

DOI: 10.7511/jslx20171114004

# 人行荷载下梁式结构振动分析的DQ-IQ混合法

张琼<sup>\*1</sup>, 南娜娜<sup>1</sup>, 朱前坤<sup>1,2</sup>, 杜永峰<sup>1</sup>

(1. 兰州理工大学 防震减灾研究所, 兰州 730050; 2. 大连理工大学 建设工程学部, 大连 116024)

**摘要:**为了评估人行荷载作用下梁式结构的振动舒适度,利用微分求积-积分求积,即DQ-IQ混合法求解移动荷载作用下梁的振动响应。人行荷载作用下梁式结构的振动控制方程是含Dirac函数的偏微分方程,首先利用IQ法离散与时间相关的Dirac函数,再利用DQ法把控制方程转化为二阶常系数微分方程,最后利用Newmark算法求解微分方程。以某钢结构连廊为例,利用DQ法计算结构自振频率并与解析解进行对比,结果验证了节点选取和边界条件施加的合理性,再利用DQ-IQ混合法和振型叠加法分别计算了不同行走步频下连廊的响应,计算结果表明,DQ-IQ混合法具有较高的可靠性和精确性。DQ-IQ混合法也可以推广到诸如车辆荷载作用下路面或桥梁的动力响应等其他移动荷载下结构的振动分析。

**关键词:**梁式结构; Dirac函数; 偏微分方程; DQ-IQ混合法

中图分类号: TU311; O327

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2019)02-0166-07

## 1 引言

近年来,由于高强材料的广泛应用、施工技术的进步以及建筑功能的需求,人行桥、空中连廊和楼梯等过人梁式结构不断向轻质、低频和细长的方向发展,结构的自振频率不断降低,阻尼不断减小,从而对人行荷载更加敏感,更易发生人致振动问题<sup>[1,2]</sup>。

人行荷载作用下梁式结构的控制方程是含Dirac函数的偏微分方程<sup>[3,4]</sup>,过人梁式结构用分布参数体系的Euler-Bernoulli梁描述,人行荷载用含Dirac函数的傅里叶级数描述。通常用振型叠加法求解该偏微分方程<sup>[4-8]</sup>,采用振型叠加法,可将含Dirac函数的偏微分方程转换为以振型坐标为变量的各个独立的单自由度体系运动方程。Živanovič等<sup>[5]</sup>利用振型叠加法,并基于概率的方法定量评估了单人通过轻柔人行桥的振动舒适度。朱前坤等<sup>[4]</sup>在Živanovič研究的基础上评估了单人不同行走步速下通过轻柔人行桥的振动舒适度。Venuti等<sup>[6]</sup>基于社会力模型模拟出人群流动,利用振型叠加法分析了人群作用下人行桥的竖向振动情况。以上研究只考虑了结构一阶振型的影响。对于有些轻柔结构,只考虑一阶振型得到的结果往往不够

精确,Živanovič等<sup>[7]</sup>利用振型叠加法,分析了前五阶振型对人行桥人致振动的影响。李红利等<sup>[8]</sup>利用振型叠加法,考虑人行桥前两阶振型的影响,分析了随机人行荷载下人行桥的振动情况。可以看出,振型叠加法在叠加过程中通常只考虑有限个低阶振型的贡献,舍弃了高阶振型的影响。

微分求积DQ法是由Bellman等<sup>[9]</sup>提出的一种求解微分方程的全域逼近数值方法,其基本思想是以全域内各节点函数值的加权和来逼近函数偏导数在某一节点处的值。在工程技术领域,DQ法多用于解决与时间无关的问题,如结构静力、模态以及稳定性分析等问题<sup>[10-12]</sup>。对于与时间相关的初值问题,Fung<sup>[13]</sup>采用DQ法求解时域微分方程时,发展了一种新型的适用于线弹性结构单频波激励情形初始条件处理方法,提出了一类时间积分节点划分模式。李莹等<sup>[14]</sup>采用DQ法对移动周期荷载作用下孔隙热弹性地基动力学控制方程进行空间和时间离散,并求解其动力响应。廖旭等<sup>[15]</sup>针对结构弹塑性地震反应分析的特点,采用了一种新型的不等距的时间网格,并在新的网格上实施DQ算法,求解出结构弹塑性地震响应。以上研究显示,利用DQ法解决与时间相关的初边值问题时,同样具有精度高、收敛性好和计算效率高等特点。尽管DQ法具有以上优势,但在处理诸如人行荷载下梁振动等含有与时间相关Dirac函数的偏微分方程时,由于Dirac函数的奇异性而变得有些困

