生 物 数 学 学 报 2015, 30(1): 168–180

Journal of Biomathematics

脉冲收获和投放下食物链模型的动力学分析

郭中凯[1] 李建生[1] 王文婷[2] 张希娜[1]

(1 兰州理工大学 技术工程学院 理学部，甘肃 兰州 730050；

2 西北民族大学 数学与计算机科学学院，甘肃 兰州 730030)

摘 要： 研究了一类具有脉冲收获和放养的食物链模型，该模型具有有界性，并通过脉冲微分方程的比较原则和 Floquet 乘子理论给出食饵，顶级捕食者灭绝的周期解的全局渐近稳定性以及持续生存的充分条件．此外，通过数值模拟验证主要结论．

关键词： 全局渐近稳定；持续生存；食物链系统；脉冲方程

中图分类号： O175.13 **MR 分类号：** 34D20; 92D30 **文献标识码：** A

文章编号： 1001-9626(2015)01-0168-13

0 引 言

脉冲微分方程能够描述某些运动状态在某一时间点的快速变化，如渔业养殖中的投放、收获，某些动物的季节性生产，癌细胞的化疗，传染病的免疫接种等都是一种脉冲现象，对生物种群的保护和开发利用往往也采取脉冲控制．因此通过脉冲微分方程研究这些现象比普通的微分方程更客观，更能真实反映自然界的发展过程．

近些年，通过脉冲微分方程研究种群动力学，已经引起越来越多的学者的兴趣．他们在这方面做了许多工作[2–5,11]，得到了很多好的结论．在文 [1] 中将脉冲微分系统引入到食物链系统中，研究综合害虫防治问题． 1965 年 *Holling* 在实验的基础上，对不同类型的物种提出三种功能反应函数，在此后又发展了一些其他的功能反应函数，如 *Holling IV* 功能反应函数、*Ivlev* 功能反应函数．

本文假设对食物链系统中不同物种之间的捕食行为分别选用 *Holling II* 和 *Holling IV*

功能反应函数，并且定期投放捕食者，以及对食饵和捕食者进行定期收获，而不收获食物链中的顶级捕食者．建立如下模型：

收稿日期： 2013-08-10

基金项目： 国家自然科学基金数学天元基金项目 (No. 11226257) 资助

作者简介： 郭中凯 (1984–)，男，安徽巢湖人，硕士． E-mail:guozhongkai2007@sohu.com

$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
&x'(t)=x(t)(a-bx(t))-\frac{c_1x(t)y(t)}{1+e_1x(t)^2},\\
&y'(t)=-d_1y(t)+\frac{c_2x(t)y(t)}{1+e_1x(t)^2}-\frac{c_3y(t)z(t)}{1+e_2y(t)},\\
&z'(t)=-d_2z(t)+\frac{c_4y(t)z(t)}{1+e_2y(t)},
\end{aligned}\right\} & t\neq(n+\tau-1)T,\qquad t\neq nT,\\
\left.\begin{aligned}
&x(t^+)=(1-P_1)x(t),y(t^+)=(1-p_2)y(t),\\
&z(t^+)=z(t),
\end{aligned}\right\} & t=(n+\tau-1)T,\\
\left.\begin{aligned}
&x(t^+)=x(t),z(t^+)=z(t),\\
&y(t^+)=y(t)+q,
\end{aligned}\right\} & t=nT,\\
(x(0^+),y(0^+),z(0^+))=(x_0,y_0,z_0).
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $x(t),y(t),z(t)$ 分别表示 t 时刻食饵，捕食者，顶级捕食者的数量，所有系数都为正常数，a 表示内禀增长率，b 为密度制约系数，$\dfrac{c_1x(t)y(t)}{1+e_1x(t)^2}$ 为 $Holling\,IV$ 功能反应函数，$\dfrac{c_3y(t)z(t)}{1+e_2y(t)}$ 为 $Holling\,II$ 功能反应函数，d_1,d_2 分别表示捕食者，顶级捕食者的死亡率，R,p_2 分别表示收获食饵，捕食者的比例，q 为捕食者的投放量.

下面分别研究系统 (1) 中食饵、顶级捕食者灭绝的周期解的全局稳定性和持续生存. 为此先出一些结论.

1　预备知识

令 $R_+=(0,+\infty),R_+^3=\{\mathbf{x}=(x,y,z)\in R^3,x,y,z>0\}$, 函数 $f=(f_1,f_2,f_3)$ 是系统 (1) 右边定义的映射. 设 $V:R_+\times R_+^3\to R_+$, 如果满足下列条件: (1)　V 在区间 $((n-1)T,(n+\tau-1)T]\times R_+^3$ 和 $((n+\tau-1)T,nT]\times R_+^3$ 上是连续的，且当 $t_0=(n+\tau-1)T,nT$ 时刻，有 $\lim\limits_{(t,\mathbf{y})\to(t_0^+,\mathbf{x})}V(t,\mathbf{y})=V(t_0^+,\mathbf{x})$; (2)　V 对任意 $\mathbf{x}$ 满足局部 $Lipschitzian$ 条件，则称 V 属于 V_0 类.

定义 1.1　如果 $V\in V_0$, 当 $(t,\mathbf{x})\in((n-1)T,(n+\tau-1)T]\times R_+^3\cup((n+\tau-1)T,nT]\times R_+^3$ 时，关于系统 (1) 的右上导数定义为

$$D^+V(t,\mathbf{x})=\lim_{h\to0^+}\sup\frac{1}{h}[V(t+h,\mathbf{x}+hf(t,\mathbf{x}))-V(t,\mathbf{x})].$$

定义 1.2　设 $(x(t),y(t),z(t))$ 是系统 (1) 的解，$x_0,y_0,z_0>0$. 如果存在两个正数 $m,M(m\leq M)$, 若

$$m\leq\lim_{t\to\infty}\inf\{x(t),y(t),z(t)\}\leq\lim_{t\to\infty}\sup\{x(t),y(t),z(t)\}\leq M,$$

则称系统 (1) 持续生存.

