SHUILI XUEBAO

第46卷 第4期

文章编号 .0559-9350(2015)04-0497-08

# 不同叶顶间隙下斜流泵轮缘压力脉动特性的数值分析

黎义斌<sup>1,2</sup>,毕 祯<sup>1</sup>,李仁年<sup>1,2</sup>,胡鹏林<sup>1</sup>,周 栋<sup>3</sup>

(1. 兰州理工大学 能源与动力工程学院,甘肃 兰州 730050; 2. 甘肃省流体机械及系统重点实验室,甘肃 兰州 730050; 3. 湖南湘电长沙水泵有限公司,湖南 长沙 410205)

摘要:为了阐明斜流泵小流量工况下近叶顶间隙区域的压力脉动特性,揭示不同叶顶间隙 $R_{\rm rc}$ 对斜流泵瞬态运行稳定性的影响,对斜流泵模型进行非定常数值模拟。选取叶顶间隙 $R_{\rm rc}$ 分别为0、0.5、1和1.5 mm 的4种方案,基于 LES 大涡模拟、SIMPLEC 算法与结构化网格,通过压力脉动频谱分析,了解 $R_{\rm rc}$ 与近叶顶间隙区域压力脉动的内在关系。结果表明, $R_{\rm rc}$ 引起的泄漏流与主流掺混加剧了叶顶间隙区域流动的不稳定性,降低了叶片的做功能力;较大的 $R_{\rm rc}$ 可以有效减少叶顶间隙区域的高频压力脉动,但引起的泄漏流加剧;随着 $R_{\rm rc}$ 的增大,叶轮近壁区压力脉动平均值逐渐减小,水力性能下降。斜流泵设计时,选取适当小的 $R_{\rm rc}$ 可以提高斜流泵的整体水力性能。

关键词:斜流泵;叶顶间隙;频谱分析;压力脉动;数值分析

中图分类号: TH313

文献标志码:A

doi: 10.13243/j.cnki.slxb.2015.04.014

#### 1 研究背景

通常,斜流泵在小流量工况下运行时,由于叶轮和导叶之间的动静干涉、叶片进口的冲击、流动分离、局部汽蚀、以及叶顶间隙处的泄漏流等复杂因素,其内部流动往往表现出强烈的不稳定特性。这种周期性或流动不稳定性的外在体现,会使机组的振动加剧甚至引起进一步空化,严重影响泵运行的安全稳定性。国内外诸多学者,通过数值模拟(CFD)和粒子图像速度仪(PIV),研究了喷水推进器叶顶间隙泄漏涡的流场结构及其湍动能的分布规律[1-3],采用数值模拟和试验测试相结合的方法对泵内压力脉动特性做了大量研究[4-9],揭示了轴流泵和斜流泵内叶顶间隙流动和演化机理[10-13],阐明了设计工况下轴流泵不同叶顶间隙值对压力脉动特性的影响机理[14-15]。但国内外学者对斜流泵内叶顶间隙处压力脉动特性的研究较少,对偏工况下斜流泵叶顶间隙大小与压力脉动的关联特性尚未展开研究。鉴于大涡模拟方法(LES)可直接求解滤波处理后的瞬态 N-S方程来描述湍流大尺度涡运动,通过构建亚格子应力模型模拟小尺度涡对大尺度涡运动的非线性作用,能够直接计算出瞬态的速度和压力值,可以获得流场内更丰富的非定常流动细节,被证实可更准确预测泵内压力脉动特性[5.16]。因此本文采用大涡模拟方法对斜流泵模型进行非定常数值模拟,重点研究小流量工况下叶顶间隙对斜流泵近叶顶间隙区域压力脉动的影响规律,从而为斜流泵叶顶间隙值的选取提供一定的参考依据,以提高其水力稳定性。

## 2 网格划分和数值方法

**2.1** 研究对象 本文所研究的斜流泵模型的设计参数为:  $Q_1$ =390 L/s ,  $H_2$ =14 m , n=1480 r/min ,  $n_2$ =460。

收稿日期:2014-09-16

基金项目:国家科技支撑计划(2013BAF01B02);国家自然科学基金资助项目(51369015);甘肃省自然科学基金资助项目

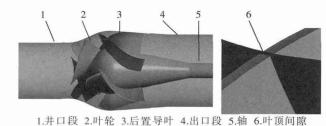
(1212RJYA001)

