

# 高速数控加工中 NURBS 曲线 拟合及插补技术的研究

杨 萍 杨明泰 张阳阳

兰州理工大学,兰州,730050

**摘要:**通过分析现代数控系统中自由曲面插补算法的特点,提出了基于最小二乘法的 NURBS 曲线拟合算法和基于弧长参数补偿的 NURBS 插补技术。采用最小二乘法拟合 NURBS 曲线,能获得光滑的刀具加工路径,并且在一定范围内能复原曲线的设计轮廓。参数补偿的 NURBS 插补方法,以泰勒展开法得到的插补参数作为临时插补点,利用该插补法能显著减小速度波动,可将速度控制在理想的范围内,可进一步提高加工精度并减小数控机床的振动。仿真实验表明:该算法简明高效、易于实现,能够满足现代数控系统的要求。

**关键词:**CNC;NURBS 曲线;最小二乘法;参数补偿

中图分类号:TH166;TP65

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2015.12.012

## Research on Technologies of NURBS Curve Fitting and Interpolation in High Speed NC Machining

Yang Ping Yang Mingtai Zhang Yangyang

Lanzhou University of Technology, Lanzhou, 730050

**Abstract:** The algorithm of NURBS curve fitting was put forward based on least square method, and the NURBS interpolation technology based on arc length parameter compensation. By the analyses of characteristics of the free surface interpolation algorithm of modern CNC system, NURBS curve fitted with least square method could achieve a smooth tool path and reconstruct designed outline curves to some extents. The NURBS method of parameter compensation, which used interpolation parameters to be temporary interpolation points obtained by the Taylor expansion method, was applied to ensure that the speed rate fluctuations could be decreased effectively, and that the speed was controlled within the ideal range, and that the process precision was further improved, and that the vibration of machine was reduced. The simulation results show that the algorithm is simple and efficient, and easy to be implemented, which can satisfy the demands of modern CNC system.

**Key words:** CNC; NURBS curve; least square method; parameter compensation

## 0 引言

随着制造业的快速发展,超高速、高精度、高柔性的加工技术已成为现代数控加工领域新的研究方向。传统的计算机数控(computer numerical control, CNC)系统在加工自由曲面时,主要采用直线或圆弧插补方式,由 CAM 系统进行离线编程,再将参数曲线离散成许多直线段或圆弧段构成的程序传输到 CNC 系统完成插补,采用这种插补方式势必会降低零件的加工精度和表面质量,也限制了数控系统的加工效率<sup>[1-2]</sup>。另外,用小线段拟合刀具的轨迹本身就会导致加工表面不光滑且插补误差难以控制,在加工过程中刀具频繁的加减速使得机床的稳定性大大降低,进而加剧了刀具的磨损。现代数控加工中可以将自由曲面的参数直接传输到 CNC 系统中,不再分割成若干小线段或圆弧段,从而使 CAD/CAM/CNC 之间保持完整的参数信息流。当前 NURBS 直接插补算法已成为高速、高精度加工的研究热点<sup>[3]</sup>。

国内外学者对 NURBS 曲面插补技术作了许多研究,例如: Nam 等<sup>[4]</sup>提出了实时控制加加速度,使加速度控制在约束范围内的插补算法。Shiuh 等<sup>[5]</sup>提出了自动调节进给速度的限定弓高误差的 NURBS 插补算法。Shpitalni 等<sup>[6]</sup>和 Yang 等<sup>[7]</sup>提出用泰勒展开式一阶与二阶近似的方式获取 NURBS 插补数据,从而进一步减小速度的波动。Park 等<sup>[8]</sup>提出了一种分阶段的方式来处理 NURBS 插补算法。周红梅等<sup>[9]</sup>提出了自适应选择节点数量的 NURBS 拟合算法,该算法是通过曲率的信息来确定节点数的,最后通过 de Boor 迭代法来获取控制点。本文在前人的研究基础之上提出了基于最小二乘的 NURBS 样条拟合算法,使得拟合后的曲线具有较高的精度指标,进而,针对更高精度的需求,提出了基于弧长参数补偿的 NURBS 插补技术。