引理 1.3(比较定理)　如果 $V\in V_0$, 且

$$
\begin{cases}
D^+V(t,\mathbf{x})\leq g(t,V(t,\mathbf{x})), & t\neq(n+\tau-1)T,t\neq nT,\\
V(t,\mathbf{x}(t^+))\leq\phi_n(V(t,\mathbf{x})), & t=(n+\tau-1)T,\\
V(t,\mathbf{x}(t^+))\leq\psi_n(V(t,\mathbf{x})), & t=nT.
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中 $g: R_+ \times R_+ \to R$ 在 $(t,\mathbf{x}) \in ((n-1)T,(n+\tau-1)T] \times R_+^3 \cup ((n+\tau-1)T,nT] \times R_+^3$ 是连续的，且当 $t_0=(n+\tau-1)T^+, nT^+$ 时，有 $\lim\limits_{(t,\mathbf{y})\to(t_0^+,\mathbf{x})} g(t,\mathbf{y}) = g(t_0^+,\mathbf{x}), \phi_n$ 和 ψ_n 是关于 $n \in Z^+$. 单调递增函数.

如果 $r(t)$ 是下列脉冲微分方程的最大解

$$\begin{cases} u'(t)=g(t,V(t,\mathbf{x})), & t\neq(n+\tau-1)T, \quad t\neq nT, \\ u(t^+)=\phi_n(V(t,\mathbf{x})), & t=(n+\tau-1)T, \\ u(t^+)=\psi_n(V(t,\mathbf{x})), & t=nT. \end{cases} \tag{3}$$

则当 $V(0^+,\mathbf{x}_0)\leq u_0$ 时， $V(t,\mathbf{x}(t))\leq r(t), t>0$.

引理 1.4 下列系统的周期解 $y^*(t)$ 和一般解 $y(t)$ 满足当 $t\to\infty$ 时， $|y(t)-y^*(t)|\to 0$.

$$\begin{cases} y'(t)=-dy(t), & t\neq(n+\tau-1)T, \quad t\neq nT, \\ y(t^+)=(1-p)y(t), & t=(n+\tau-1)T, \\ y(t^+)=y(t)+q, & t=nT, \\ y(0^+)=y_0. \end{cases} \tag{4}$$

证 根据不动点理论和频闪映射解 (4) 得周期解为

$$y^*(t)=\begin{cases} \dfrac{qe^{-d(t-(n-1)T)}}{1-(1-p)e^{-dT}}, & t\in((n-1)T,(n+\tau-1)T], \\ \dfrac{q(1-p)e^{-d(t-(n-1)T)}}{1-(1-p)e^{-dT}}, & t\in((n+\tau-1)T,nT]. \end{cases}$$

通过解 (4) 得一般解为

$$y(t)=\begin{cases} (1-p)^{n-1}\left(y_0-\dfrac{q}{1-(1-p)e^{-dT}}\right)e^{-dt}+y^*(t), & t\in((n-1)T,(n+\tau-1)T], \\ (1-p)^{n}\left(y_0-\dfrac{q}{1-(1-p)e^{-dT}}\right)e^{-dt}+y^*(t), & t\in((n+\tau-1)T,nT]. \end{cases}$$

则引理 1.4 的结论显然成立.

引理 1.5 设 $(x(t),y(t),z(t))$ 是系统 (1) 的解，若 $x_0>0,y_0>0,z_0>0$, 则当 $t>0$ 时 $x(t)>0,y(t)>0,z(t)>0$.

引理 1.6[3] 对下列系统

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)(a-\mathrm{b}x(t)), & t\neq(n+\tau-1)T, \\ x(t^+)=(1-p)x(t), & t=(n+\tau-1)T, \\ x(0^+)=x_0. \end{cases} \tag{5}$$

$x(t)$ 为 (5) 的一般解，若 $aT+\ln(1-p)<0$, 则 $x(t)\to 0,(t\to\infty)$.

对下列系统

$$\begin{cases} x'(t)=A(t)x(t), & t\neq\tau_k, \\ x(t^+)=x(t)+B_kx(t), & t=\tau_k. \end{cases} \tag{6}$$

若满足下列三个条件：

(1) $A(\cdot)$ 在 $(R, C^{n\times n})$ 是分段左连续的矩阵函数，且 $A(t)=A(t+T), t\in R$. 其中 $C^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 的矩阵；

(2)

$$B_k\in C^{n\times n}, \det(E+B_k)\neq 0, \tau_k<\tau_{k+1};$$

(3) 存在一个非负整数 q, 使得 $B_{k+q}=B_k, \tau_{k+q}=\tau_k+T$. 那么的 (6) 基解矩阵 $\Phi(t)$ 满足

$$\Phi(t+T)=\Phi(t)M,$$

其中非奇异矩阵 M 的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 称为 *Floquet* 乘子.

引理 1.7(*Floquet* 乘子理论)　若上述三个条件满足，则系统 (6) 是

(1) 局部渐近稳定的，当 $|\mu_i|<1, i=1,2,\cdots,n$;

(2) 不稳定的，当存在特征值 $|\mu_j|>1$.

2　主要结论

2.1　有界性

定理 2.1.1　设 $\mathbf{x}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是系统 (1) 的解，则存在正常数 M，使得当 t 充分大时 $x(t)\leq M, y(t)\leq M$ 和 $z(t)\leq M$.