收稿日期:2017-11-14;修改稿收到日期:2018-04-22.

基金项目:国家自然科学基金(51868046;51508257);甘肃省高等学校科研项目(2015B-34)资助项目.

作者简介:张琼\*(1984-),女,硕士,讲师  
(E-mail:283322638@qq.com).

难。更重要的是,Dirac函数的属性是以积分形式表现,而不是微分形式,导致无法直接利用DQ法离散含Dirac函数的偏微分方程。为了克服以上困难,Eftekhari等<sup>[16]</sup>提出了利用DQ法和有限元法混合计算矩形板在移动荷载下的强迫振动;而后又提出了利用正则化的光滑函数代替Dirac函数<sup>[17]</sup>,再利用DQ法离散偏微分方程求解了欧拉梁在移动荷载下的动力响应。上述方法要么需要正则化Dirac函数,要么需要投影Heaviside函数替代Dirac函数,求解过程存在数值不稳定性的现象。Eftekhari<sup>[18]</sup>提出综合利用DQ法和IQ法,研究梁和矩形板在集中荷载作用下的受迫振动问题,该方法用IQ法离散Dirac函数,利用DQ法离散偏微分方程,数值计算结果显示出较高的精度与效率,但该方法所分析的集中荷载是定点荷载,不是移动荷载,Dirac函数与时间无关。

本文在以上研究的基础上,提出利用DQ-IQ混合法求解人行荷载作用下梁式结构振动含有与时间相关Dirac函数的偏微分控制方程。利用IQ法能够非常灵活地直接离散与时间相关的Dirac函数;不同于振型叠加法需事先假定振型函数,且通常只考虑低阶振型的贡献,混合法利用DQ法把控制方程转化为二阶常系数微分方程,不需事先假定振型函数,且能够考虑高阶振型的影响,最后利用Newmark算法求解即可得到偏微分方程的数值解。以某钢结构连廊为例,用DQ法计算结构的自振频率,并与解析解进行对比,结果验证了节点选取和边界条件施加的精确性,再分别利用DQ-IQ混合法和振型叠加法计算不同行走步频下连廊的响应,验证DQ-IQ混合法的可靠性和精确性。

## 2 人行荷载下梁式结构的振动控制方程

图1所示为受到人行荷载作用的简支梁。对于长细比较大的梁,假定为均匀截面Euler-Bernoulli简支梁,忽略剪切与扭转的影响。其中 $L$ 为梁的跨度, $\rho A$ 为单位长度梁的质量, $c$ 为梁的黏滞

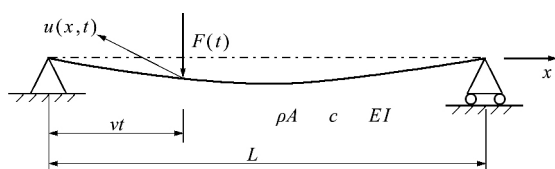


图1 受到人行荷载作用的简支梁  
Fig. 1 Simply supported beam under pedestrian load

阻尼系数, $I$ 为横截面的惯性矩, $E$ 为材料的弹性模量。

### 2.1 人行荷载下梁的振动基本方程

假定行人以步速 $v$ 匀速通过均质Euler-Bernoulli梁,则人行荷载下梁的振动控制方程为<sup>[3,4]</sup>

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \delta(x-vt)F(t) \quad (1)$$

