

轮扩展图的电阻距离及 Kirchhoff 指数

卢鹏丽, 张 腾

兰州理工大学 计算机与通信学院, 兰州 730050

摘 要: 对于一些复杂图来说, 计算其电阻距离非常困难. 定义了一类新的图运算: 轮扩展图. 通过此类图的 Laplacian 矩阵和 Laplacian 矩阵的广义逆, 给出了轮扩展图中任意两点之间的电阻距离和轮扩展图的 Kirchhoff 指数表达式. 用 Matlab 编程计算了此类图任意两点之间具体的电阻距离值及 Kirchhoff 指数.

关键词: Laplacian 矩阵; 广义逆; 电阻距离; Kirchhoff 指数

中图分类号: O157.5; O157.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0455-2059(2016)05-0667-08

DOI: 10.13885/j.issn.0455-2059.2016.05.016

Resistance distance and Kirchhoff index of extended wheel graphs

Lu Peng-li, Zhang Teng

School of Computer and Communication, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China

Abstract: For some complicated graphs obtained by graph operations, it is very difficult to compute their resistance distances. The paper defined a new class of graphs, i.e. extended wheel graphs obtained by graph operations. By the Laplacian matrix and the generalized inverse of the Laplacian matrix of the extended wheel graph, we derived the formulae for the resistance distance of any pair of vertices of the extended wheel graph, and also the Kirchhoff index of the extended wheel graph. A Matlab program was given to compute the value of resistance distance of any pair of vertices in an extended wheel graph and the Kirchhoff index of an extended wheel graph.

Key words: Laplacian matrix; generalized inverse; resistance distance; Kirchhoff index

AMS Subject Classifications (2000): 05C50

本研究只讨论简单无向图. 设图 $G=V(G), E(G)$ 的顶点集、边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$. 记 d_i 是图 G 中顶点 i 的度, 图 G 的度矩阵记为

$$D_G = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{|V(G)|}).$$

设图 G 的邻接矩阵为 $A_G=(a_{ij})$, 如果顶点 i 与 j 相邻则 $a_{ij}=1$; 否则, $a_{ij}=0$. 记 $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ 为图 G 的邻接矩阵的特征值. 矩阵 $L_G=D_G-A_G$ 称为图 G 的 Laplacian 矩阵, 矩阵 $Q_G=D_G-A_G D_G+A_G$ 称为图 G 的 Signless Laplacian 矩阵.

设图 G 是一个连通图. 如果在 G 的每一条边

上放置一个单位电阻, 即可得到图 G 对应的电网络, 表示为 N . 图 G 中的任意两点间的电阻距离等于电网络 N 中对应的两点间的有效电阻. 图 G 中所有点之间的电阻距离之和等于图 G 的 Kirchhoff 指数. 通常情况下, 用 $\Omega_{ij}(G)$ 表示图 G 中顶点 i 和 j 之间的电阻距离, $Kf(G)$ 表示图 G 的 Kirchhoff 指数, 很多图类的电阻距离和 Kirchhoff 指数已经得到^[1-9].

通过图运算可以得到很多新的复杂图类: 冠图^[10]、邻居冠图^[11]、剖分图的邻居冠图^[12]等. 本研

收稿日期: 2015-05-06 修回日期: 2015-06-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(11361033)

作者简介: 卢鹏丽(1973-), 女, 甘肃酒泉人, 教授, 博士, e-mail: lupengli88@163.com, 研究方向为图论和算法.

究定义了一类新的图运算: 轮扩展图.

定义 1 将顶点数为 n 的圈图 C_n 上的所有顶点同时连接到一个孤立点 K 所得到的图称为轮图, 记为 W_n , 图 1 所示为轮图 W_6 . 轮图 W_n 的顶点数为 $n+1$, 圈上的顶点度数均为 3.

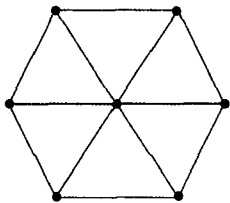


图 1 轮图 W_6

Fig. 1 The wheel graph W_6

定义 2 设 v 是图 G 的顶点度为 3 的顶点, 如果将 v 用一个三角形代替 (图 2), 此类图运算为图 G 的关于顶点 v 的一个三角形插入运算.

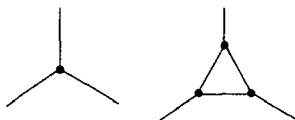


图 2 一个顶点的三角插入运算

Fig. 2 The triangle insertion at a vertex

定义 3 将 W_n 中所有的 3 度顶点做三角形插入运算后得到的图称为轮扩展图, 记为 $W_n \langle t \rangle C_3$. 当 $n=3$ 时, 定义轮扩展图 $W_3 \langle t \rangle C_3$ 由 W_3 中任选三个 3 度顶点做三角形插入运算所得. 图 3 所示为轮扩展图 $W_4 \langle t \rangle C_3$.