证　构造函数 $V(t,\mathbf{x}(t))=\dfrac{c_2}{c_1}x(t)+y(t)+\dfrac{c_3}{c_4}z(t)$,

$$D^+V(t)=-\frac{c_2b}{c_1}x^2(t)+\frac{c_2a}{c_1}x(t)-d_1y(t)-\frac{c_3d_2}{c_4}z(t),$$

取 $\beta_0=\min\{d_1,d_2\}$,

$$D^+V(t)+\beta_0V\leq-\frac{c_2b}{c_1}x^2(t)+\frac{c_2}{c_1}(a+\beta_0)x(t)\leq\frac{c_2(a+\beta_0)^2}{4bc_1}:=R_0,$$

$$\begin{cases} D^+V(t)\leq-\beta_0V+R_0, & t\neq(n+\tau-1)T, t\neq nT,\\ V(t^+)=V(t), & t=(n+\tau-1)T,\\ V(t^+)=V(t)+q, & t=nT. \end{cases}\tag{7}$$

由引理 1.3 得到

$$V(t)\leq V(0^+)e^{-\beta_0t}+\frac{R_0}{\beta_0}(1-e^{-\beta_0t})+\frac{q(e^{-\beta_0(t-nT)}-e^{-\beta_0t})}{1-e^{-\beta_0T}},\qquad t\in(nT,(n+1)T],$$

当 $t\to\infty$ 时 $V(t)\leq\dfrac{R_0}{\beta_0}+\dfrac{q}{1-e^{-\beta_0T}}$.

因为 $V(t,\mathbf{x}(t))=\dfrac{c_2}{c_1}x(t)+y(t)+\dfrac{c_3}{c_4}z(t)$ 中系数都是正数，所以当 t 充分大时，存在 $M>0$, 使得 $x(t)\leq M$， $y(t)\leq M$ 和 $z(t)\leq M$.

2.2　食饵和顶级捕食者灭绝的周期解的稳定性

定理 2.2.1　如果满足条件

$$aT+\ln(1-p_1)<c_1\Gamma$$

和

$$\frac{1}{d_1}\ln\left(\left(1+\frac{\mu(e^{d_1\tau T}-1)}{qe_2+\mu}\right)\cdot\left(1+\frac{\mu(e^{d_1T}-e^{d_1\tau T})}{qe_2(1-p_2)+\mu e^{d_1\tau T}}\right)\right)>\left(1-\frac{e_2d_2}{c_4}\right)T,$$

其中

$$\Gamma=\frac{q(1-(1-p_2)e^{-d_1T}-p_2e^{-d_1\tau T})}{d_1(1-(1-p_2)e^{-d_1T})},\qquad \mu=1-(1-p_2)e^{-d_1T},$$

则系统 (1) 的周期解 $(0,y^*(t),0)$ 是局部渐近稳定的.

证 由引理 1.4 知

$$y^*(t)=\begin{cases}\dfrac{qe^{-d_1(t-(n-1)T)}}{1-(1-p_2)e^{-d_1T}}, & t\in((n-1)T,(n+\tau-1)T],\\[2mm] \dfrac{q(1-p_2)e^{-d_1(t-(n-1)T)}}{1-(1-p_2)e^{-d_1T}}, & t\in((n+\tau-1)T,nT].\end{cases}$$

是下列系统

$$\begin{cases}y'(t)=-d_1y(t), & t\neq(n+\tau-1)T, \quad t\neq nT,\\ y(t^+)=(1-p_2)y(t), & t=(n+\tau-1)T,\\ y(t^+)=y(t)+q, & t=nT.\end{cases}\tag{8}$$

的周期解, 且对系统 (8) 任一一般解 $y(t)$, 都有 $y(t)\to y^*(t),(t\to\infty)$, 所以 $(0,y^*(t),0)$, 是系统 (8) 的周期解.

令 $u(t)=x(t),v(t)=y(t)-y^*(t),w(t)=z(t)$, 那么

$$\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\\w(t)\end{pmatrix}=\Phi(t)\begin{pmatrix}u(0)\\v(0)\\w(0)\end{pmatrix},$$

这里 $\Phi(t)$ 满足

$$\frac{d\Phi(t)}{d(t)}=\begin{pmatrix}a-c_1y^*(t) & 0 & 0\\ c_2y^*(t) & -d_1 & \dfrac{c_3y^*(t)}{1+e_2y^*(t)}\\ 0 & 0 & -d_2+\dfrac{c_4y^*(t)}{1+e_2y^*(t)}\end{pmatrix}\Phi(t),$$

且 $\Phi(0)=E,E$ 为单位矩阵. 因此基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^{\int_0^t(a-c_1y^*(t))dt} & 0 & 0\\ * & e^{-d_1t} & *\\ 0 & 0 & e^{\int_0^t(-d_2+\frac{c_4y^*(t)}{1+e_2y^*(t)})dt}\end{pmatrix},$$

在脉冲时刻 $t_1=(n+\tau-1)T$ 和 $t_2=nT$ 有

$$\begin{pmatrix} u(t_1^+)\\ v(t_1^+)\\ w(t_1^+)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p_1 & 0 & 0\\ 0 & 1-p_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(t_1)\\ v(t_1)\\ w(t_1)\end{pmatrix},$$

和

$$\begin{pmatrix} u(t_2^+)\\ v(t_2^+)\\ w(t_2^+)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(t_2)\\ v(t_2)\\ w(t_2)\end{pmatrix}.$$

非奇异矩阵

$$M=\begin{pmatrix}1-p_1 & 0 & 0\\ 0 & 1-p_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Phi(T),$$

的特征值为

$$\mu_1=(1-p_1)e^{\int_0^t(a-c_1y^*(t))dt},\qquad \mu_2=(1-p_2)e^{-d_1t},\qquad \mu_3=e^{\int_0^t(-d_2+\frac{c_4y^*(t)}{1+e_2y^*(t)})dt},$$