## 1 NURBS 曲面上曲线的数学表达式

一条  $k$  次 NURBS 曲线可以表示为一段有理多项式矢函数:

收稿日期:2014-07-24

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i D_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(u)} \quad a \leq u \leq b \quad (1)$$

式中,  $u$  为 NURBS 曲线的自变量;  $D_i$  为控制顶点 ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ),  $D_i$  顺序连接成控制多边形;  $\omega_i$  为权因子, 分别与控制顶点相对应,  $\omega_n > 0$ , 其余  $\omega_i \geq 0$ , 且权因子不同时为零(由此可保留凸包性质和防止分母为零);  $N_{i,k}(u)$  是定义在非周期节点矢量  $U$  上的  $k$  次 B 样条基函数,  $U = (u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1})$ 。

一条 NURBS 曲线由控制点、节点矢量、权因子和基函数的次数 4 个参数来决定。

## 2 最小二乘法的 NURBS 曲线拟合算法

对刀具轨迹生成时获得的离散刀位点进行 NURBS 曲线的最小二乘法拟合, 拟合过程中, 误差界限  $E$  应和曲线曲面的拟合数据同时被输入。要达到预期的精度  $E$ , 我们无法确知需要多少个控制点来完成, 因此, 这种拟合问题需要通过迭代来实现。为了避免涉及非线性问题, 一般取权因子  $\omega = 1$ , 不论是曲线曲面逼近还是插值问题中, 都要保证曲线的始末点与样条曲线重合, 即  $C(\tilde{u}_0) = D_0 = Q_0, C(\tilde{u}_m) = D_m = Q_m, m = 1, 2, \dots, n-1$ 。其余数据点  $Q_j (j = 1, 2, \dots, m-1)$  在最小二乘法下逼近, 即目标函数为

$$\min f = \sum_{j=1}^{m-1} |Q_j - C(\tilde{u}_j)|^2 \quad (2)$$

其中,  $\tilde{u}_j$  是预先计算好的参数值。

一般用最小二乘法逼近的曲线不能精确地通过数据点  $Q_j$ , 且  $C(\tilde{u}_j)$  不是曲线上与点  $Q_j$  最近的点。令

$$R_j = Q_j - N_{0,k}(\tilde{u}_j)Q_0 - N_{n,k}(\tilde{u}_j)Q_m \quad (3)$$

将参数值  $\tilde{u}_j$  及式(3)代入式(2), 有

$$f = \sum_{j=1}^{m-1} [R_j R_j^T + \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,k}(\tilde{u}_j)(R_j D_i + (\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,k}(\tilde{u}_j)D_i)(\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,k}(\tilde{u}_j)D_i))] \quad (4)$$

应用标准的线性最小二乘拟合技术, 欲使目标函数  $f$  最小, 应令  $f$  关于  $n-1$  个未知控制点  $D_l (l = 1, 2, \dots, n-1)$  的偏导数都等于零。它的第  $l$  个偏导为

$$\frac{\partial f}{\partial D_l} = \sum_{j=1}^{m-1} (-2N_{l,k}(\tilde{u}_j)R_j + 2N_{l,k}(\tilde{u}_j) \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,k}(\tilde{u}_j)D_i) \quad (5)$$

即

$$-\sum_{j=1}^{m-1} N_{l,k}(\tilde{u}_j)R_j + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} N_{l,k}(\tilde{u}_j)N_{i,k}(\tilde{u}_j)D_i = 0 \quad (6)$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{j=1}^{m-1} N_{l,k}(\tilde{u}_j)N_{i,k}(\tilde{u}_j))D_i = \sum_{j=1}^{m-1} N_{l,k}(\tilde{u}_j)R_j \quad (7)$$