作者简介:黎义斌(1977-),男,甘肃临洮人,博士生,副教授,主要从事流体机械内部流动特性研究。E-mail:liyibin58@163.com

通讯作者:李仁年(1963-),男,甘肃民勤人,教授,主要从事水力机械多相流动特性研究。E-mail:lim@lut.en

**—** 497 **—** 

主要几何参数为:叶轮进口直径  $D_1$ =304 mm,叶轮出口平均直径  $D_2$ =291 mm,叶轮叶片数 Z=4,导叶叶片数 Z=5,叶片包角 $\varphi$ =90°,计算域的三维结构如图 1 所示。叶顶间隙值用  $R_{TC}$ 表示,分别对  $R_{TC}$ =0,0.5,1,1.5 mm 共4 种方案的模型泵进行数值模拟。采用扩大叶轮室的方法改变  $R_{TC}$ ,以保证叶轮尺寸不变。



5.71 化 5.71 重 寸 7.11 日 校 5.41 6.71

图1 斜流泵计算域

**2.2** 网格划分 由于本文的研究重点与叶顶间隙流动有密切关系,故而对叶顶间隙区的网格质量有较高的要求;同时,由于叶顶间隙的尺度与主流区域特征尺寸差异较大,为了精确捕捉间隙流动特征,间隙区域的网格需精细处理。采用 ICEM-CFD 软件对计算域进行六面体块结构化网格划分,叶顶间隙区因 $R_{TC}$  的不同沿径向布置  $20 \sim 30$  层的精密网格,利用网格函数控制节点分布,保证相邻网格尺寸的均衡过渡以提高数值计算的收敛性和精度,并利于精确捕捉叶顶间隙区复杂的局部流动特性。最终通过网格无关性和网格独立性数值验证,确定计算域总网格数为 875 万。网格及其拓扑关系如图 2 所示。

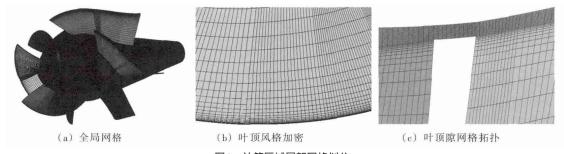


图2 计算区域局部网格划分

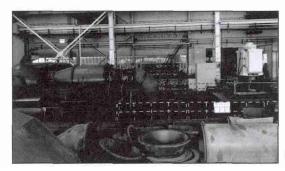
2.3 大涡模拟方法 采用 LES 方法对计算域进行非定常计算,利用有限体积法对瞬时控制方程进行离散,在空间上采用 QUICK 格式即"对流运动的二次迎风插值";在时间上采用二阶全隐式格式,动量方程采用中心差分格式,压力和速度的耦合求解采用 SIMPLEC 算法。固壁采用无滑移壁面条件,分别采用速度入口和自由出流作为进出口边界条件,动静耦合面采用滑移网格技术。参考压力为 101 325 Pa。

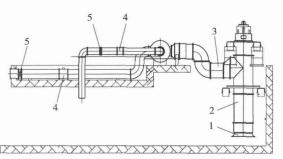
为了缩短计算时间,以稳态 SST  $k-\omega$  模型计算的结果作为非定常计算的初始条件,进行瞬态计算。设置时间步长为  $3.378~4\times10^{-4}~{\rm s}$  ,即每个时间步长叶轮旋转  $3^{\circ}$  ,其旋转一周为 120 步,每个时间步长迭代计算 40 次以保证收敛精度。

### 3 结果与讨论

**3.1** 试验装置与性能分析 斜流泵模型试验在湘电集团长沙水泵有限公司试验台测试,如图 3 所示。斜流泵立式安装在实验台泵段,并以出口法兰所在平面为基准面进行试验。泵轴转速、转矩和轴功率由转速转矩仪测量,泵扬程由进出口压力表测量。平均叶顶间隙值  $R_{TC}$ =1 mm,工作介质为常温清水。

如图 4 表明, $R_{\rm TC}$ =1 mm 时,扬程试验测试值小于预测值,二者的相对误差均小于 4 %。泵扬程随着  $R_{\rm TC}$ 的增大逐渐减小,不同  $R_{\rm TC}$ 下,扬程随着流量的变化曲线基本保持平行,叶顶间隙影响对应流量下的扬程。当  $R_{\rm TC}$ =0 时,泵的扬程较存在叶顶间隙时扬程显著增加,这是由于叶顶间隙的存在引一 498 —