因为

$$\int_0^T y^*(t)dt=\frac{q(1-(1-p_2)e^{-d_1T}-p_2e^{-d_1\tau T})}{d_1(1-(1-p_2)e^{-d_1T})},$$

由定理的条件知 $(1-p_1)e^{\int_0^T(a-c_1y^*(t))dt}<1$,

$$\int_0^T\left(-d_2+\frac{c_4y^*(t)}{1+e_2y^*(t)}\right)dt=$$
$$-\left(d_2-\frac{c_4}{e_2}\right)T-\frac{c_4}{e_2d_1}\ln\left(\left(1+\frac{\mu(e^{d_1\tau T}-1)}{qe_2+\mu}\right)\cdot\left(1+\frac{\mu(e^{d_1T}-e^{d_1\tau T})}{qe_2(1-p_2)+\mu e^{d_1\tau T}}\right)\right)<0,$$

则 $|\mu_1|<1,|\mu_2|<1,|\mu_2|<1$, 根据引理 1.7 知 $(0,y^*(t),0)$, 是局部渐近稳定的.

定理 2.2.2　如果满足条件

$$aT+\ln(1-p_1)¡0,$$

和

$$\frac{1}{d_1}\ln\left(\left(1+\frac{\mu(e^{d_1\tau T}-1)}{qe_2+\mu}\right)\cdot\left(1+\frac{\mu(e^{d_1T}-e^{d_1\tau T})}{qe_2(1-p_2)+\mu e^{d_1\tau T}}\right)\right)>\left(1-\frac{e_2d_2}{c_4}\right)T,$$

其中 $\mu=1-(1-p_2)e^{-d_1T}$, 则系统 (1) 的周期解 $(0,y^*(t),0)$, 是全局稳定的.

证　由引理 1.6 知当 $aT+\ln(1-p_1)<0$ 时

$$\begin{cases} u'(t)=u(t)(a-bu(t)), & t\neq(n+\tau-1)T,\\ u(t^+)=(1-p_1)u(t), & t=(n+\tau-1)T,\\ u(0^+)=x_0.\end{cases}\tag{9}$$

的一般解 $u(t)\to 0,(t\to\infty)$.

根据系统 (1) 知

$$\begin{cases} x'(t)\le x(t)(a-bx(t)), & t\ne(n+\tau-1)T,\\ x(t^+)=(1-p_1)x(t), & t=(n+\tau-1)T,\\ x(0^+)=x_0. \end{cases} \tag{10}$$

由引理 1.3 知 $x(t)\le u(t)$, 所以 $x(t)\to 0(t\to\infty)$.

对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$, 存在 $T_1>0$, 当 $t>T_1$ 时，有 $x(t)<\varepsilon_1$. 由系统 (1) 的第二个方程知在 $t\ne(n+\tau-1)T, t\ne nT$, 时

$$y'(t)=-d_1y(t)+\frac{c_2x(t)y(t)}{1+e_1x(t)^2}-\frac{c_3y(t)z(t)}{1+e_2y(t)}\le(-d_1+c_2\varepsilon_1)y(t).$$

由引理 1.4 知

$$\tilde{y}^*(t)=\begin{cases}\dfrac{qe^{-(d_1-c_2\varepsilon_1)(t-(n-1)T)}}{1-(1-p_2)e^{-(d_1-c_2\varepsilon_1)T}}, & t\in((n-1)T,(n+\tau-1)T],\\ \dfrac{q(1-p_2)e^{-(d_1-c_2\varepsilon_1)(t-(n-1)T)}}{1-(1-p_2)e^{-(d_1-c_2\varepsilon_1)T}}, & t\in((n+\tau-1)T,nT].\end{cases}$$

是下列系统的周期解

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t)=-(d_1-c_2\varepsilon_1)\tilde{y}(t), & t\ne(n+\tau-1)T, \quad t\ne nT,\\ \tilde{y}(t^+)=(1-p_2)\tilde{y}(t), & t=(n+\tau-1)T,\\ \tilde{y}(t^+)=\tilde{y}(t)+q, & t=nT,\\ \tilde{y}(T_1)=y(T_1). \end{cases} \tag{11}$$

令 $\tilde{y}(t)$ 为系统 (11) 的一般解，由引理 1.3，引理 1.4 知 $\tilde{y}(t)\to\tilde{y}^*(t),(t\to\infty),y(t)\le\tilde{y}(t)$. 对于任意给定的 $\varepsilon_2>0$, 存在 $T_2>0$, 当 $t>T_2$, 有 $y(t)<\tilde{y}^*(t)+\varepsilon_2$.

由 ε_1 的任意性可知，当 $t\to\infty,\tilde{y}^*(t)\to y^*(t)$, 因此对任意给定的 $\varepsilon>0$, 且满足

$$-\left(d_2-c_4\varepsilon-\frac{c_4}{e_2}\right)T-\frac{c_4}{e_2d_1}\ln\left(\left(1+\frac{\mu(1+e_2\varepsilon)(e^{d_1\tau T}-1)}{qe_2+\mu(1+e_2\varepsilon)}\right)\cdot\left(1+\frac{\mu(1+e_2\varepsilon)(e^{d_1T}-e^{d_1\tau T})}{qe_2(1-p_2)+\mu(1+e_2\varepsilon)e^{d_1\tau T}}\right)\right)<0,$$

则存在 $T_3>0$, 当 $t>T_3$, 有 $y(t)<y^*(t)+\varepsilon$.