式(7)是一个控制点  $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$  为未知量的线性方程。让  $l = 1, 2, \dots, n-1$ , 则得到含  $n-1$  个该未知量的  $n-1$  个方程的方程组, 写成矩阵形式为

$$(N^T N)D = R \quad (8)$$

其中,  $N$  是  $(m-1) \times (n-1)$  矩阵:

$$N = \begin{bmatrix} N_{1,k}(\tilde{u}_1) & N_{2,k}(\tilde{u}_1) & \dots & N_{n-1,k}(\tilde{u}_1) \\ N_{1,k}(\tilde{u}_2) & N_{2,k}(\tilde{u}_2) & \dots & N_{n-1,k}(\tilde{u}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_{1,k}(\tilde{u}_{m-1}) & N_{2,k}(\tilde{u}_{m-1}) & \dots & N_{n-1,k}(\tilde{u}_{m-1}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$R$  和  $D$  分别为

$$R = \begin{bmatrix} N_{1,k}(\tilde{u}_1)R_1 + N_{1,k}(\tilde{u}_2)R_2 + \dots + N_{1,k}(\tilde{u}_{m-1})R_{m-1} \\ N_{2,k}(\tilde{u}_1)R_1 + N_{2,k}(\tilde{u}_2)R_2 + \dots + N_{2,k}(\tilde{u}_{m-1})R_{m-1} \\ \vdots \\ N_{n-1,k}(\tilde{u}_1)R_1 + N_{n-1,k}(\tilde{u}_2)R_2 + \dots + N_{n-1,k}(\tilde{u}_{m-1})R_{m-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$D = [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_{n-1}]^T$$

式(8)中的矩阵  $(N^T N)$  是正定的, 可以用高斯消元法来求解控制点。在规定精度范围内的曲线逼近, 控制点的个数选取决定着曲线的最优程度, 一般用  $k+1$  个控制点(这里是最少的)作为迭代的开始, 用式(3)、式(8)和式(10)对数据点进行拟合得到一条逼近曲线, 每次拟合之后可以根据最大模偏差公式检查曲线偏差是否小于逼近误差  $E$ , 直至满足设定的逼近误差  $E$ 。当刀位点数与控制点数相等时, 逼近误差  $E = 0$ 。最大模偏差公式为

$$\max_{0 \leq j \leq m} \min_{0 \leq u \leq 1} |Q_j - C(u)| \quad (11)$$

本文对离散刀位点进行最小二乘拟合, 对数据点进行了仿真实验。图 1 结果表明, 使用最小二乘法的 NURBS 曲线拟合方法原理简明, 易于实现, 并且具有很高的拟合精度, 与其他拟合方法相较有明显的优势。

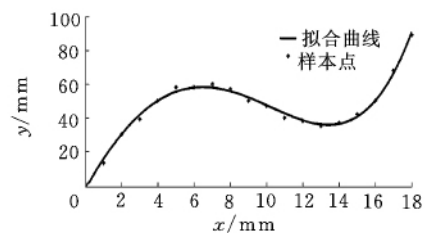


图 1 NURBS 曲线的最小二乘拟合

## 3 基于弧长参数补偿的 NURBS 插补技术

### 3.1 预处理及误差分析

NURBS 曲线的插补预处理是进行实时插补的关键,本文中 NURBS 曲线轨迹用矩阵的形式表示,采用矩阵方式避免了插补过程中基函数的重复递推,从而减少了插补过程中的繁琐运算量,可在很大程度上提高零件的加工速度。一般取三次 NURBS 曲线作为研究对象,曲线矩阵相乘的表达形式为  $C(\tilde{u}) = tMD$ 。设权因子  $\omega = 1$ ,对于首末两节点重复的节点矢量,其次数可取为  $k + 1$ ,也就是矩阵  $U$  是节点分量构成的 4 阶常数矩阵。有 4 个控制点  $D_i$  与权因子  $\omega_j (j = i - 3, i - 2, i - 1, i)$  相对应。在每个节点区间内,  $MD$  相乘是一个常数矩阵,在相应的区间内保持乘积不变,对插补点的参数坐标没有任何影响。将 NURBS 曲线的有理多项式的矢函数写成矩阵的形式为<sup>[10]</sup>