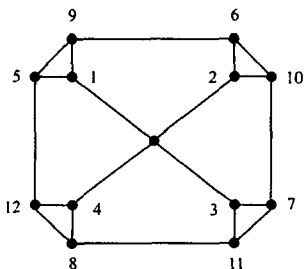


图 3 轮扩展图 $W_4 \langle t \rangle C_3$

Fig. 3 The extended wheel graphs $W_4 \langle t \rangle C_3$

本研究给出了 $W_n \langle t \rangle C_3$ 中任意两点之间的电阻距离公式及此类图的 Kirchhoff 指数, 给出了 Matlab 编程计算此类图任意两点之间的电阻距离的方法. 以 $W_n \langle t \rangle C_3$ 为例, 给出了其电阻距离及 Kirchhoff 指数, 并用 Matlab 程序验证了其结论的正确性.

1 主要引理

设 M 是一个 $n \times m$ 阶矩阵, 如果存在 $m \times n$ 阶矩

阵 X 满足 $MXM=M$, 则称 X 为 M 的广义逆矩阵. 当 M 是一个奇异矩阵时, M 有无穷个广义逆矩阵. 用 $M^{(0)}$ 表示矩阵 M 的任意一个广义逆矩阵; $(M)_{uv}$ 表示矩阵 M 的第 u 行, 第 v 列元素; $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量.

设 M 是一个 $n \times n$ 阶矩阵, 如果存在唯一的矩阵 X 满足 $MXM=M, XMX=X$ 和 $MX=XM$, 则称 X 为矩阵 M 的群逆, 记作 $M^\#$.

引理 1^[1-13] 设图 G 是连通图, 则

$$\begin{aligned} \Omega_{uv}(G) &= (L_G^{(0)})_{uu} + (L_G^{(0)})_{vv} - (L_G^{(0)})_{uv} - (L_G^{(0)})_{vu} \\ &= (L_G^\#)_{uu} + (L_G^\#)_{vv} - 2(L_G^\#)_{uv}. \end{aligned}$$

引理 2^[14] 如果 S 是一个实对称矩阵, 且 $S\mathbf{1}=\mathbf{0}$, 那么 $S^\#\mathbf{1}=\mathbf{1}^\top S^\#=\mathbf{0}$.

引理 3^[14] 设矩阵 $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^\top & L_3 \end{pmatrix}$ 为连通图的 Laplacian 矩阵. 如果矩阵 L_2^\top 的每一个列向量为全 -1 或全 0, 那么矩阵 $N = \begin{pmatrix} L_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S^\# \end{pmatrix}$ 为 L 矩阵的逆矩阵, 其中 $S = L_3 - L_2^\top L_1^{-1} L_2$.

引理 4^[15] 设矩阵 $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ 是一个非奇异矩阵. 如果 M_1 与 M_4 同时为非奇异矩阵, 则

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} M_1^{-1} + M_1^{-1} M_2 S^{-1} M_2^\top M_1^{-1} & -M_1^{-1} M_2 S^{-1} \\ -S^{-1} M_2^\top M_1^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3)^{-1} & -M_1^{-1} M_2 S^{-1} \\ -S^{-1} M_2^\top M_1^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中, $S = M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2$.

引理 5^[16] 设 G 为 n 个顶点的连通图, 则

$$Kf(G) = n \operatorname{tr}(L_G^{(0)}) - \mathbf{1}^\top L_G^{(0)} \mathbf{1} = n \operatorname{tr}(L_G^\#).$$

设图 G 为 n 个顶点 m 条边的连通图. 关联矩阵定义为 $R = (r_{ij})_{n \times m}$. 其中, r_{ij} 表示在关联矩阵中点 i 和边 j 之间的关系. 若点 i 和边 j 之间是相连的, 则 $r_{ij}=1$; 反之, 则 $r_{ij}=0$.

引理 6 设 C_n 为 n 个顶点的圈图, Q_{C_n} 为 C_n 的 Signless Laplacian 矩阵, R 为 C_n 的关联矩阵, 则 $Q_{C_n} = R + R^\top$.

证明 圈图 C_n 的邻接矩阵为

$$A_{C_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

圈图 C_n 的度矩阵为

$$D_{C_n} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

圈图 C_n 的关联矩阵为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$Q_{C_n} = A_{C_n} + D_{C_n} = R + R^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

证毕.

设 n 阶矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 有

引理 7 设矩阵 I_n 为 n 阶单位矩阵, 矩阵 $M = aP + bP^T + cI_n$. 则 $PMP^T = M$, 其中, a, b, c 为任意实数.

证明

$$\begin{aligned} PMP^T &= P(aP + bP^T + cI_n)P^T \\ &= (aP^2 + bI_n + cP)P^T \\ &= aP + bP^T + cI_n \\ &= M. \end{aligned}$$

证毕.