当 $t>T_3$ 时，由系统 (1) 的第三个方程知在 $t\ne(n+\tau-1)T, t\ne nT$, 时

$$z'(t)=-d_2z(t)+\frac{c_4y(t)z(t)}{1+e_2y(t)}\le\left(-d_2+c_4\frac{(y^*(t)+\varepsilon)}{1+e_2(y^*(t)+\varepsilon)}\right)z(t)\le\left(-d_2+c_4\varepsilon+\frac{c_4y^*(t)}{1+e_2(y^*(t)+\varepsilon)}\right)z(t),$$

则

$$z(nT) \leq z((n-1)T)e^{\int_0^T (-d_2+c_4\varepsilon+\frac{c_4 y^*(t)}{1+e_2(y^*(t)+\varepsilon)})dt} = z((n-1)T)\varphi,$$

其中

$$\varphi = e^{-(d_2-c_4\varepsilon-\frac{c_4}{e_2})T-\frac{c_4}{e_2 d_1}\ln((1+\frac{\mu(1+e_2\varepsilon)(e^{d_1\tau T}-1)}{qe_2+\mu(1+e_2\varepsilon)})\cdot(1+\frac{\mu(1+e_2\varepsilon)(e^{d_1 T}-e^{d_1\tau T})}{qe_2(1-p_2)+\mu(1+e_2\varepsilon)e^{d_1\tau T}}))} < 1,$$

所以 $z(nT) \to 0, \mathrm{n} \to \infty$, 且

$$z(t) \leq z(nT)e^{\int_{nT}^t (-d_2+c_4(y^*(t)+\varepsilon))dt} \leq z(nT)e^{-d_2T+c_4(\frac{q}{\mu}+1)T}, t \in (nT, (n+1)T].$$

所以当 $t \to \infty, z(t) \to 0$.

对于任意给定的 $\varepsilon_3 > 0$, 存在 $T_4 > 0$, 当 $t > T_4$ 时，有 $z(t) < \varepsilon_3$. 由系统 (1) 的第二个方程知在 $t \neq (n+\tau-1)T, t \neq nT$, 时

$$y'(t) = -d_1y(t) + \frac{c_2x(t)y(t)}{1+e_1x(t)^2} - \frac{c_3y(t)z(t)}{1+e_2y(t)} \geq (-d_1 - c_3\varepsilon_3)y(t),$$

由引理 1.3 和引理 1.4 以及上述分析 $y(t) < y^*(t) + \varepsilon$ 方法知，对于上述给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T_5 > 0$, 当 $t > T_5$ 时，有 $y(t) > y^*(t) - \varepsilon$.

由 $t > T_3, y(t) < y^*(t) + \varepsilon$ 和 $t > T_5, y(t) > y^*(t) - \varepsilon$ 知 $t \to \infty, y(t) \to y^*(t)$. 所以系统 (1) 的周期解 $(0, y^*(t), 0)$, 是全局稳定的.

当 $a = 0.3$, $T = 1$, $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.5$, $d_1 = 0.2$, $\tau = 0.5$, $q = 0.2$, $d_2 = 0.1$, $e_2 = 0.5$, $c_4 = 0.1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.5$, $b = 0.2$, $e_1 = 0.4$ 时满足定理 2.2.2 的条件不等式通过 *Matlab* 数值模拟可得图 1

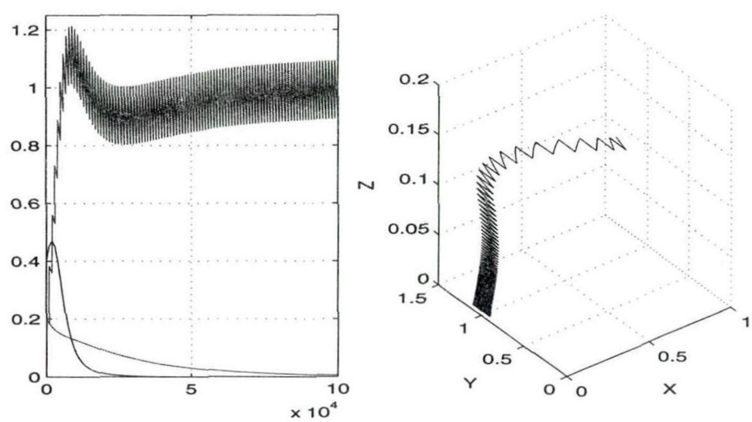

图 1　$x(t), y(t), z(t)$ 的时间序列图和相图

2.3　持续生存

分别令系统 (1) 中 $z(t) = 0, x(t) = 0$, 得系统 (1) 的两个子系统

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(a-bx(t)) - \frac{c_1x(t)y(t)}{1+e_1x(t)^2}, \\ y'(t) &= -d_1y(t) + \frac{c_2x(t)y(t)}{1+e_1x(t)^2}, \end{aligned}\right\} & t \neq (n+\tau-1)T, \quad t \neq nT, \\ \left.\begin{aligned} x(t^+) &= (1-q_1)x(t), \\ y(t^+) &= (1-q_2)y(t), \end{aligned}\right\} & t = (n+\tau-1)T, \\ \left.\begin{aligned} x(t^+) &= x(t), \\ y(t^+) &= y(t)+q, \end{aligned}\right\} & t = nT, \\ (x(0^+), y(0^+)) = (x_0, y_0). \end{cases} \tag{12}$$

和

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} y'(t) &= -d_1y(t) - \frac{c_3y(t)z(t)}{1+e_2y(t)}, \\ z'(t) &= -d_2z(t) + \frac{c_4y(t)z(t)}{1+e_2y(t)}, \end{aligned}\right\} & t \neq (n+\tau-1)T, \quad t \neq nT, \\ \left.\begin{aligned} z(t^+) &= z(t), \\ y(t^+) &= (1-q_2)y(t), \end{aligned}\right\} & t = (n+\tau-1)T, \\ \left.\begin{aligned} z(t^+) &= z(t), \\ y(t^+) &= y(t)+q, \end{aligned}\right\} & t = nT, \\ (y(0^+), z(0^+)) = (y_0, z_0), \end{cases} \tag{13}$$

定理 2.3.1[2] 如果满足条件 $aT + ln(1-p_1) > c_1\Gamma$, 则系统 (12) 是持续生存的.

