浅谈线性代数中几类等价关系

兰州理工大学　杨　琳

摘　要：介绍线性代数中的三类等价关系，将这些概念提升到抽象代数中的等价关系，给出更一般的等价关系的概念，最后给出一些线性代数课程改革的方法。

关键词：矩阵　等价关系　相似关系　合同关系　课程改革

文章编号：ISSN2095-6711/Z01-2019-07-0059

DOI:10.16534/j.cnki.cn13-9000/g.2019.0496

线性代数是本科学生必修的一门重要基础理论课，是处理和解决工程技术中一些实际问题不可缺少的工具，是学习后续课程的重要基础。通过本课程的学习，学生对线性代数的基本概念、基本理论和基本方法要有较深入的理解，在此基础上具备初步应用线性代数的能力，为后续课程的学习奠定基础。通过线性代数中基本概念的建立、基本理论的证明、基本方法的运用，培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力。兰州理工大学线性代数课程为32课时，每周两小节，十六周节课。在这样短学时又长战线的学习过程中，要想讲好这门课，需要老师花心思设计安排上课的容。我们对于线性代数的讲授，最关键的是想让学生在思维方面的提升，让学生具有分析问题和解决问题的能力，这种能力对于学生后续学习起着至关重要作用。线性代数课程中的概念繁多，这就需要对概念进行梳理，让学生高效地学好这门课程。

线性代数中矩阵的等价关系、相似关系、合同关系极易混淆，很多文献在这几个概念上都有讨论。对矩阵上的这三个关系进行分析研究，分析这三者之间的从属关系以及联系，将联系提升到更一般的集合上。以下记实数上的 $m\times n$ 阶矩阵为 $M_{m\times n}(R)$，实数上的 $n\times n$ 阶矩阵为 $M_n(R)$。

一、线性代数中关于矩阵的三个等价关系

1. 矩阵的等价

定义1

设 $A,B\in M_{m\times n}(R)$，若 A 可经过有限次初等变换变成 B，则称 A 与 B 等价。

初等变换分为三类：交换矩阵的两行（列），矩阵的某行（列）乘以非零常数，矩阵的某行（列）的倍数加到另一行（列）。因为这三类初等变换都是可逆变换，所以容易验证：

A 等价于 A；

若 A 等价于 B，则 B 等价于 A；

若 A 等价于 B 且 B 等价于 C，则 A 等价于 C。

由初等变换与可逆矩阵之间的关系可知：A 等价于 B 当且仅当存在可逆矩阵 P,Q 满足 $A=PBQ$。

设 $A\in M_n(R)$，若存在矩阵 B 满足 $AB=BA=E_n$

则称矩阵 A 是可逆矩阵，并称 B 为 A 的逆。由逆的唯一性，将 A 的逆矩阵记为 A^{-1}。任意一个可逆矩阵 $A_{n\times n}$ 可以经过有限次初等变换变成单位阵 E_n。于是可逆矩阵等价于同阶的单位阵。进而由初等行（列）变换相当于给矩阵左（右）乘相应初等矩阵可知，任意可逆矩阵 A 可被分解成为以下形式：

$A=P_t\dots P_1EQ_1\dots Q_1=P_t\dots P_1Q_1\dots Q_s$

于是 $A^{-1}=Q_s^{-1}\dots Q_1^{-1}P_1^{-1}\dots P_t^{-1}$，所以 $Q_s^{-1}\dots Q_1^{-1}P_1^{-1}\dots P_t^{-1}(A\quad E)=(Q_s^{-1}\dots Q_1^{-1}P_1^{-1}\dots P_t^{-1}A\quad Q_s^{-1}\dots Q_1^{-1}P_1^{-1}\dots P_t^{-1})=(E\quad A^{-1})$