1.吸入段 模型泵 3.出口测压 4.电磁流量计 5.调节阀

图3 试验回路示意图与试验装置

起叶顶泄漏流与主流相互掺混,使得轮缘侧叶片压差显著降低,轮缘侧叶片的负荷减弱,削弱了叶片的做功能力,导致扬程的下降。同时,随着 $R_{TC}$ 的逐渐增加,轮缘侧叶片的做功能力逐渐减弱,使扬程逐渐减小。

其次, $R_{\rm TC}$ 值对斜流泵性能曲线的稳定性影响较大。无叶顶间隙时,斜流泵扬程-流量特性曲线的正斜率不稳定特性较为明显; $R_{\rm TC}$ 从零逐渐增大至 $R_{\rm TC}$ =0.5 mm 时,斜流泵扬程-流量特性曲线正斜率不稳定特性逐渐消失;在  $1~{\rm mm} {\leqslant} R_{\rm TC} {\leqslant} 1.5~{\rm mm}$ 时,斜流泵扬程-流量特性曲线正斜率不稳定特性逐渐明显。且 $R_{\rm TC} {\leqslant} 1~{\rm mm}$ 时,外特性试验表明,斜流泵扬程-流量特性

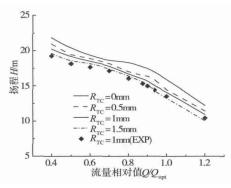


图4 外特性数值模拟与试验

曲线存在正斜率不稳定特性。综合分析表明, $R_{\rm TC}$ =0.5 mm时,可以有效抑制斜流泵的扬程-流量正斜率特性,此时斜流泵的效率值最高;无叶顶间隙时,斜流泵扬程-流量正斜率特性较为明显。

3.2 近叶顶间隙区静压分布 定义无量纲参数叶高系数 $R^*$ ,表达式为

$$R^* = \frac{R - R_h}{R_s - R_h} \tag{1}$$

式中:R 为叶高半径,mm;  $R_n$  为叶轮出口边轮毂半径,mm;  $R_n$  为叶轮出口边轮缘半径,mm。

在小流量工况下,取  $R^*$ =0.99的截面沿周向展开,近叶顶间隙区域的瞬时压力分布如图 5 所示。可以看出, $R_{TC}$ =0 时叶顶区域的压力最高,且等值线分布较为规律; $R_{TC}$  不为 0 时,叶顶前缘吸力面侧出现了明显的由泄漏流引起的低压区,且随着  $R_{TC}$  的增大,泄漏流越强烈,叶道内的低压区范围越大。泄漏流与主流的掺混导致叶顶区域的压力分布极为紊乱,表明叶顶间隙加剧了斜流泵在小流量工况下运行时的不稳定性。

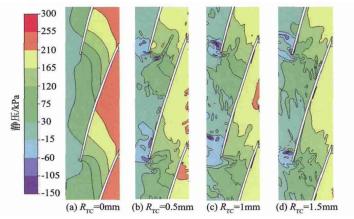


图5 近叶顶间隙区静压分布

3.3 叶轮中部端面速度分布 为了更加直观地表现叶顶间隙对流动结构的影响,在叶轮中部截取一个与轴垂直的断面,显示某一时刻此端面上的速度云图分布,如图6所示。 $R_{\rm rc}=0$ 时,此端面内的速

度呈现出比较规整的层状分布,速度沿径向方向逐渐增大,在近叶轮室壁面附近形成较稳定的高速区;而  $R_{\rm TC}$  不为 0 时,近叶顶间隙处的速度分布相当紊乱,出现大量高速或低速的漩涡区,且随着  $R_{\rm TC}$  的增大,漩涡区的范围向叶道内的主流区扩展。这是由于叶顶间隙引起的泄漏流与主流混掺,发生了明显的卷吸效应,且  $R_{\rm TC}$  越大,引起的泄漏流越大,这种卷吸效应越强烈。随着叶轮的周期性 旋转,这些复杂漩涡与主流交替作用并沿叶轮通道传播,从而加剧了流动的不稳定性。