定理 2.3.2 如果满足条件

$$\frac{1}{d_1}\ln\left(\left(1+\frac{\mu(e^{d_1\tau T}-1)}{qe_2+\mu}\right)\cdot\left(1+\frac{\mu(e^{d_1T}-e^{d_1\tau T})}{qe_2(1-p_2)+\mu e^{d_1\tau T}}\right)\right) < \left(1-\frac{e_2d_2}{c_4}\right)T,$$

其中 $\mu = 1-(1-p_2)e^{-d_1T}$, 则系统 (13) 是持续生存的.

证 由 2.1 知存在正常数 M, 使得当 t 充分大时 $x(t) \le M$, $y(t) \le M$ 和 $z(t) \le M$.

不妨设 $t > 0$ 时 $x(t) \le M$, $y(t) \le M$ 和 $z(t) \le M$. 所以 $y(t) \ge -(d_1+c_3M)y(t)$, 根据引理 1.3,1.4 知 $y(t) \ge u^*(t) - \varepsilon$, 其中

$$u^*(t) = \begin{cases} \dfrac{qe^{-(d_1+c_3M)(t-(n-1)T)}}{1-(1-p_2)e^{-(d_1+c_3M)T}}, & t \in ((n-1)T, (n+\tau-1)T], \\ \dfrac{q(1-p_2)e^{-(d_1+c_3M)(t-(n-1)T)}}{1-(1-p_2)e^{-(d_1+c_3M)T}}, & t \in ((n+\tau-1)T, nT]. \end{cases}$$

因此当 t 充分大时, $y(t) \ge \dfrac{q(1-p_2)e^{-(d_1+c_3M)T}}{1-(1-p_2)e^{-(d_1+c_3M)T}}$.

由定理 2.3.2 的条件可知能够选取一个很小的正常数 m_1 和 ε 使得

$$\frac{1}{(d_1+c_3m_1)}\ln\left(\left(1+\frac{\mu_1(1-e_2\varepsilon)(e^{(d_1+c_3m_1)\tau T}-1)}{qe_2+\mu_1(1-e_2\varepsilon)}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\left(1+\frac{\mu_1(1-e_2\varepsilon)(e^{(d_1+c_3m_1)T}-e^{(d_1+c_3m_1)\tau T})}{qe_2(1-p_2)+\mu_1(1-e_2\varepsilon)e^{(d_1+c_3m_1)\tau T}}\right)\right) < \left(1-\frac{e_2(d_2+c_4\varepsilon)}{c_4}\right)T,$$

成立，其中 $\mu_1 = 1-(1-p_2)e^{-(d_1+c_3m_1)T}$，假设存在 $t_1 > 0$，使得 $z(t) \geq m_1$，否则当 $t>0$ 时 $z(t) < m_1$. 那么考虑下列系统

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &v'(t) = -(d_1+c_3m_1)v(t), \\ &w'(t) = -d_2w(t) + \frac{c_4v(t)w(t)}{1+e_2v(t)}, \end{aligned}\right\} & t \neq (n+\tau-1)T, \quad t \neq nT, \\ \left.\begin{aligned} &w(t^+) = w(t), \\ &v(t^+) = (1-q_2)v(t), \end{aligned}\right\} & t = (n+\tau-1)T, \\ \left.\begin{aligned} &w(t^+) = w(t), \\ &v(t^+) = v(t)+q, \end{aligned}\right\} & t = nT, \\ (v(0^+), w(0^+)) = (y_0, z_0). \end{cases} \tag{14}$$

根据引理 1.3 知 $y(t) \geq v(t), z(t) \geq w(t)$，并且根据引理 1.4 知当 t 充分大时 $v(t) \geq v^*(t) - \varepsilon$，其中

$$v^*(t) = \begin{cases} \dfrac{qe^{-(d_1+c_3m_1)(t-(n-1)T)}}{1-(1-p_2)e^{-(d_1+c_3m_1)T}}, & t \in ((n-1)T, (n+\tau-1)T], \\ \dfrac{q(1-p_2)e^{-(d_1+c_3m_1)(t-(n-1)T)}}{1-(1-p_2)e^{-(d_1+c_3m_1)T}}, & t \in ((n+\tau-1)T, nT]. \end{cases}$$

因此 $w'(t) \geq \left(-d_2 + \dfrac{c_4(v^*(t)-\varepsilon)}{1+e_2(v^*(t)-\varepsilon)}\right) w(t)$,

$$w(nT) \geq w((n-1)T)e^{\int_0^T \left(-d_2 + \frac{c_4(v^*(t)-\varepsilon)}{1+e_2(v^*(t)-\varepsilon)}\right)dt} = w((n-1)T)\Delta,$$

由于定理的条件知

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(-d_2 + \frac{c_4(v^*(t)-\varepsilon)}{1+e_2(v^*(t)-\varepsilon)}\right) dt \geq & \left(-d_2 - c_4\varepsilon + \frac{c_4}{e_2}\right)T - \\ & \frac{c_4}{(d_1+c_3m_1)e_2} \ln\left(\left(1+\frac{\mu_1(1-e_2\varepsilon)(e^{(d_1+c_3m_1)\tau T}-1)}{qe_2+\mu_1(1-e_2\varepsilon)}\right)\right. \\ & \left.\left(1+\frac{\mu_1(1-e_2\varepsilon)(e^{(d_1+c_3m_1)T}-e^{(d_1+c_3m_1)\tau T})}{qe_2(1-p_2)+\mu_1(1-e_2\varepsilon)e^{(d_1+c_3m_1)\tau T}}\right)\right) > 0. \end{aligned}$$

