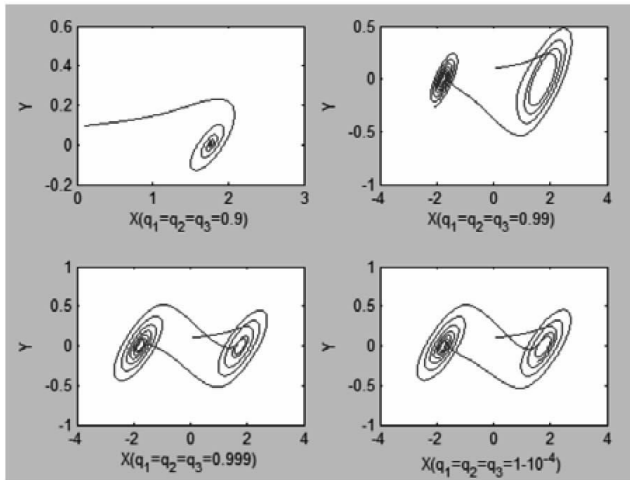


图 12 分数阶蔡氏电路系统的 x-y 相图 (阶从 0.9~0.9999)

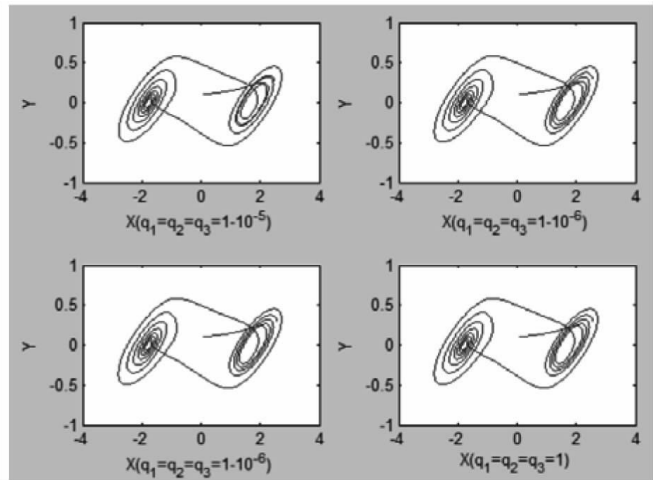


图 13 分数阶蔡氏电路系统的 x-y 相图 (阶从 0.99999~0.9999999,1)

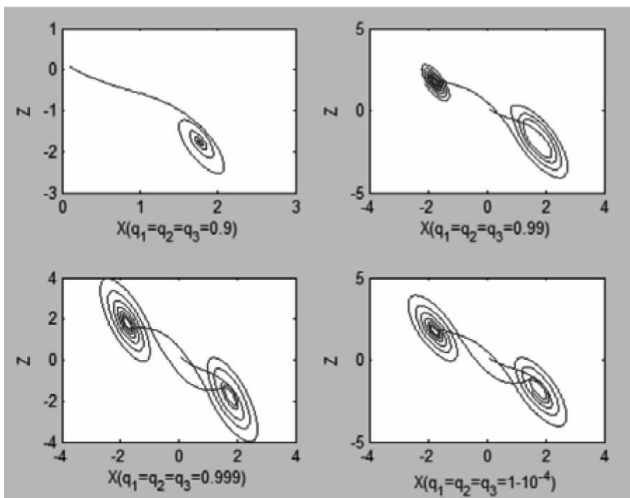


图 14 数阶蔡氏电路系统的 x-z 相图 (阶从 0.9~0.9999)

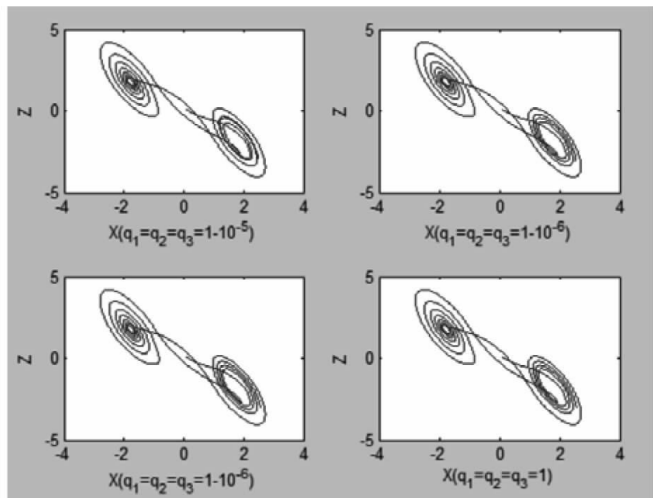


图 15 分数阶蔡氏电路系统的 x-z 相图 (阶从 0.99999~0.9999999,1)