$$C_i(u) = \frac{[1 \ t \ t^2 \ t^3]M_i \begin{bmatrix} \omega_i D_i \\ \omega_{i+1} D_{i+1} \\ \omega_{i+2} D_{i+2} \\ \omega_{i+3} D_{i+3} \end{bmatrix}}{[1 \ t \ t^2 \ t^3]M_i \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_{i+1} \\ \omega_{i+2} \\ \omega_{i+3} \end{bmatrix}} \quad (12)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n - 3$   
 $u \in [u_i, u_{i+1}]$

$$t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \in [0, 1]$$

令

$$T_i^{(1)} = u_{i+1} - u_i$$

$$T_i^{(2)} = u_{i+2} - u_i$$

$$T_i^{(3)} = u_{i+3} - u_i$$

特别地,  $T_0^{(0)} = 0$ ,则系数矩阵  $M$  在第  $i$  个区间的表达式可以表示为

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(T_i^{(1)})^2}{T_{i-1}^{(2)} T_{i-1}^{(3)}} - 1 - \frac{(T_i^{(1)})^2}{T_{i-1}^{(2)} T_{i-1}^{(3)}} & \frac{(T_{i-1}^{(1)})^2}{T_{i-1}^{(2)} T_{i-1}^{(3)}} & 0 \\ -3m_{11} & 3m_{11} - m_{23} & \frac{3T_i^{(1)} T_{i-1}^{(1)}}{T_{i-1}^{(2)} T_{i-1}^{(3)}} & 0 \\ 3m_{11} & -3m_{11} + m_{33} & \frac{(T_{i-1}^{(1)})^2}{T_{i-1}^{(2)} T_{i-1}^{(3)}} & 0 \\ -m_{11} & m_{11} - m_{43} - m_{44} & -\left(\frac{m_{33}}{3} + m_{44} + \frac{(T_i^{(1)})^2}{T_{i-1}^{(2)} T_{i-1}^{(3)}}\right) & \frac{(T_i^{(1)})^2}{T_{i-1}^{(2)} T_{i-1}^{(3)}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

在插补过程中,要想得到较高插补精度,必须

满足插补速度平稳、速度波动小的要求,即插补时的合成实际速度要与给定的进给速度相一致,本文将进给速度与轮廓误差作为插补好坏的评价标准。在 NURBS 曲线插补过程中,通常利用插补点的曲率来计算参数  $u_i$  处的轮廓误差  $E_i$ 。

图 2 是用一段圆弧近似地表示在区间  $u \in [u_i, u_{i+1}]$  内的 NURBS 曲线,  $\rho_i$  为曲率半径,且  $\rho_i = 1/K_i$ ,插补周期为  $T$ ,并令  $L_i = \|C(u_{i+1}) - C(u_i)\|$ ,进给速度为  $v(u_i)$ ,通过几何关系可以求出轮廓误差:

$$E_i = \rho_i - \sqrt{\rho_i^2 - \left(\frac{L_i}{2}\right)^2} = \rho_i - \sqrt{\rho_i^2 - \left(\frac{v(u_i)T}{2}\right)^2} \quad (14)$$

其中该点的曲率半径计算如下:

$$\rho_i = \frac{1}{K_i} = \frac{\| \frac{dC(u)}{du} \|_{u=u_i}^3}{\| \frac{dC(u)}{du} \frac{d^2C(u)}{du^2} \|_{u=u_i}} \quad (15)$$

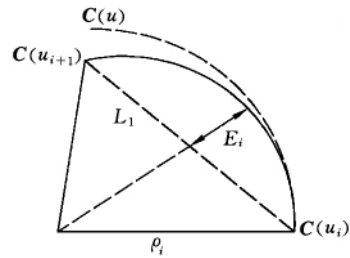


图 2 误差求解几何关系

假设加工过程中要求最高轮廓误差为  $\delta$ ,则在要求误差下的进给速度为

$$v(u_i) = 2 \sqrt{\rho_i^2 - (\rho_i - E_{\max})^2} / T \quad (16)$$

如果  $E_i$  满足  $E_i \leq \delta$ ,插补计算过程将继续进行下一个点的插补计算;如果  $E_i$  满足  $E_i > \delta$ ,插补过程将会调整插补进给速度  $v(u_i)$ ,返回当前插补点,按调整后的进给速度重新进行下一个点的插补计算。在 NURBS 曲线插补过程中,可以通过调整进给速度来调节规定范围内的加工精度。