式中 $u(x,t)$ 为梁的位移, $v$ 为行人步速,一般可取0.9倍的步频, $\delta(x-vt)$ 为Dirac函数,具有以下性质

$$\delta(x-vt) = 0, x \neq vt \quad (2)$$

$$\int_0^L \delta(x-vt) dx = 1 \quad (3)$$

$$\int_0^L f(x)\delta(x-vt) dx = f(vt) \quad (4)$$

式中 $f(x)$ 可以是任意函数。

式(1)中 $F(t)$ 为行人荷载,可以展开成傅立叶级数的形式<sup>[19]</sup>:

$$F(t) = G + G \sum_i \alpha_i \sin(2\pi i f_p t - \theta_i) \quad (5)$$

式中 $G$ 为行人体重,一般取750 N, $\alpha_i$ 为动载因子, $f_p$ 为行走步频, $\theta_i$ 为相位角,一般取0, $i$ 为计算采用的谐波项数。动载因子一般取前三阶,可表示为

$$\alpha_1 = -0.27 f_p^3 + 1.32 f_p^2 - 1.76 f_p + 0.76 \quad (6a)$$

$$\alpha_2 = 0.07, \alpha_3 = 0.06 \quad (6b, 6c)$$

引入如下无量纲量:

$$\begin{cases} X = \frac{x}{L}, X_F(t) = \frac{vt}{L} \\ \alpha = \frac{\rho A L^4}{EI}, \beta = \frac{c L^4}{EI}, \lambda = \frac{F(t) L^3}{EI} \end{cases} \quad (7)$$

则式(1)变换为

$$\alpha \frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u(X,t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(X,t)}{\partial X^4} = \lambda \delta[X - X_F(t)] \quad (8)$$

### 2.2 边界条件

简支梁两端铰接,其边界条件为,在 $X=0$ 处,位移和弯矩为0,即

$$u(0,t) = 0, \partial^2 u(0,t) / \partial X^2 = 0 \quad (9)$$

在 $X=1$ 处,位移和弯矩为0,即

$$u(1,t) = 0, \partial^2 u(1,t) / \partial X^2 = 0 \quad (10)$$

## 3 控制方程的离散化与求解

### 3.1 微分求积法

微分求积法是将函数对某方向的自变量的偏导数近似表达为其各离散点处相应函数值的加权

和,其加权系数取决于节点分布,与具体问题无关。根据微分求积法,函数  $u(x)$  在  $x_i$  点的  $r$  阶导数可近似为

$$u^{(r)}(X_i) = \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(r)} u(X_j) \quad (11)$$

式中  $u(X_j)$  为节点  $X_j$  处的函数值,  $u^{(r)}(X_i)$  为  $u(X)$  在节点  $X_i$  处的  $r$  阶导数值,  $n$  为  $X$  方向的节点数,  $A_{ij}^{(r)}$  为  $r$  阶导数的权系数,一阶权系数可显式计算<sup>[10]</sup>为

$$A_{ik}^{(1)} = \begin{cases} M^{(1)}(X_i) / [(X_i - X_k)M^{(1)}(X_k)] & (i \neq k, i, k = 1, 2, \dots, n) \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(1)} & (i = k, i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (12)$$

式中  $M^{(1)}(X_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (X_i - X_j)$  (13)

而高阶权系数则由递推公式计算:

$$A_{ik}^{(r)} = \begin{cases} r[A_{ii}^{(r-1)}A_{ik}^{(1)} - A_{ik}^{(r-1)} / (X_i - X_k)] & (i \neq k, i, k = 1, 2, \dots, n) \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(r)} & (i = k, i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (14)$$

节点的选取是影响微分求积法计算精度和收敛速度的关键因素之一,计算表明,非均匀节点具有较快的收敛速度和较高的求解精度。边界条件的处理也是微分求积法中关键问题之一。本文所研究的问题为四阶微分方程,每个端点有两个边界条件,所以节点选取采用如下形式<sup>[10]</sup>。

$$\begin{cases} X_1 = 0, X_2 = \Delta \\ X_{n-1} = 1 - \Delta, X_n = 1 \\ X_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{(i-2)\pi}{n-3} \right] \\ (i = 3, 4, \dots, n-2; 0 \leq X \leq 1) \end{cases} \quad (15)$$