因此可以当 $(A\quad E)$ 经过初等行变换变成 $(E\quad B)$ 的时候，则 B 即为 A 的逆矩阵。所以矩阵的等价关系可以应用到求逆矩阵中。

2. 矩阵的相似

定义2

设 $A,B\in M_n(R)$，若存在可逆矩阵 P 使 $A=P^{-1}BP$，则称 A 与 B 相似。

由定义可知，若 A 与 B 相似，则 A 与 B 等价。相似要求左右两边的矩阵可逆，而等价只需左右两边矩阵是可逆矩阵即可。可以证明

A 相似于 A；（因为 $A=E_n^{-1}BE_n$，其中 E_n 表示 $n\times n$ 单位阵）

若 A 相似于 B，则 B 等价于 A；（因为 $A=P^{-1}BP\Rightarrow B=(P^{-1)}BP^{-1}$）

若 A 相似于 B 且 B 相似于 C，则 A 相似于 C。

（因为 $A=P^{-1}BP,B=Q^{-1}CQ\Rightarrow A=(QP^{-1)}C(QP)$）

设 $A\in M_n(R)$，若存在对角阵 $A\in M_n(R)$ 满足 A 与 A 等价，即 $A=P^{-1}\Lambda^nP$，于是 $A^n=P^{-1}\Lambda^nP$，于是可以将求 A 得幂次转化为对角矩阵的幂次，而对角矩阵的幂次为对角线元素取幂次，其余元素为0的矩阵，这种办法大大简化了计算。并且相似关系在线性变换中起着重要作用，可以刻画线性变化在不同基下所对应的矩阵之间的关系，对于研究线性变换是很好的工具。

3. 矩阵的合同

定义3

设 $A,B\in M_n(R)$，若存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^TBP$，其中 P^T 表示矩阵 P 的转置，则称 A 与 B 合同。

由定义可知，若 A 与 B 合同，则 A 与 B 等价。合同要求左右两边的矩阵可以并且是互为转置，而等价只需左右两边矩阵是可逆矩阵。容易验证：

A 合同于 A；（因为 $A=E_n^TBE_n$，其中 E_n 表示 $n\times n$ 单位阵）

若 A 合同于 B，则 B 合同于 A；

（因为 $A=P^TBP\Rightarrow B=(P^T)^{-1}BP^{-1}=(P^{-1})^TBP^{-1}$）

若 A 合同于 B 且 B 合同于 C，则 A 合同于 C。

（因为 $A=P^TBP,B=Q^TCQ\Rightarrow A=(QP)^TC(QP)$）

设 $A\in M_n(R)$，且 $A=A^T$，则矩阵 A 与对角矩阵合同。这

种合同关系可以处理二次型的标准型的问题。当矩阵 P 为正交矩阵时，$P^{-1}=P^{T}$，于是合同就和相似等价。但当矩阵不是正交矩阵时，合同与相似完全不同。

由上述三个定义可知，等价关系、相似关系和合同关系在从属关系比较明显。在实际中，等价关系在求逆矩阵中起到很大作用，相似关系在矩阵对角化中起决定作用，合同关系在处理二次型中很有用。这三种关系可以应用于不同的问题中。但从三者满足的（1）-（9）条中，可以总结出这三个矩阵关系都满足自反性，对称性和传递性。以下我们可以引出抽象代数中的二元等价关系。

二、抽象代数中的等价关系

设 S 是非空集合，若 ρ 是 $\{(x,y) \mid x\in S, y\in S\}$ 的子集，则称 ρ 是集合 S 上的二元关系。空集$\varnothing$也是二元关系，还有一种特殊的二元关系 $1_s=\{(x,y) \mid x\in S\}$ 称为恒等关系。

定义 4

设 S 是非空集合，若 ρ 是集合 S 上的二元关系：

若对于任意的 $s\in S$，均有 $s\rho s$，则称 ρ 具有反身性；

若对于任意的 $s,t\in S$，若 $s\rho t\Rightarrow t\rho s$，则称 ρ 具有对称性；

若对于任意的 $s,t,h\in S$，若 $s\rho t, t\rho s\Rightarrow s\rho h$ 则称 ρ 具有传递性。

定义 5

设 S 是非空集合，ρ 是集合 S 上的二元关系，若 ρ 具有反身性、反对称性、传递性，则 ρ 称为 S 上的等价关系。

矩阵集合的等价关系、相似关系、合同关系属于定义 5 等价关系。在 $M_n(R)$ 集合上，除几类等价关系还可构造以下关系，设 $A,B\in M_n(T)$：$A\rho B \Leftrightarrow (\exists X,Y\in M_n(R))\, A=BX, B=AY.$