### 3.2 实时插补算法

传统的 NURBS 插补技术常用的是泰勒展开法,这种方法难以满足以弧长为参数的插补,并且 NURBS 插补过程中计算复杂,速度不能平滑过渡,为了能够满足插补过程中计算量小的要求,并实现高精度的快速实时插补,笔者提出了基于弧长参数补偿的 NURBS 插补技术。其方法是以泰勒展开法得到的插补参数作为临时插补点,对临时插补点进行参数补偿,以确保原曲线弧长为插补参数。假设空间参数曲线为  $C(u) = x(u)i + y(u)j + z(u)k$ ,  $u$  是曲线参数。则插补进给速度  $v(u_i)$ ,可以表达为

$$v(u_i) = \frac{dC(u)}{dt} = \frac{dC(u)}{du} \frac{du}{dt} \quad (17)$$

可以进一步推导求得：

$$\frac{du}{dt} = \frac{v(u_i)}{\frac{dC(u)}{du}} \quad (18)$$

变量  $u$  在  $u = u_i$  处的一阶泰勒展开式为

$$u_{i+1} = u_i + \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_i} T_s + R(u) \quad (19)$$

式中,  $T_s$  为插补周期;  $R(u)$  为误差余量。

则有

$$u_{i+1} \approx u_i + \frac{v(u_i) T_s}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} \quad (20)$$

式(20) 是通过一阶泰勒展开方法得到的下一个插补点的求解式。若  $t_i$  在所在领域内二阶导数是连续的, 此时可以求其二阶导数:

$$\left. \frac{d^2 u}{dt^2} \right|_{t=t_i} = - \frac{v^2(u_i)}{\left\| \frac{dC(u)}{du} \right\|_{u=u_i}^4} \left( \left. \frac{dC(u)}{du} \right|_{u=u_i} \frac{d^2 u}{dt^2} \right) \quad (21)$$

变量  $u$  在  $u = u_i$  处的二阶泰勒展开式为

$$u_{i+1} = u_i + \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_i} T_s + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 u}{dt^2} \right|_{t=t_i} T_s^2 + R(u) \quad (22)$$

则有

$$u_{i+1} \approx u_i + \frac{v(u_i) T_s}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} - \frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'')(v(u_i) T_s)^2}{2[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2]^2} \quad (23)$$

式(21) 是通过二阶泰勒展开方法得到的下一个插补点的求解式。

从得到的一阶、二阶泰勒展开式可以看出泰勒展开法的本质也是弧长与参数的关系, 但是泰勒展开式中省略了误差余量, 导致了弧长与参数的关系式表达不完全精确。可以用基于弧长参数补偿的 NURBS 插补技术来完善这个问题, 具体操作步骤是根据插补点的位置坐标、一阶导数、二阶导数三者之间的关系, 在插补的前一个点和临时插补点之间建立弧长与参数的三次多项式或更高次多项式, 使得插补以弧长为基准。

NURBS 曲线参数  $u$  与弧长  $S$  的三次多项式可表达为:  $u = a + bS + cS^2 + dS^3$ , 进行参数插补的前提是计算临时参数值, 以一阶泰勒插补为起点:

$$u_{i+1} = u'_{i+1} + \Delta(u_i) \quad (24)$$

其中,  $\Delta(u_i)$  为补偿值,  $u'_{i+1}$  为临时参数值(通过一阶泰勒展开法得到), 在位置  $C(u)$  与  $C(u'_{i+1})$  之间建立三次多项式, 以弧长为自变量, 参数  $u$  为因变量。此时根据两个导数和两个位置等式组成的方程组来求解。其中,  $u'(S) = 1/C'(u)$ , 为使计算过程简单, 弧长可以用弦长代替, 即  $L_i = \|C(u_i) -$