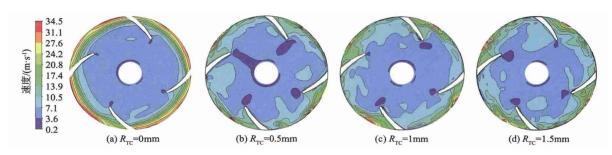
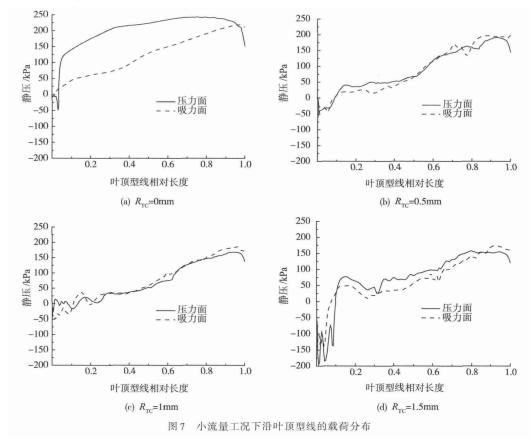


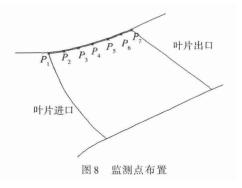
图 6 小流量工况下叶轮中部端面速度分布

**3.4** 叶片叶顶的载荷分布 叶片的受力特性可以反映泵内流动的不稳定性,为了定量表现  $R_{\rm TC}$  对叶顶载荷分布的影响,显示叶片工作面和吸力面上上沿叶顶型线的瞬态静压分布,如图 7 所示。其中横坐标表示沿型线的相对长度。由图可知, $R_{\rm TC}$ =0 时,叶顶工作面和吸力面的压差最大,体现了叶片的做功能力; $R_{\rm TC}$ 不为 0 时,由于泄漏流的形成,叶片工作面和吸力面之间的压差大大降低,这就极大地削弱了叶片的做功能力。另一方面,小间隙下叶顶受力最小,这就意味着在设计斜流泵叶片时,叶片叶顶处可以适当减薄。同时,由于泄漏流与主流的复杂的动量交换,使叶顶的受力较为紊乱,尤其在叶顶前缘处。这说明小流量下对叶片进口的不稳定流动极其复杂,可能是由小流量下叶片冲角增大引起的预漩、叶顶间隙的泄漏流和泄漏涡、以及回流和二次流等多种流动结构与主流掺混叠加,综合作用的结果。



3.5 近叶顶间隙区域压力脉动特性 为了更加深入地揭示 $R_{
m TC}$ 对斜流泵在小流量工况下近壁区内流特 — 500 —

性的影响,监测了叶顶间隙区域的压力脉动特性,对其进行了时域和频域特性分析。监测点 $P_1$ — $P_7$ 沿轴面流线方向均布在叶片叶顶边上,如图 8 所示。为了提高 FFT 频谱分析的分辨率以尽可能地减小频谱泄漏 $^{171}$ ,在进行非定常数值计算时,先计算 3 个叶轮周期以使泵尽可能运行稳定,再从第 4 个周期开始继续计算 4 个周期作为采样时间( 采样总时间为 0.1 622 s ),每 1 个时间步长采样 1 次,采集这 4 个周期内监测点的静压数据进行频谱分析。



定义无量纲化的压力脉动系数 $c_n$ ,对监测点的压力脉动特性进行分析,表达式如下:

$$c_p = \frac{P}{0.5\rho U^2} \tag{2}$$

其中:

$$U = \frac{\pi n D_2}{60} \tag{3}$$

式中:P 为监测点的静压,Pa; $\rho$  为流体密度, $kg/m^3$ ;  $D_2$  为参考点的特征尺寸,在斜流泵的设计中一般定义为叶轮出口平均直径,m;U 为特征尺寸对应参考点的圆周速度,m/s; n 为泵的转速,r/min。