即 $\Delta > 1$，所以 n 充分大时 $w(nT) \to \infty, z(nT) \to \infty$，与 $z(t)$ 有界矛盾. 因此存在 $t_1 > 0$ 使得 $z(t_1) \geq m_1$，这时只有两种情况，第一，当 $t > t_1$ 使得 $z(t) \geq m_1$，定理 2.3.2 成立；第二，$z(t)$ 关于 m_1 是振荡的. 对于第二种情况，令 $t^* = \inf\{t > t_1 | z(t) < m_1\}$，则 $t \in [t_1, t^*)$ 时，有 $z(t) \geq m_1$，由于 $z(t)$ 是连续函数，因此 $z(t^*) = m_1$，设 $t^* \in (n_1T, (n_1+1)T]$，选择 $n_2, n_3 \in Z^+$，使得 $(n_2-1)T > \dfrac{\ln(\frac{\varepsilon}{M+q})}{-d_1-c_3m_1}$，$e^{-d_1(n_2+2)T}\Delta^{n_3} > 1$，令 $T' = (n_2+n_3)T$ 可证明存在 $t_2 \in ((n_1+1)T, (n_1+1)T+T'], z(t_2) \geq m_1$，否则 $t \in ((n_1+1)T, (n_1+1)T+T']$，有 $z(t) < m_1$，

对于系统 (14), 根据引理 1.4 知，一般解为

$$v(t)=\begin{cases}(1-p_2)^{n-n_1-1}(v(n_1T^+)-\dfrac{q}{1-(1-p_2)e^{-(d_+c_3m_1)T}})e^{-(d_1+c_3m_1)(t-n_1T)}+v^*(t),\\ \qquad t\in((n-1)T,(n+\tau-1)T],\\ (1-p)^{n-n_1}(v(n_1T^+)-\dfrac{q}{1-(1-p)e^{-(d_1+c_3m_1)T}})e^{-(d_1+c_3m_1)(t-n_1T)}+v^*(t),\\ \qquad t\in((n+\tau-1)T,nT].\end{cases}$$

$|v(t)-v^*(t)|\le(M+q)e^{-(d_1+c_3m_1)(t-n_1T)}<\varepsilon$, 当 $t\in((n_1+n_2+1)T,(n_1+1)T+T']$, 即有 $y(t)\ge v(t)\ge v^*(t)-\varepsilon$, 因此在 $t\in((n_1+n_2+1)T,(n_1+1)T+T']$ 时，有

$$z'(t)\ge\left(-d_2+\frac{c_4(v^*(t)-\varepsilon)}{1+e_2(v^*(t)-\varepsilon)}\right)z(t),$$

$$z((n_1+1)T+T')\ge z((n_1+n_2+1)T)\Delta^{n_3}$$

因为 $z'(t)\ge-d_2z(t)$, $t\in(t^*,(n_1+n_2+1)T]$, $z((n_1+n_2+1)T)\ge m_1e^{-d_1(n_2+2)T}$,

因此

$$z((n_1+n_2+n_3+1)T)\ge z((n_1+n_2+1)T)\Delta^{n_3}\ge m_1e^{-d_1(n_2+2)T}\Delta^{n_3}>m_1,$$

与假设矛盾.

令 $\bar{t}=\inf\{t>t^*|z(t)\ge m_1\}$, 那么 $z(\bar{t})=m_1$ 且在 $t\in[t^*,\bar{t})$, 有 $z'(t)\ge-d_2z(t)$, 则 $z(t)\ge m_1e^{-d_2(n_2+n_1+2)T}:=m_2$,

上述过程可以重复, 所以当 t 充分大时 $z(t)\ge m_2$, 因此定理 2.3.2 成立.

定理 2.3.3 如果满足条件

$$aT+ln(1-p_1)>c_1\Gamma,$$

和

$$\ln\left(\left(1+\frac{\mu(e^{d_1\tau T}-1)}{qe_2+\mu}\right)\cdot\left(1+\frac{\mu(e^{d_1T}-e^{d_1\tau T})}{qe_2+\mu e^{d_1\tau T}}\right)\right)<\left(1-\frac{e_2d_2}{c_4}\right)d_1T,$$

其中 $\mu=1-(1-p_2)e^{-d_1T}$, 则系统 (1) 是持续生存的.

证 考虑下列两个系统

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}x_1'(t)=x_1(t)(a-bx_1(t))-\dfrac{c_1x_1(t)y_1(t)}{1+e_1x_1(t)^2},\\ y_1'(t)=-d_1y_1(t)+\dfrac{c_2x_1(t)y_1(t)}{1+e_1x_1(t)^2},\end{array}\right\} & t\ne(n+\tau-1)T,\quad t\ne nT,\\ \left.\begin{array}{l}x_1(t^+)=(1-q_1)x_1(t),\\ y_1(t^+)=(1-q_2)y_1(t),\end{array}\right\} & t=(n+\tau-1)T,\\ \left.\begin{array}{l}x_1(t^+)=x_1(t),\\ y_1(t^+)=y_1(t)+q,\end{array}\right\} & t=nT,\\ (x_1(0^+),y_1(0^+))=(x_0,y_0).\end{cases}\tag{15}$$

和

$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned} y_2'(t) &= -d_1 y_2(t) - \frac{c_3 y_2(t) z_2(t)}{1+e_2 y_2(t)}, \\ z_2'(t) &= -d_2 z_2(t) + \frac{c_4 y_2(t) z_2(t)}{1+e_2 y_2(t)}, \end{aligned}\right\} & t \neq (n+\tau-1)T, \quad t \neq nT, \\
\left.\begin{aligned} z_2(t^+) &= z_2(t), \\ y_2(t^+) &= (1-q_2) y_2(t), \end{aligned}\right\} & t = (n+\tau-1)T, \\
\left.\begin{aligned} z_2(t^+) &= z_2(t), \\ y_2(t^+) &= y_2(t) + q, \end{aligned}\right\} & t = nT, \\
(y_2(0^+), z_2(0^+)) = (y_0, z_0).
\end{cases} \tag{16}
$$

由引理 1.3 知 $y(t) \le y_1(t), x(t) \ge x_1(t), y(t) \ge y_2(t), z(t) \ge z_2(t)$, 根据定理 2.3.3 的条件知 (15), (16) 是持续生存的，所以系统 (1) 也是持续生存的.