$C(u'_{i+1})\|$ , 由此可建立三次多项式来求解  $a, b, c$  和  $d$  4 个参数。建立的方程可用矩阵表示:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ \left. \frac{du}{dL} \right|_{L=0} \\ u'_{i+1} \\ \left. \frac{du}{dL} \right|_{L=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (25)$$

式(25) 可简写为

$$\delta = \phi \cdot \varphi$$

由此可得系数矩阵  $\phi$  有唯一解  $\varphi = \phi^{-1} \cdot \delta$ 。

假设插补进给速度为  $v(u_i)$ , 插补周期内的位移  $S_i = v(u_i) T_s$ , 则参数  $u_{i+1}$  计算式为

$$u_{i+1} = aS_i^3 + bS_i^2 + cS_i + d \quad (26)$$

结合式(25) 就可求解出  $a, b, c, d$  4 个系数。弧长与参数的五次多项式也可以用同样的方法求解。

#### 4 仿真结果与性能分析

为了验证本文所提出算法的有效性和正确性, 采用 MATLAB 对空间 NURBS 曲线进行仿真计算。由于进给速度波动率是评价插补性能的关键因素之一, 因此主要对插补过程中的进给速度波动进行仿真计算。空间 NURBS 曲线的参数如下: 空间曲线的次数为 3, 控制点为 (0, 0, 0)、(3.5, 12, 2)、(12, 22.5, 6)、(17, 18.5, 8)、(19, 9.75, 9)、(25, 12, 10.25)、(30, 21, 12)、(38, 11.75, 14)、(45, 0, 11) (单位为 mm), 节点矢量 (0, 0, 0, 0, 1/7, 2/7, 3/7, 4.1/7, 5/7, 5/7, 1, 1, 1, 1) (mm), 权重 (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), 进给速度  $v_s = 63$  mm/s, 不考虑加减速, 插补周期  $T_s = 1.8$  ms, 空间 NURBS 曲线如图 3 所示。

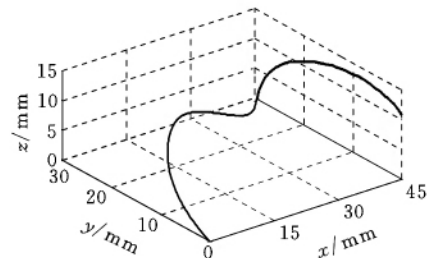


图 3 空间 NURBS 曲线

插补方法采用一阶、二阶泰勒展开法, 以及三次、五次多项式的参数补偿插补法。速度波动计算公式为

$$\delta_i = 1 - \frac{\|C(u_{i+1}) - C(u_i)\|}{T_s v_s} \quad (27)$$

通过分析对比仿真结果(图 4 ~ 图 7) 可以得出以下结论: ① 参数补偿插补方法与泰勒插补方法相比较, 参数补偿插补方法能显著减小速度波动, 能使速度控制在理想的范围内, 可进一步提高