图 9 为叶顶间隙前缘监测点  $P_1$ 的压力脉动特性。可以看出,由于受到叶轮叶片的周期性旋转作用,不同  $R_{TC}$ 下此处压力均呈现出较明显的周期性变化特性;  $R_{TC}$ =0 时的压力变化范围较小,脉动最弱;压力脉动以低频为主,  $R_{TC}$  不为 0 时的低频脉动比  $R_{TC}$ =0 时的剧烈,且  $R_{TC}$  不为 0 时频域特性中含有许多复杂的高频成分,但这些高频压力脉动强度较弱。这是由于  $P_1$  位于叶顶前缘处,此处流体的压力受到叶片直接做功的控制,同时受到泄漏流、复杂旋涡、二次流等各种复杂流动的多重影响,故而其压力脉动特性极为复杂,这说明由  $R_{TC}$  引起的泄漏流使叶顶前缘处的流动复杂化,加剧了流动的不稳定性。

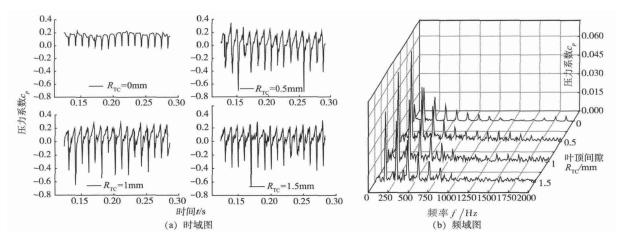
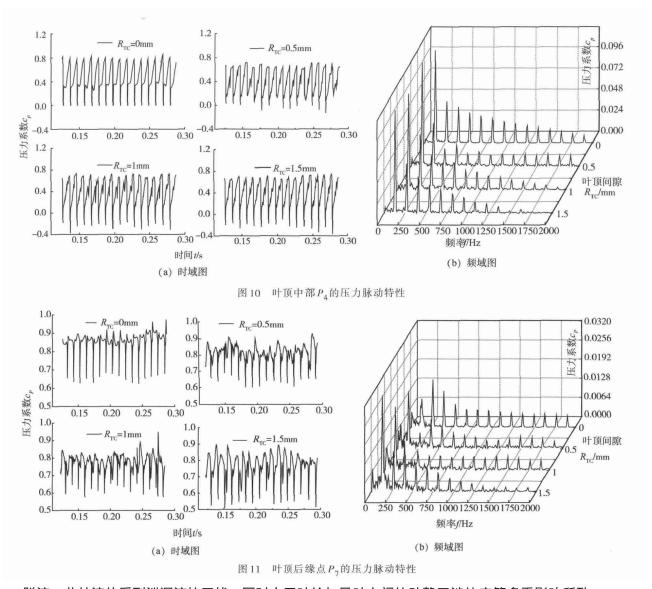


图 9 叶顶前缘点 $P_1$ 的压力脉动特性

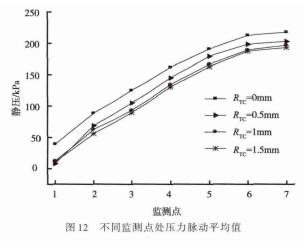
图 10 为叶顶中部监测点  $P_4$ 的压力脉动特性。可以看出,4 种  $R_{TC}$ 下时域特性保持基本一致的周期性规律,但是幅值略有不同;其频域特性也含有大量高频成分,但不及  $P_1$ 处的紊乱。这是因为叶顶中部的流体运动主要受叶片周期性旋转的推动和泄漏流两种运动的叠加,不及叶顶前缘点  $P_1$  处的复杂。同时可以看出,随着  $R_{TC}$  的增大,高频成分有所衰减。这说明相对较大的  $R_{TC}$  对减少叶顶中部的高频压力脉动较为有利。

图 11 为叶顶后缘监测点  $P_7$  的压力脉动特性。可以看出,4 种  $R_{\rm TC}$  下时域特性的周期性规律不及叶顶前缘处和叶顶中部处的明显,表现出一定的随机性;其频域特性也含有大量高频成分,但压力脉动远比叶顶前缘和中部处的微弱,且  $R_{\rm TC}$  越大,高频成分越少。这是因为小流量工况下叶顶后缘易形成