$A\rho A$（因为 $A=AE_n$，其中 E_n 表示 $n\times n$ 单位阵）；

若 $A\rho B$，则 $B\rho A$（因为 $A=BX, B=AY\Rightarrow B=AY, A=BY$）；

若 $A\rho B, P\rho C\Rightarrow A\rho C$（因为：$A=BX, B=AY, B=CT, C=BS\Rightarrow A=C(TX), C=A(YS)$。

同样还可以构造其他 $M_n(R)$ 集合上的等价关系，有了这些关系就可以将矩阵集合按照一定的规律进行划分。

定义 6

设 $\pi=\{A_i \mid i\in I\}$ 是非空集合 S 的一组子集，若满足：

对于任意的 $i\in I$，A_i 是非空集合；

对于任意的 $i,j\in I$，$A_i=A_j$ 或者 $A_i\cap A_j=\varnothing$；

$\cup\{A_i \mid i\in I\}=S$，则称 $\pi=\{A_i \mid i\in I\}$ 是集合 S 的一个划分。

若 ρ 是集合 S 上的等价关系，则 $\Phi(\rho)=\{x\rho \mid x\in S\}$ 为 S 的一个划分。相反的，若 $\pi=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 S 的一个划分，则关系 $\Psi(\pi)=\{(x,y)\in S\times S \mid (\exists i\in I)x,y\in A_i\}$ 是集合 S 上的等价关系。若 ρ 是 S 上的等价关系，则 $\Psi(\Phi(\rho))$。若 π 是集合 S 上的划分，则 $\Phi(\Psi(\pi))=\pi$。即给定一个等价关系，相对应的就有一个相应的对于集合的划分，相反的，给定一个集合的分类，就可以定义一个等价关系，所以等价关系和分类是具有一一对应关系的。分类问题是代数学中的一个重要的研究对象。

利用这种等价关系的定义可以重新审视实数上的矩阵的等价关系，相似关系和合同关系都是对矩阵集合的分类，这种分类都是对应可以解决相应的线性代数中的具体问题的。

三、线代课程中的改革

由于线性代数中的定义之间的联系可以按照相关联的概念进行串联，各个分析理解，再进行归类分析，提取出共同的性质，利用归类的思想处理多种定义的问题，使学生在学习过程中学到归类以及举一反三的思想，为以后的专业课中的创新打下基础。在整个讲述过程中，对于偏文科的专业可以多做计算练习，从应用入手进行教学，而对于理工科学生在重视计算的同时，让学生要注意到等价关系所揭示的可由初等变化相互转化的理论依据，在以后的专业课中遇到类似问题可以想到利用矩阵解决。讲述合同关系式，偏文科生可以利用特征值和特征向量的正交化来计算合同矩阵，理工科的学生就得把合同关系应用到二次型的标准型的问题上。总之，这三种关系对于不同专业的学生，学习的广度与深度是有所区别的。在备课的过程中要充分考虑学生的专业以及学习背景，做到有针对性地讲授。

矩阵的三种关系可利用计算机中的 Matlab，Maple，Mathematics 等数学软件实现对于矩阵的等价、相似以及合同变换，更直观地看到矩阵的变换过程。学生在学习之前不会惧怕这些抽象的概念, 以引导的形式让学生自己提出问题，进而解决问题。让学生在课下自己先研究软件的实现，提高学生自学的能力，使学生在学习线性代数的同时提高自身的数学软件操作能力，为后续参加全国大学生数学建模打下良好的基础。兰州理工大学为学生提供了线上测试以及练习平台，这使学生可以随时随地练习和测试自己对于本课程的掌握程度，这些计算机的操作对理工科学生后续进行专业学习都是很有用的。

总之，我们可以利用分类教学、计算机协作以及测试方式与平台的创新使学生在学习过程中体会到数学的美，进一步为以后的专业学习提供坚实的支持，使学生在未来的路上越走越好。

参考文献：

[1]田振际，黄灿云.线性代数[M].北京：科学出版社，2017

[2]孙晓霞.论等价关系在线性代数学习中的重要性[J].教育教学论坛，2016

[3]李　斐，郭　卉.线性代数中的几个等价关系[J].课程教育研究，2013

作者简介：杨琳（1986—），女，汉族，陕西咸阳人，兰州理工大学讲师，研究方向：代数