当 $a = 0.6$, $T = 1$, $p_1 = 0.3$, $c_1 = 0.2$, $q = 0.3$, $p_2 = 0.15$, $d_1 = 0.3$, $\tau = 0.5$, $d_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$; $c_4 = 0.5$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.5$, $b = 0.2$, $e_1 = 0.4$ 时满足定理 2.3.3 的条件不等式通过 $Matlab$ 数值模拟可得图 2.

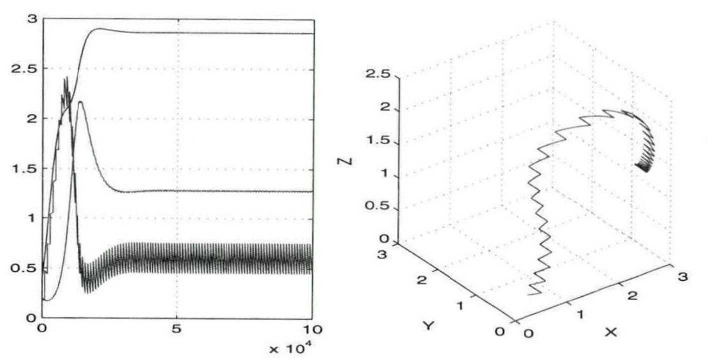

图 2　$x(t), y(t), z(t)$ 的时间序列图和相图

3 讨论

本文研究了具有不同功能反应和脉冲扰动的食物链系统，分别给出食饵，顶级捕食者灭绝的周期解和食物链续存的充分条件，在不同的生物背景下有着不同的应用. 如在综合害虫防治过程中 $x(t)$ 表示害虫， $y(t)$ 表示天敌， $z(t)$ 表示天敌的捕食者，系统 (1) 可以看成是在不同的时刻投放天敌和喷洒杀虫剂 (对害虫和天敌都有影响)，定理 2.2.2 给出了既保护天敌又使害虫灭绝的充分条件，又如在野生动物保护过程中常要考虑到经济效益， $x(t)$ 表示食饵 (草)， $y(t)$ 表示捕食者 (鹿群)， $z(t)$ 表示顶级捕食者 (老虎)，系统 (1) 可以看成是在保护野生动物过程中在不同的时刻投放鹿群 (幼崽) 和收获草和鹿群 (成年)，定理 2.3.3 给出了在有人类参与下的食物链持续生存的充分条件，从而既达到保护野生动物又产生一定经济效益.

参 考 文 献

[1] Beak H. A food chain system with Holling type IV functional response and impulsive perturbations[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **60**:1152–1163.

[2] Liu, Tan R. Impulsive harvesting and stocking in a Monod-Haldance functional response predator-prey system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, **34**:454–464.

[3] Beak H. Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2008, 18:Artcle ID752403.

[4] Beak H, Kim S D. Permanence and stability of an Ivlev-type predator-prey system with impulsive control strategies[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, **50**:1385–1393.

[5] 赵文才, 孟新柱. 一类具有 Logistic 死亡率的脉冲免疫接种 SIRS 传染病模型 [J]. 吉林大学学报, 2007, **47**(6):1165–1171.

[6] 傅希林, 闫宝强, 刘衍胜. 脉冲微分系统引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[7] Liu X, Chen L. Complex dynamics of Holling type II Lotka-Voterra predator-prey with impulsive perturbations on the predator[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, **16**:311–320.

[8] Liu B, Zhang Y, Chen L. The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning impulsive integrated pest management[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2005, **6**:227–243.

[9] Jin Z, Han M, Li G.The persistence in a Lotka-Volterra competition systems with impulsive[J]. *Chaos, Solitons and Fractal*, 2005, **24**:1105–1117.

[10]程荣福, 赵明. 一类捕食者与被捕食者模型的持久性和稳定性 [J]. 生物数学学报, 2008, **23**(2):289–294.

[11]朱玑, 李维德, 朱凌峰. 具有脉冲出生和脉冲接种的 SIR 传染病模型 [J]. 生物数学学报, 2011, **26**(3):490–496.

Dynamic Analysis of a Food Chain System with Impulsive Harvesting and Stocking

GUO Zhong-kai[1] LI Jian-sheng[1] WANG Wen-ting[2] ZHANG Xi-na[1]

(1 *Department of Science, College of Technology and Engineering.LUT, Gansu Lanzhou* 730050 *China*)

(2 *School of Mathematics and Computer Science, Northwest University for Nationalities, Gansu Lanzhou* 730030 *China*)

Abstract: A food chain system with impulsive harvesting and stocking is investigated in this paper which has characteristics of boundedness, some sufficient conditions ensuring global asymptotic stabilities of the prey and top predator-free periodic solution and the permanence existence are obtain via the comparable theory and Floquet theory of impulsive equation. Moreover, numerical simulations are performed to substantiate the main theoretical results.

Key words: Global asymptotic stability; Permanence existence; A food chain system; Impulsive equation