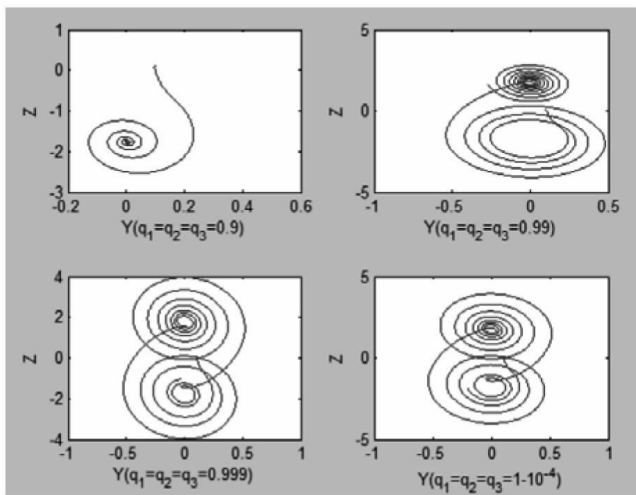


图 16 分数阶蔡氏电路系统的 y-z 相图 (阶从 0.9~0.9999)

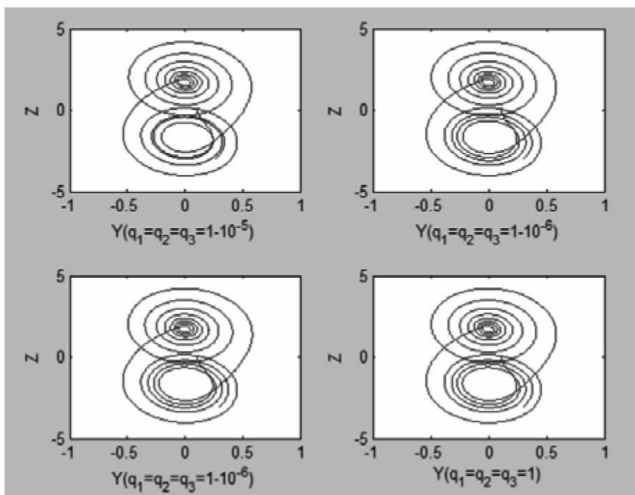


图 17 分数阶蔡氏电路系统的 y-z 相图 (阶从 0.99999~0.9999999,1)

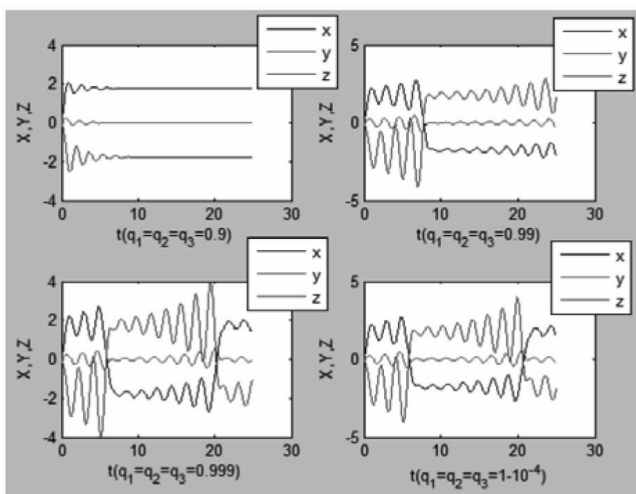


图 18 分数阶蔡氏电路系统的 t-x-y-z 时域图 (阶从 0.9~0.9999)