2 轮扩展图的电阻距离和 Kirchhoff 指数

首先给出轮扩展图 $W_n\langle t \rangle C_3$ 的顶点编号. 轮扩展图 $W_n\langle t \rangle C_3$ 中 n 个插入的三角形顺时针依次表示为 $(C_3)_1, (C_3)_2, \dots, (C_3)_n$. $W_n\langle t \rangle C_3$ 的中心顶点编号为 $3n+1$, 第 i 个三角形 $(C_3)_i$ 中与 $W_n\langle t \rangle C_3$ 中心顶点相邻的顶点标号为 i , 其他两个顶点顺时针编号为第 k 个顶点 c_k 的编号为 $i+n$ 和 $i+2n$. $W_n\langle t \rangle C_3$ 的顶点编号示意图见图 3.

按照以上顶点编号, 图 $W_n\langle t \rangle C_3$ 的顶点集为 $V(W_n\langle t \rangle C_3) = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{n+1, n+2, \dots, 2n\} \cup \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\} \cup \{3n+1\}$. 设 R 为圈图 C_n 的关联矩阵, 则

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

轮扩展图 $W_n\langle t \rangle C_3$ 的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_n & I_n & 1 \\ I_n & 0 & R & 0 \\ I_n & R^T & 0 & 0 \\ 1^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

轮扩展图 $W_n\langle t \rangle C_3$ 的度对角矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} 3I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

通过 Laplacian 矩阵的定义, $W_n\langle t \rangle C_3$ 的 Laplacian 矩阵为

$$L_{W_n\langle t \rangle C_3} = \begin{pmatrix} 3I_n & -I_n & -I_n & -1 \\ -I_n & 3I_n & -R & 0 \\ -I_n & -R^T & 3I_n & 0 \\ -1^T & 0 & 0 & n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

假设

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{(n-1)1} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{(n-1)n} \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 阶任意矩阵. 将矩阵 M_1 的第 i 行元素移到第 $(i+1)$ 行, 其中 $i=1, 2, \dots, n-1$, 第 n 行元素移到第 1 行, 得到矩阵

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{(n-2)1} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{(n-2)n} \\ m_{(n-1)1} & m_{(n-1)2} & \cdots & \cdots & m_{(n-1)n} \end{pmatrix}$$

此时, 得到如下恒等式:

$$M_2 = PM_1, \quad (5)$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1 设 C_n 为顶点数为 n 的圈图, 定义 $X = 13I_n - 4A_{C_n}$, $Y = PX^{-1}$, $Y^T = X^{-1}P^T$. 则轮扩展图的电阻距离为:

- 1) 当 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 时, $\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = \frac{1}{2} + \frac{15}{4}X_{ii}^{-1} + \frac{15}{4}X_{jj}^{-1} - \frac{15}{2}X_{ij}^{-1}$;
- 2) 当 $i, j \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ 时, $\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = 8X_{ii}^{-1} + 8X_{jj}^{-1} - 16X_{ij}^{-1}$;
- 3) 当 $i, j \in \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$ 时, $\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = 8X_{ii}^{-1} + 8X_{jj}^{-1} - 16X_{ij}^{-1}$;
- 4) 当 $i, j = 3n+1$ 时, $\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = 0$;
- 5) 当 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ 时,

$$\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = \frac{1}{4} + \frac{15}{4}X_{ii}^{-1} + 8X_{jj}^{-1} - 8X_{ij}^{-1} - 2Y_{ij}^T;$$

6) 当 $i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$ 时,

$$\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = \frac{1}{4} + \frac{15}{4}X_{ii}^{-1} + 8X_{jj}^{-1} - 8X_{ij}^{-1} - 2Y_{ij};$$

7) 当 $i \in \{1, 2, \dots, n\}, j = 3n+1$ 时,

$$\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = \frac{1}{4} + \frac{15}{4}X_{ii}^{-1};$$

8) 当 $i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}, j \in \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$ 时,

$$\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = 8X_{ii}^{-1} + 8X_{jj}^{-1} - 8X_{ij}^{-1} - 6Y_{ij}^T;$$

9) 当 $i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}, j = 3n+1$ 时,

$$\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = 8X_{ii}^{-1};$$

10) 当 $i \in \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}, j = 3n+1$ 时,

$$\Omega_{ij}(W_n\langle t \rangle C_3) = 8X_{ii}^{-1}.$$

证明 设

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3I_n & -I_n & -I_n \\ -I_n & 3I_n & -R \\ -I_n & -R^T & 3I_n \end{pmatrix}.$$

其中

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 3I_n & -I_n \\ -I_n & 3I_n \end{pmatrix}.$$

由引理4可得, M_{11} 的逆矩阵为

$$M_{11}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3I_n & I_n \\ I_n & 3I_n \end{pmatrix}.$$

由引理4和矩阵 M_{11}^{-1} 可得, M_1 的逆矩阵为

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}A & \frac{1}{8}B & 3X^{-1} + RX^{-1} \\ \frac{1}{8}C & \frac{1}{8}D & X^{-1} + 3RX^{-1} \\ 3X^{-1} + X^{-1}R^T & X^{-1} + 3X^{-1}R^T & 3X^{-1} \end{pmatrix}.$$