脱流,此处流体受到泄漏流的干扰,同时由于叶轮与导叶之间的动静干涉效应等多重影响所致。

图 12 为 4 种  $R_{\rm TC}$  下不同监测点处压力脉动平均值的分布特性。可以看出,4 种  $R_{\rm TC}$  下叶顶间隙内压力脉动的平均值沿轴面流线方向从叶片进口到叶片出口呈现出逐渐增大的规律,这是由于叶轮对流体直接做功逐渐增大的流体的能量。随着  $R_{\rm TC}$  的增大,同一监测点的压力脉动平均值逐渐减小,这是由于较大的  $R_{\rm TC}$  引起的泄漏流越大,这就大大地降低了叶轮的做功能力。因此,从能量转换的角度看,适当小的  $R_{\rm TC}$  对泵的性能比较有利。



### 4 结论

(1)内流分析表明,斜流泵在小流量工况下运行时表现出强烈的非定常特性, $R_{\rm TC}$  引起的泄漏流与主流掺混,相互干扰,加剧了流动的不稳定性,并降低了叶片的做功能力。(2) $R_{\rm TC}$  对斜流泵叶顶间隙区域的压力脉动特性影响显著。 $R_{\rm TC}$  加剧了叶顶前缘的压力脉动,因而加剧了叶轮进口处的不稳定性;较大的  $R_{\rm TC}$  可以减小叶顶中部和后缘的高频压力脉动,这对提高斜流泵在小流量工况下运行时的水力稳定性较为有利。(3)随着  $R_{\rm TC}$  的逐渐增大,叶轮近壁区压力脉动平均值逐渐减小。较大的  $R_{\rm TC}$  引起的泄漏流加剧,使泵的性能大幅下降。因此,在斜流泵设计时应综合考虑泵的水力性能和水力稳定性等多重指标,选取适当小的  $R_{\rm TC}$  以提高泵的水力性能。

#### 参考文献:

- [ 1 ] Rinaldo L Miorini, Wu Huixuan, Joseph Katz. The internal structure of the tip leakage vortex within the rotor of an axial water-jet pump[J]. Journal of Turbomachinery Transactions of the ASME, 2012, 134(3):222-225.
- [ 2 ] Wu H, Tan D, Miorini R L, et al. Three-dimensional flow structures and associated turbulence in the tip region of a water-jet pump rotor blade[ J ]. Experiments in Fluids, 2011, 51(6):1721-1737.
- [ 3 ] Wu Huixuan , Rinaldo L Miorini , Joseph Katz . Measurements of the tip leakage vortex structures and turbulence in the meridional plane of an axial water-jet pump[ J ]. Experiments in Fluids , 2011 , 50(4):989-1003 .
- [4] 施卫东,邹萍萍,张德胜,等.高比转速斜流泵内部非定常压力脉动特性[J].农业工程学报,2011(4):
- [ 5 ] 王福军,张玲,张志民.轴流泵不稳定流场的压力脉动特性研究[J].水利学报,2007,38(8):1003-1009.
- [ 6 ] 靳栓宝,王永生,常书平,等.混流泵内流场压力脉动特性研究[J].农业机械学报,2013(3):64-68.
- [ 7 ] 王春林,杨晓勇,李长军,等.混流式主泵模型泵内部流场压力脉动特性研究[J].核动力工程,2013(4): 47-52.
- [ 8 ] Shi F, Tsukamoto H. Numerical study of pressure fluctuation caused by impeller-diffuser interaction in a diffuser pump stage [J]. ASME Journal of Fluids Engineering, 2001, 123(3):466-474.
- [ 9 ] Solis M, Bakir F, Khelladi S. Pressure fluctuation reduction in centrifugal pumps influence of impeller geometry and radial gap[C]/Proceedings of the ASME 2009 Fluids Engineering Division Summer Meeting FEDSM 2009, USA, 2009.
- [10] 梁开洪,张克危,许丽.轴流泵叶顶间隙流动的计算流体动力分析[J].华中科技大学学报:自然科学版, 2004,32(9):36-38.
- [ 11 ] Hah C. Investigation of Turbulent Tip Leakage Vortex in an Axial Water Jet Pump With Large Eddy Simulation[C]/
  ASME 2012 Fluids Engineering Division Summer Meeting collocated with the ASME 2012 Heat Transfer Summer
  Conference and the ASME 2012 10th International Conference on Nanochannels, Microchannels, and Minichannels. American Society of Mechanical Engineers, 2012:135–142.
- [ 12 ] Miorini Rinaldo L , Wu Huixuan , Katz Joseph . The Internal Structure of the Tip Leakage Vortex Within the Rotor of an Axial Water-jet Pump[ J ] . Journal of Turbomachinery-Transactions of the ASME , 2012 , 134( 3 ):
- [ 13 ] Goto A . Study of internal flows in a mixed-flow pump at various tip clearance using three-dimensional viscous flow computations [ J ] . ASME Journal of Turbomachinery , 114 :373-382 .
- [ 14 ] 黎耀军,沈金峰,洪益平,等.叶顶间隙对轴流泵轮缘压力脉动影响的数值预测[J].农业机械学报,2014 (5):59-64.
- [ 15 ] 黎耀军,沈金峰,严海军,等.叶顶间隙对轴流泵轮缘泄漏流动影响的大涡模拟[J].水利学报,2014,45 (2):235-242.
- [ 16 ] 张兆顺,崔桂香,许春晓.湍流大涡数值模拟的理论和应用[ M ].北京:清华大学出版社,2008.
- [ 17 ] 施卫东,姚捷,张德胜,等.采样频率和时间对轴流泵压力脉动特性的影响[J].排灌机械工程学报,2013 (3):190-194.