式中  $\Delta$  为相邻两边节点的距离,采用这种节点选取方法是为了便于节点替换法处理边界条件,即将一个边界点用相隔  $\Delta$  的两个点来替代,然后将每个端点的两个边界条件分别施加在这两个点上,  $\Delta$  可在  $10^{-2}$  和  $10^{-4}$  之间取值。

### 3.2 积分求积法

积分求积的基本思想是用被积函数在积分区间上的某些节点处函数值的线性组合作为积分的近似值<sup>[20]</sup>。对于梁式结构在人行荷载作用下的位移函数  $u(X)$ , 可表示为

$$\int_0^1 u(X) dX = \sum_{j=1}^n R_j u(X_j) \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (16)$$

式中  $n$  为  $X$  方向的节点数,  $R_j$  为权系数,  $u(X_j)$  为在节点  $X_j$  处的函数值,  $X_j$  取如式(15)所示的节点分布。把积分区间分成若干小区间,在每个小区

间上以梯形面积近似曲边梯形面积,即用梯形公式求小区间上积分的近似值,式(16)可表示为

$$\int_0^1 u(X) dX = \int_{X_1}^{X_2} u(X) dX + \int_{X_2}^{X_3} u(X) dX + \dots + \int_{X_{n-1}}^{X_n} u(X) dX = \sum_{j=1}^n R_j u_j \quad (17)$$

$$\int_0^1 u(X) dX = \frac{1}{2} \Delta X_1 (u_1 + u_2) + \frac{1}{2} \Delta X_2 (u_2 + u_3) + \dots + \frac{1}{2} \Delta X_{n-1} (u_{n-1} + u_n) = \sum_{j=1}^n R_j u_j \quad (18)$$

式中  $\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$ , 由式(18)可得积分求积的权系数为

$$\begin{cases} R_1 = \frac{1}{2} \Delta X_1, R_n = \frac{1}{2} \Delta X_{n-1} \\ R_i = \frac{1}{2} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \end{cases} \quad (19)$$

### 3.3 基本方程的离散化

利用 Dirac 函数的性质,综合利用 DQ 法和 IQ 法对控制方程离散化。在  $X$  方向,  $X_1, X_2 \dots X_n$  等  $n$  节点分布情况如式(15),假定行人荷载作用在这些节点中的一个,即

$$X_F = vt = X_p \quad (1 \leq p \leq n) \quad (20)$$

由 Dirac 函数性质式(2),此时在节点  $X_1, X_2, \dots, X_{p-1}, X_{p+1}, \dots, X_n$ , 式(8)转化为

$$\alpha \frac{\partial^2 u(X_i, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u(X_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(X_i, t)}{\partial X^4} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n) \quad (21)$$

对式(8)在梁全长进行积分,并利用 Dirac 函数性质式(3),可得

$$\alpha \sum_{i=1}^n R_i \left\{ \frac{\partial^2 u(X_i, t)}{\partial t^2} \right\} + \beta \sum_{i=1}^n R_i \left\{ \frac{\partial u(X_i, t)}{\partial t} \right\} + \sum_{i=1}^n R_i \left\{ \frac{\partial^4 u(X_i, t)}{\partial X^4} \right\} = \lambda \quad (i = p) \quad (22)$$

用微分求积法离散式(21,22),可得

$$\alpha \left\{ \frac{\partial^2 u(X_i, t)}{\partial t^2} \right\} + \beta \left\{ \frac{\partial u(X_i, t)}{\partial t} \right\} + \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(4)} \{u(X_j)\} = \{0\} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n-2) \quad (23)$$

$$\alpha \sum_{i=1}^n R_i \left\{ \frac{\partial^2 u(X_i, t)}{\partial t^2} \right\} + \beta \sum_{i=1}^n R_i \left\{ \frac{\partial u(X_i, t)}{\partial t} \right\} + \sum_{i=1}^n R_i \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(4)} \{u(X_j)\} = \lambda \quad (i = p) \quad (24)$$