其中

$$X = 13I_n - 4A_c;$$

$$A = 3I_n + 9X^{-1} + 3RX^{-1} + 3X^{-1}R^T + RX^{-1}R^T;$$

$$B = I_n + 3X^{-1} + RX^{-1} + 9X^{-1}R^T + 3RX^{-1}R^T;$$

$$C = I_n + 3X^{-1} + 9RX^{-1} + X^{-1}R^T + 3RX^{-1}R^T;$$

$$D = 3I_n + X^{-1} + 3RX^{-1} + 3X^{-1}R^T + 9RX^{-1}R^T.$$

又因为

$$S = n - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T L_2^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = n - \frac{1}{8} \mathbf{1}^T A \mathbf{1} = 0,$$

所以, 由矩阵群逆的定义可得 $SS^{\#}S = S, S^{\#}SS^{\#} = S^{\#}, SS^{\#} = S^{\#}S$, 则 $S^{\#} = 0$.

由引理3和矩阵(4)可得, $L_{W_n\langle t \rangle C_3}$ 的广义逆矩阵为

$$L_{W_n\langle t \rangle C_3}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}A & \frac{1}{8}B & 3X^{-1} + RX^{-1} & 0 \\ \frac{1}{8}C & \frac{1}{8}D & X^{-1} + 3RX^{-1} & 0 \\ 3X^{-1} + X^{-1}R^T & X^{-1} + 3X^{-1}R^T & 8X^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $R=I+P$ 和 $R^T=I+P^T$, 通过引理7, 进一步可得:

$$A = 3I_n + 17X^{-1} + 4PX^{-1} + 4X^{-1}P^T;$$

$$B = I_n + 19X^{-1} + 4PX^{-1} + 12X^{-1}P^T;$$

$$C = I_n + 19X^{-1} + 12PX^{-1} + 4X^{-1}P^T;$$

$$D = 3I_n + 25X^{-1} + 12PX^{-1} + 12X^{-1}P^T.$$

此时, $L_{W_n\langle t \rangle C_3}$ 的广义逆矩阵为

$$L_{W_n\langle t \rangle C_3}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}A & \frac{1}{8}B & 4X^{-1} + PX^{-1} & 0 \\ \frac{1}{8}C & \frac{1}{8}D & 4X^{-1} + 3PX^{-1} & 0 \\ 4X^{-1} + X^{-1}P^T & 4X^{-1} + 3X^{-1}P^T & 8X^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据图 $W_n\langle t \rangle C_3$ 的顶点编号, 可知顶点 $(n+i)$ 和 $(n+j)$ 之间的电阻距离与相应顶点 $(2n+i)$ 和 $(2n+j)$ 之间的电阻距离相等, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 即

$$\Omega_{(n+i)(n+j)} = \Omega_{(2n+i)(2n+j)}. \text{ 由此可得,}$$

$$\frac{1}{8}D_{(n+i)(n+j)} = (8X^{-1})_{(2n+i)(2n+j)}.$$

即 $\frac{1}{8}D = 8X^{-1}$. 将等式 $\frac{1}{8}D = 8X^{-1}$ 化简成为

$$I_n + 4PX^{-1} + 4X^{-1}P^T = 13X^{-1},$$

并将其代入矩阵 A, B, C 中, 可得

$$L_{W_n\langle t \rangle C_3}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(I_n + 15X^{-1}) & 4X^{-1} + X^{-1}P^T & 4X^{-1} + PX^{-1} & 0 \\ 4X^{-1} + PX^{-1} & 8X^{-1} & 4X^{-1} + 3PX^{-1} & 0 \\ 4X^{-1} + X^{-1}P^T & 4X^{-1} + 3X^{-1}P^T & 8X^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设矩阵 $Y = PX^{-1}, Y^T = X^{-1}P^T$, 根据(5)式, 可得

$$L_{W_n\langle t \rangle C_3}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(I_n + 15X^{-1}) & 4X^{-1} + Y^T & 4X^{-1} + Y & 0 \\ 4X^{-1} + Y & 8X^{-1} & 4X^{-1} + 3Y & 0 \\ 4X^{-1} + Y^T & 4X^{-1} + 3Y^T & 8X^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

图 $W_n\langle t \rangle C_3$ 的顶点集为

$$V(W_n\langle t \rangle C_3) =$$

$$\{1, 2, \dots, n\} \cup \{n+1, n+2, \dots, 2n\} \cup$$

$$\{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\} \cup \{3n+1\},$$

由引理1和矩阵(6), 可得1)~10).

定理2 图 $W_n\langle t \rangle C_3$ 的 Kirchhoff 指数为

$$Kf(W_n\langle t \rangle C_3) = \frac{79(3n+1)}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{13 - 4\lambda_i(C_n)} + \frac{3n^2 - 43n}{4},$$

其中, $\lambda_i(C_n)$ 为圈图 C_n 的邻接矩阵 A_{C_n} 的特征值.