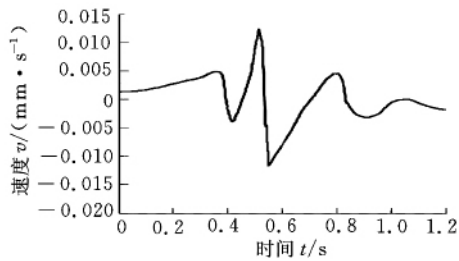


图4 一阶泰勒方法速度波动图

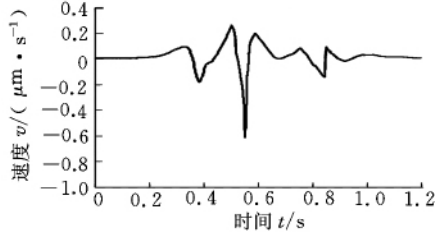


图5 二阶泰勒方法速度波动图

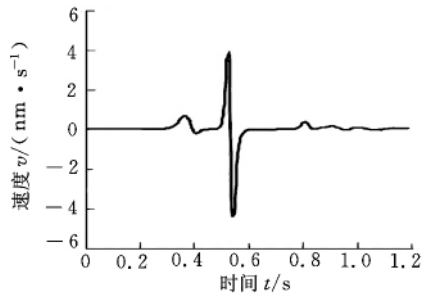


图6 三次多项式补偿速度波动曲线

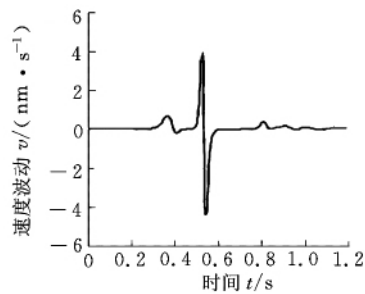


图7 五次多项式补偿速度波动曲线

加工精度和减小数控机床的振动。②根据仿真数据可以分析得出参数的补偿有可能是负值或者是正值,在曲率比较大的地方为了减小速度的波动可以提高速度。

#### 参考文献:

- [1] 梁宏滨,王永章,李霞.自动调节进给速度的NURBS插补算法的研究与实现[J].计算机集成制造系统,2006,12(3):428-433.  
Liang Hongbing, Wang Yongzhang, Li Xia. Research and Implementation of NURBS Interpolation Algorithm for Adaptive Feed Speed[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2006, 12(3): 428-433.
- [2] Cheng M Y, Tsai M C, Kuo J C. Real-time NURBS

Command Generators for CNC Servo Controllers[J]. Machine Tools & Manufacture, 2002, 42(7): 801-813.

- [3] 刘宇,赵波,戴丽,等.基于传动系统动力学的NURBS曲线插补算法[J].机械工程学报,2009,45(12):187-191.  
Liu Yu, Zhao Bo, Dai Li. Feedrate System Dynamics Based Interpolator for NURBS Curve[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(12): 187-197.
- [4] Nam S H, Yang M Y. A Study on a Generalized Parametric Interpolator with Real-time Jerk-limited Acceleration[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(1): 27-36.
- [5] Shih S, Hsu P L. Adaptive-feedrate Interpolation for Parametric Curves with a Confined Chord Error[J]. Computer-aided Design, 2002, 34(3): 229-237.
- [6] Shpitalni M, Koren Y, Lo C C. Real-time Curve Interpolators[J]. Computer-Aided Design, 1994, 26(11): 832-838.
- [7] Yang D C H, Kong T. Parametric Interpolator Versus Linear Interpolator for Precision CNC Machining[J]. Computer-Aided Design, 1994, 26(3): 225-234.
- [8] Park J, Nam S, Yang M. Development of a Real-time Trajectory Generator for NURBS Interpolation Based on the Two-stage Interpolation Method[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2005, 26(4): 359-365.
- [9] 周红梅,王燕铭,刘志刚,等.基于最少控制点的非均匀有理B样条曲线拟合[J].西安交通大学学报,2008,42(1):73-77.  
Zhou Hongmei, Wang Yanming, Liu Zhigang, et al. Non-Uniform Rational B-splines Curve Fitting Based on the Least Control Points[J]. Journal of Xian Jiaotong University, 2008, 42(1): 73-77.
- [10] 游有鹏,王珉,朱剑英. NURBS曲线高速高精度加工的插补控制[J].计算机辅助设计与图形学学报,2001,13(10):943-947.  
You Youpeng, Wang Min, Zhu Jianying. An Interpolator for NURBS Curve Machining with High-speed and Accuracy[J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 2001, 13(10): 943-947.

(编辑 卢湘帆)

作者简介:杨萍,女,1964年生。兰州理工大学机电工程学院教授。研究方向为CAD/CAM一体化、虚拟设计、工业机器人。已发表论文60余篇。杨明泰,男,1986年生。兰州理工大学机电工程学院硕士研究生。张阳阳,男,1988年生。兰州理工大学机电工程学院硕士研究生。