# Numerical analysis of pressure pulsation characteristics of diagonal flow pump in adjacent area of tip clearance

LI Yibin<sup>1, 2</sup>, BI Zhen<sup>1</sup>, LI Rennian<sup>1, 2</sup>, HU Penglin<sup>1</sup>, ZHOU Dong<sup>3</sup>
(1. School of Energy and Power Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;
2. Key Laboratory of Fluid machinery and Systems, Gansu Province, Lanzhou 730050, China;
3. Hunan XEMG Changsha Pump Works Co., LTD., Changsha 410205, China)

**Abstract**: In order to clarify pressure pulsation characteristics of the diagonal flow pump in adjacent areas of tip clearance under small flow conditions, and reveal the effect of different blade tip clearance value  $R_{TC}$  on transient stability, an unsteady numerical simulation was conducted for the diagonal flow pumps. Four plans of diagonal flow pumps were selected with different  $R_{TC}$  values of 0, 0.5, 0.75 and 1mm as study objects, based on the large eddy simulation (LES) approach, SIMPLEC algorithm and block structured grids. By analyzing pressure pulsation spectrum, the internal relation between  $R_{TC}$  and pressure pulsation of adjacent areas of tip clearance has been realized. The results show that the leakage flow caused by  $R_{TC}$  mixing with main flow aggravates the instability of the flow on tip clearance areas, reducing the performance ability of impeller blades; the greater  $R_{TC}$  can reduce high frequency pressure pulsation of blade tip areas, but give rise to leakage rate aggravation; with  $R_{TC}$  increasing, the average value of pressure pulsation on impeller near wall regions decreases gradually, and hydraulic performance declines. Choose a proper small  $R_{TC}$  at design time can improve overall hydraulic performance of diagonal flow pumps.

**Key words**: diagonal flow pump; blade tip clearance; spectrum analysis; pressure pulsation; numerical analysis

(责任编辑:韩 昆)

#### (上接第496页)

# An extended scaled boundary finite element method without asymptotic enrichment of the crack tip

CHEN Baibin<sup>1</sup>, LI Jianbo <sup>1,2</sup>, LIN Gao <sup>1,2</sup>

(1. Earthquake Engineering Research Division, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: It is not necessary to remesh when the extended finite element method simulates crack propagation. But the complex enrichment functions based on a priori knowledge of the asymptotic expansions of the displacements in the crack—tip are required. Besides, the special numerical integration techniques are always inevitable. The generalized stress intensity factors could be accurately calculated by the scale boundary finite element method directly from the consistent formula without the knowledge on the type of singularity. Therefore, a coupling model i.e. the extended SBFEM can be established to improve the capability to model complex fracture problems. In this method, the nonsmooth behavior around the crack tip is modeled by SBFEM while the split elements are modeled by XFEM. Furthermore, based on the principle of virtual work, the equivalent node loads, the displacement and the stress fields in super element are derived in detail including the effect of surface tractions. During its numerical evaluation, the stress intensity factors of semi-infinite plate with different kinds of surface tractions are calculated, the results show that the X-SB-FEM is effective.

**Key words**: fracture mechanics; surface tractions; extended finite element method; scale boundary finite element method; extended scale boundary finite element method

(责任编辑:王冰伟)