证明 由矩阵(6)可知,

$$tr(L_{W_n\langle t \rangle C_3}^{(0)}) =$$

$$\frac{1}{4}tr(I_n + 15X^{-1}) + 8tr(X^{-1}) + 8tr(X^{-1}) =$$

$$\frac{n}{4} + \frac{15}{4}tr(X^{-1}) + 16tr(X^{-1}) =$$

$$\frac{n}{4} + \frac{79}{4}tr(X^{-1}).$$

由于 $X = 13I_n - 4A_{C_n}$, 则

$$\text{tr}(X^{-1}) = \sum_{i=1}^n (13 - 4\lambda_i(C_n))^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{13 - 4\lambda_i(C_n)}$$

同时,

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}^T L_{W_n(t)C_3}^{(0)} \mathbf{1} = \\ & \mathbf{1}^T \left(\frac{1}{4} I_n + \frac{15}{4} X^{-1} \right) \mathbf{1} + \mathbf{1}^T (4X^{-1} + X^{-1} P^T) \mathbf{1} + \\ & \mathbf{1}^T (4X^{-1} + P X^{-1}) \mathbf{1} + \mathbf{1}^T (4X^{-1} + P X^{-1}) \mathbf{1} + \\ & \mathbf{1}^T (8X^{-1}) \mathbf{1} + \mathbf{1}^T (4X^{-1} + 3P X^{-1}) \mathbf{1} + \\ & \mathbf{1}^T (4X^{-1} + X^{-1} P^T) \mathbf{1} + \mathbf{1}^T (4X^{-1} + 3X^{-1} P^T) \mathbf{1} + \\ & \mathbf{1}^T (8X^{-1}) \mathbf{1} = \\ & n + n + n + n + \frac{8}{5}n + \frac{7}{5}n + n + \frac{7}{5}n + \frac{8}{5}n = 11n. \end{aligned}$$

则由引理 5 可得,

$$\begin{aligned} Kf(W_n(t)C_3) &= (3n + 1) \text{tr}(L_{W_n(t)C_3}^{(0)}) - \mathbf{1}^T L_{W_n(t)C_3}^{(0)} \mathbf{1} = \\ & \frac{79(3n + 1)}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{13 - 4\lambda_i(C_n)} + \\ & \frac{3n^2 - 43n}{4}. \end{aligned}$$

3 Matlab 编程求解轮扩展图的电阻距离

定理 1、2 给出了轮扩展图的电阻距离和 Kirchhoff 指数的公式. 显然, 通过这两个公式进行进一步的计算比较复杂, 尤其是电阻距离的计算更为困难, 即使 n 值不大的情况下也难以得到它们的具体值. 下面给出用 Matlab 软件编程的方法得到电阻距离及 Kirchhoff 指数的具体值(程序参见附录).

通过矩阵(4)及 Matlab 中的 Pinv(L) 函数得到矩阵 $L_{W_n(t)C_3}$ 的广义逆矩阵, 由引理 1 得到 $W_n(t)C_3$ 中任意两顶点之间的电阻距离.

算法的基本步骤为:

输入: 轮图 W_n 圈上的顶点个数 n ;

输出: 该轮图扩展图 $W_n(t)C_3$ 的电阻距离矩阵及其 Kirchhoff 指数.

步骤 1 描述轮图扩展图 $W_n(t)C_3$ 的邻接矩阵 A .

步骤 2 描述轮图扩展图 $W_n(t)C_3$ 的度对角矩阵 D .

步骤 3 由邻接矩阵 A 和度对角矩阵 D , 得到轮图扩展图 $W_n(t)C_3$ 的 Laplacian 矩阵 L .

步骤 4 由 Laplacian 矩阵及 Matlab 的 Pinv(L) 函数得到其广义逆矩阵 $L^{(0)}$.

步骤 5 由 Laplacian 矩阵的广义逆矩阵 $L^{(0)}$ 与引理 1 得到图 $W_n(t)C_3$ 的电阻距离矩阵 Ω .

步骤 6 由 Ω 得到图 $W_n(t)C_3$ 的 Kirchhoff 指数.

步骤 7 任意输入广义逆矩阵 $L^{(0)}$ 顶点 i 和 j , 输出 i 和 j 两点之间的电阻距离.

4 应用与实例

以图 $W_n(t)C_3$ 为例, 由定理 1、2 计算了 $W_3(t)C_3$ 的任意两点间的电阻距离, 得到了 Kirchhoff 指数, 并用 Matlab 程序验证了结论的正确性.