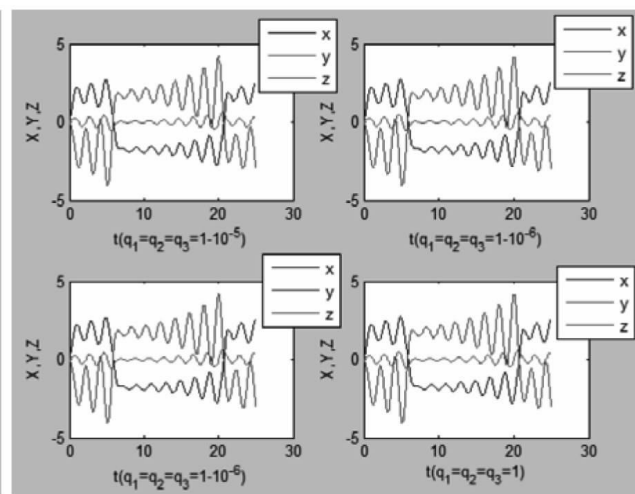


图 19 分数阶蔡氏电路系统的 t-x-y-z 时域图 (阶从 0.99999~0.9999999,1)

### 6. 总结

(1) 基于 Caputo 意义下的分数阶导数的定义, 文章对整数阶蔡氏电路系统进行了分数阶推广(见(6)式).

(2) 对推广后的分数阶蔡氏电路系统进行了离散化处理(见(12)式和(15)式).

(3) 对推广后的系统进行了大量的仿真(见图 2-图 19).

(4) 从仿真结果看出:推广后的分数阶蔡氏电路系统能够逼近整数阶蔡氏电路系统,在某些参数值下,分数阶系统已经表现出了整数阶系统的相应的本质特性,这为进一步研究整数阶系统提供了一种

新的思路.

对于数值试验而言,分数阶蔡氏电路系统的离散较整数阶问题复杂,这导致计算复杂性迅速提高,这种情况的出现实际上是由于分数阶导数是非局部算子造成的.因此为了方便轻松地利用分数阶蔡氏电路系统来研究整数阶的情形,就必须设计更为有效的数值算法,提高计算效率.

由于分数阶导数本身的复杂性,对于分数阶蔡氏电路系统还有很多东西有待进一步探索.

### 参考文献:

[1] 罗页,乐永康.蔡氏非线性电路的深入研究—参数测量和实验现象观察的新方法 [J]. 大学物理, 2010, (6): 53~57.

[2]Lorenz, E. Deterministic flow[J].Journal of Atmospheric Science, 20(1999):130-141.

[3]Hirsch, M. W., Smale, S. and Devaney, R. L. Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos[M].Second Edition, Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2003.

[4]叶昕,张茂青,周纯.蔡氏电路的仿真研究[J].电工电气,4(2009):48~51.

[5]Khibnik, A.I. Roose, D. and Chua, L. O. On periodic orbits and homoclinic bifurcations in Chua's circuit with a smooth nonlinearity [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos,3(2003):363~384.

[6]Chua, L. O. Global Unfolding of Chua's Cir-

cuit [J].IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications, Computer Science,E76 -A (2004):704~734.

[7]Petras. I. A note on the fractional-order Chua's system [J]. Chaos, Solitons and Fractals. 38 (2008): 140~147.

[8]Podlubny, I. Fractional Differential Equations [M]. Academic Press, San Diego, 1999.

[9]K. Diethelm. The Analysis of Fractional Differential Equations[M].Springer, Heidelberg, 2010.

[10]王正林,刘明.精通 MATLAB 7[M].北京:电子工业出版社,2007.

## On the Generalization and Simulation of Fractional-order Chua's Circuit

ZHANG Hang<sup>1</sup> ZHANG Rui<sup>2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology ,Lanzhou Gansu 730070

2. School of Mathematical,Lanzhou City University ,Lanzhou Gansu 730070)

**Abstract** As one of the most important circuit systems which show chaotic and bifurcation phenomenon, Chua's circuit is famous for its simplicity and widely applied in related researches. In this article, the generalization of fractional-order Chua's circuit is discussed and the numerical simulation to the Chua's circuit after generation is done. The result shows, fractional-order Chua's circuit has already had the essential characteristic of integral-order Chua's circuit and the various parameter characteristics of integral-order Chua's circuit can be further discovered through the study of fractional-order Chua's circuit after generalization.

**Key words** Chua's circuit fractional-order numerical simulation

责任编辑 郭有婧