图 $W_n(t)C_3$ 的 Laplacian 矩阵为

$$L_{W_3(t)C_3} = \begin{pmatrix} 3I_3 & -I_3 & -I_3 & -\mathbf{1} \\ -I_3 & 3I_3 & -R & \mathbf{0} \\ -I_3 & -R^T & 3I_3 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \end{pmatrix},$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

图 $W_3(t)C_3$ 的 Laplacian 矩阵的广义逆矩阵为

$$L_{W_3(t)C_3}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(I_3 + 15X^{-1}) & 4X^{-1} + Y^T & 4X^{-1} + Y & \mathbf{0} \\ 4X^{-1} + Y & 8X^{-1} & 4X^{-1} + 3Y & \mathbf{0} \\ 4X^{-1} + Y^T & 4X^{-1} + 3Y^T & 8X^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} 13 & -4 & -4 \\ -4 & 13 & -4 \\ -4 & -4 & 13 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1} = \frac{1}{1445} \begin{pmatrix} 153 & 68 & 68 \\ 68 & 153 & 68 \\ 68 & 68 & 153 \end{pmatrix},$$

$$Y = \frac{1}{1445} \begin{pmatrix} 68 & 153 & 68 \\ 68 & 68 & 153 \\ 153 & 68 & 68 \end{pmatrix}.$$

由定理 1 可得图 $W_3(t)C_3$ 的电阻距离矩阵

$$\Omega_{W_3(t)C_3} = [\Omega_{ij}(W_3(t)C_3)].$$

1) 当 $i, j \in \{1, 2, 3\}$ 时,

$$\Omega_{1,2}(W_3(t)C_3) = \Omega_{1,3}(W_3(t)C_3) =$$

$$\Omega_{2,3}(W_3(t)C_3) = \frac{272}{289};$$

2) 当 $i, j \in \{4, 5, 6\}$ 时,

$$\Omega_{4,5}(W_3(t)C_3) = \Omega_{4,6}(W_3(t)C_3) =$$

$$\Omega_{5,6}(W_3(t)C_3) = \frac{272}{289};$$

3) 当 $i, j \in \{7, 8, 9\}$ 时,

$$\Omega_{7,8}(W_3(t)C_3) = \Omega_{7,9}(W_3(t)C_3) =$$

$$\Omega_{8,9}(W_3(t)C_3) = \frac{272}{289};$$

4) 当 $i, j=10$ 时,

$$\Omega_{10,10}(W_3\langle t \rangle C_3) = 0;$$

5) 当 $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{4, 5, 6\}$ 时,

$$\Omega_{1,4}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{2,5}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{3,6}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{799}{1445};$$

$$\Omega_{1,5}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{2,6}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{3,4}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{1309}{1445};$$

$$\Omega_{1,6}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{2,4}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{3,5}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{1479}{1445};$$

6) 当 $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{7, 8, 9\}$ 时,

$$\Omega_{1,7}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{2,8}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{3,9}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{799}{1445};$$

$$\Omega_{1,8}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{2,9}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{3,7}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{1479}{1445};$$

$$\Omega_{1,9}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{2,7}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{3,8}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{1309}{1445};$$

7) 当 $i \in \{1, 2, 3\}, j=10$ 时,

$$\Omega_{1,10}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{2,10}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{3,10}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{187}{289};$$

8) 当 $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{7, 8, 9\}$ 时,

$$\Omega_{4,7}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{5,8}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{6,9}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{816}{1445};$$

$$\Omega_{4,8}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{5,9}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{6,7}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{1496}{1445};$$

$$\Omega_{4,9}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{5,7}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{6,8}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{986}{1445};$$

9) 当 $i \in \{4, 5, 6\}, j=10$ 时,

$$\Omega_{4,10}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{5,10}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{6,10}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{1224}{1445};$$

10) 当 $i \in \{7, 8, 9\}, j=10$ 时,

$$\Omega_{7,10}(W_3\langle t \rangle C_3) = \Omega_{8,10}(W_3\langle t \rangle C_3) =$$

$$\Omega_{9,10}(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{1224}{1445};$$

矩阵 $\Omega_{W_3\langle t \rangle C_3}$ 表示顶点之间 i 和 j 之间的电阻距离 Ω_{ij} , 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

由定理 2 给出图 $W_3\langle t \rangle C_3$ 的 Kirchhoff 指数

$$Kf(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{395}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{13 - 4\lambda_i(C_n)} - \frac{51}{2}.$$

由于 $\lambda_1(C_3) \geq \lambda_2(C_3) \geq \lambda_3(C_3)$, 所以 $\lambda_1(C_n) = 2, \lambda_2(C_n) = \lambda_3(C_n) = -1$. 那么

$$Kf(W_3\langle t \rangle C_3) = \frac{633}{17}.$$

使用附录中的 Matlab 软件运算后, 得到了与上述公式计算相同的值, 验证了矩阵 $\Omega_{W_3\langle t \rangle C_3}$ 及其 Kirchhoff 指数的正确性.

5 结论

定义了一种新的图运算: 轮扩展图 $W_n\langle t \rangle C_3$. 给出了轮扩展图的电阻距离及 Kirchhoff 指数的公式, 并利用 Matlab 软件计算了轮扩展图的电阻距离及 Kirchhoff 指数.

参考文献

- [1] Bapat B R, Somit G. Resistance distance in wheels and fans[J]. Indian Journal Pure and Applied Mathematics, 2010, 41(1): 1-13.
- [2] Klein D J, Randi M. Resistance distance[J]. Journal of mathematical Chemistry, 1993, 12(1): 81-95.
- [3] Chen Hai-yan. Random walks and the effective resistance sum rules[J]. Discrete Applied Mathematics, 2010, 158(15): 1691-1700.
- [4] Yang Yu-jun. The Kirchhoff index of subdivisions of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 171(2): 153-157.
- [5] Yang Yu-jun, Klein D J. A recursion formula for resistance distances and its applications[J]. Discrete Applied Mathematics, 2013, 161(16/17): 2702-2715.
- [6] Yang Yu-jun, Zhang He-ping. Some rules on resistance distance with applications[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008, 41(44): 6797-6800.
- [7] Wu F Y. Theory of resistor networks: the two-point resistance[J]. Journal of Physics A: General Physics, 2004, 37(26): 6653-6673.
- [8] Zhang He-ping, Yang Yu-jun. Resistance and Kirchhoff index in circulant graphs[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2007, 107(2): 330-339.
- [9] Yang Yu-jun. Resistance distance and global cyclicity index of fullerene graphs[J]. Digest Journal of Nanomaterials and Biostructures, 2012, 7(2): 593-598.
- [10] 卢鹏丽, 苗玉芳. 两类冠图的 Laplacian 谱[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2015, 36(2): 1-5.
- [11] Liu Xiao-gang, Zhou San-ming. Spectra of the neighbourhood corona of two graphs[J]. Linear and Multilin-

- ear Algebra, 2014, 62(9): 1205-1219.
- [12] Liu Xiao-gang, Lu Peng-li. Spectra of subdivision-vertex and subdivision-edge neighbourhood coronae[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 438(8): 3547-3559.
- [13] Bu Chang-jiang, Sun Li-zhu, Zhou Jiang, et al. A note on block representations of the group inverse of Laplacian matrices[J]. Electron J Linear Algebra, 2012, 23(1): 866-876.
- [14] Bu Chang-jiang, Yan Bo, Zhou Xiu-qing, et al. Resistance distance in subdivision-vertex join and subdivision-edge join of graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2014, 458(10): 454-462.
- [15] Zhou Jiang, Sun Li-zhu, Wang Wen-zhe, et al. Line star sets for Laplacian eigenvalues[J]. Linear Algebra and its Applications, 2014, 440(1): 164-176.
- [16] Sun Li-zhu, Wang Wen-zhe, Zhou Jiang, et al. Some results on resistance distances and resistance matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2015, 63(3): 523-533.

附录

Matlab 程序主要代码:

得到轮图 W_n 的邻接矩阵 A

```
function A = A_matrix( n )
```

```
A=zeros(3*n+1);
```

```
for i=1: n
```

```
    %A(i, i)=0;
```

```
    A(i, i+n)=1;
```

```
    A(i, i+2*n)=1;
```

```
    A(i, 3*n+1)=1;
```

```
end
```

```
for i=n+1:2*n
```

```
    A(i, i-n)=1;
```

```
    if i+n==2*n+1
```

```
        A(i, i+n)=1;
```

```
        A(i, i+2*n-1)=1;
```

```
    else
```

```
        A(i, i+n)=1;
```

```
        A(i, i+n-1)=1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
for i=2*n+1:3*n
```

```
    A(i, i-2*n)=1;
```

```
    if i-n==2*n
```

```
        A(i, i-n)=1;
```

```
        A(i, i-2*n+1)=1;
```

```
    else
```

```
        A(i, i-n)=1;
```

```
        A(i, i-n+1)=1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
for i=1:n
```

```
    A(3*n+1, i)=1;
```

```
end
```

```
end
```

得到轮图 W_n 的度矩阵 D

```
function D = D_matrix( n )
```

```
D=zeros(3*n+1);
```

```
for i=1:3*n
```

```
    D(i, i)=3;
```

```
end
```

```
D(3*n+1, 3*n+1)=n;
```

```
end
```

得到轮图 W_n 的电阻距离

%-----得到 轮图扩展图的大小-

```
n=input('输入图中的 n 值:')
```

%-----得到 A 矩阵-----

```
disp('得到矩阵 A:');
```

```
A= A_matrix(n)
```

%-----得到 D 矩阵-----

```
disp('得到矩阵 D:');
```

```
D= D_matrix(n)
```

%-----得到 L 矩阵-----

```
disp('得到矩阵 L:');
```

```
L=D-A
```

```
disp('得到矩阵 L 的逆矩阵 N:');
```

```
N=Pinv(L)
```

%-----得到 R 矩阵-----

```
disp('得到电阻距离矩阵 R:');
```

```
R=zeros(3*n+1);
```

```
for i=1:(3*n+1)
```

```
    for j=1:(3*n+1)
```

```
        R(i, j)=N(i, i)+N(j, j)-N(i, j)-N(j, i);
```

```
    end
```

```
end
```

```
R
```

%-----得到 Kirchhoff 指数-----

```
Kirchhoff=0;
```

```
disp('得到 Kirchhoff 指数:');
```

```
for i=1:(3*n+1)
```

```
    for j=1:(3*n+1)
```

```
        if(i<j)
```

```
            Kirchhoff=Kirchhoff+R(i, j);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
Kirchhoff
```

%-----得到电阻距离 r -----

```
i=input('输入顶点编号 i:');
j=input('输入顶点编号 j:');
disp('得到电阻距 r_ij 为:');
r=N(i, i)+N(j, j)-N(i, j)-N(j, i)
```

下面以图 $W_3(t)C_3$ 为例, 得到程序运行结果

输入图中的 n 值: 3

$n = 3$

得到矩阵 A :

$A =$

```
0 0 0 1 0 0 1 0 0 1
0 0 0 0 1 0 0 1 0 1
0 0 0 0 0 1 0 0 1 1
1 0 0 0 0 0 1 0 1 0
0 1 0 0 0 0 1 1 0 0
0 0 1 0 0 0 0 1 1 0
1 0 0 1 1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
0 0 1 1 0 1 0 0 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
```

得到矩阵 D :

$D =$

```
3 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 3 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 3 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 3 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 3 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 3 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 3 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 3 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 3 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 3
```

得到矩阵 L :

$L =$

```
3 0 0 -1 0 0 -1 0 0 -1
0 3 0 0 -1 0 0 -1 0 -1
0 0 3 0 0 -1 0 0 -1 -1
-1 0 0 3 0 0 -1 0 -1 0
0 -1 0 0 3 0 -1 -1 0 0
```

```
0 0 -1 0 0 3 0 -1 -1 0
-1 0 0 -1 -1 0 3 0 0 0
0 -1 0 0 -1 -1 0 3 0 0
0 0 -1 -1 0 -1 0 0 3 0
-1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 3
```

得到矩阵 L 的逆矩阵 N :

$N =$

```
0.3771 -0.0935 -0.0935 0.1006 -0.0759 -0.1347 0.1006 -0.1347 -0.0759 0.0300
-0.0935 0.3771 -0.0935 -0.1347 0.1006 -0.0759 -0.0759 0.1006 -0.1347 0.0300
-0.0935 -0.0935 0.3771 -0.0759 -0.1347 0.1006 -0.1347 -0.0759 0.1006 0.0300
0.1006 -0.1347 -0.0759 0.3771 -0.0935 -0.0935 0.0947 -0.1406 0.0359 -0.0700
-0.0759 0.1006 -0.1347 -0.0935 0.3771 -0.0935 0.0359 0.0947 -0.1406 -0.0700
-0.1347 -0.0759 0.1006 -0.0935 -0.0935 0.3771 -0.1406 0.0359 0.0947 -0.0700
0.1006 -0.0759 -0.1347 0.0947 0.0359 -0.1406 0.3771 -0.0935 -0.0935 -0.0700
-0.1347 0.1006 -0.0759 -0.1406 0.0947 0.0359 -0.0935 0.3771 -0.0935 -0.0700
-0.0759 -0.1347 0.1006 0.0359 -0.1406 0.0947 -0.0935 -0.0935 0.3771 -0.0700
0.0300 0.0300 0.0300 -0.0700 -0.0700 -0.0700 -0.0700 -0.0700 -0.0700 0.3300
```

得到电阻距离矩阵 R :

$R =$

```
0 0.9412 0.9412 0.5529 0.9059 1.0235 0.5529 1.0235 0.9059 0.6471
0.9412 0 0.9412 1.0235 0.5529 0.9059 0.9059 0.5529 1.0235 0.6471
0.9412 0.9412 0 0.9059 1.0235 0.5529 1.0235 0.9059 0.5529 0.6471
0.5529 1.0235 0.9059 0 0.9412 0.9412 0.5647 1.0353 0.6824 0.8471
0.9059 0.5529 1.0235 0.9412 0 0.9412 0.6824 0.5647 1.0353 0.8471
1.0235 0.9059 0.5529 0.9412 0.9412 0 1.0353 0.6824 0.5647 0.8471
0.5529 0.9059 1.0235 0.5647 0.6824 1.0353 0 0.9412 0.9412 0.8471
1.0235 0.5529 0.9059 1.0353 0.5647 0.6824 0.9412 0 0.9412 0.8471
0.9059 1.0235 0.5529 0.6824 1.0353 0.5647 0.9412 0.9412 0 0.8471
0.6471 0.6471 0.6471 0.8471 0.8471 0.8471 0.8471 0.8471 0.8471 0
```

得到 Kirchhoff 指数:

Kirchhoff =

37.2353

输入顶点编号 i : 5

$i = 5$

输入顶点编号 j : 2

$j = 2$

得到电阻距 r_{ij} 为:

$r =$

0.5529

(责任编辑: 张 勇)