式(23,24)可合并为

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [C] \{\dot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{F(t)\} \quad (25)$$

式中  $[M], [C]$  和  $[K]$  分别为欧拉梁的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵,  $\{\ddot{u}(t)\}, \{\dot{u}(t)\}$  和  $\{u(t)\}$  分别为加速度向量、速度向量和位移向量,  $\{F(t)\}$  为

荷载向量,对应表达式为

$$[M] = \alpha [I], [C] = \beta [I], [K] = [A]^{(4)} \quad (26)$$

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & (i \neq p) \\ \lambda/R_p & (i = p) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n; 1 \leq p \leq n) \quad (27)$$

式中  $[I]$  为  $n \times n$  的单位矩阵。人行荷载的施加位置随时间逐渐变化,所以荷载向量是时间相关的。此外,荷载向量只有在荷载作用点不等于 0,其余都为 0,这样得到荷载向量不够精确。为了得到更为精确的荷载模型,借助荷载施加在网格点上的静力平衡模型,对人行荷载向量进一步精细化。网格点上的静力平衡模型如图 2 所示。式(8)的右半部分可以表示为

$$\lambda \delta(X - X_F(t)) = \lambda \frac{X_R}{X_R + X_L} \delta(X - X_{p-1}) + \lambda \frac{X_L}{X_R + X_L} \delta(X - X_p) \quad (28)$$

式中  $X_R = X_p - X_F(t), X_L = X_F(t) - X_{p-1}$  (29)

由式(28,29)可知,式(27)可表示为

$$F_i(t) = \frac{\lambda}{X_R + X_L} \begin{cases} X_R/R_{p-1} & (i = p-1) \\ X_L/R_p & (i = p, i = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (30)$$

### 3.4 边界条件的离散化

边界条件式(9,10)的 DQ 格式为

$$u_1 = 0, \sum_{k=1}^n A_{1,k}^{(2)} \{u_k\} = 0 \quad (31a, 31b)$$

$$u_n = 0, \sum_{k=1}^n A_{n,k}^{(2)} \{u_k\} = 0 \quad (31c, 31d)$$

把式(31a,31c)代入式(31b,31d),联立解二元一次方程可得

$$u_2 = \frac{1}{CN} \sum_{k=3}^{N-2} CK1 \{u_k\} \quad (32a)$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{CN} \sum_{k=3}^{N-2} CKN \{u_k\} \quad (32b)$$

式中  $CN = A_{1,n-1}^{(2)} A_{n,2}^{(2)} - A_{1,2}^{(2)} A_{n,n-1}^{(2)}$  (33a)

$$CK1 = A_{n,n-1}^{(2)} A_{1,k}^{(2)} - A_{1,n-1}^{(2)} A_{n,k}^{(2)} \quad (33b)$$

$$CKN = A_{1,2}^{(2)} A_{n,k}^{(2)} - A_{n,2}^{(2)} A_{1,k}^{(2)} \quad (33c)$$

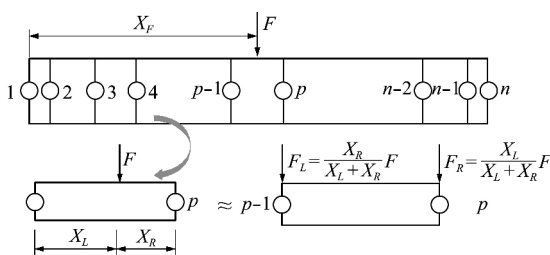


图 2 网格点上静力平衡模型

Fig. 2 Static equilibrium model on mesh point

### 3.5 控制方程的离散化及求解

把式(31a,31c,32)代入式(25)得

$$\alpha [I] \{\ddot{u}_k\} + \beta [I] \{\dot{u}_k\} + \sum_{k=3}^{n-2} s \{u_k\} = \{F_i(t)\} \quad (i = 3, 4, \dots, n-2) \quad (34)$$

式中  $s = A_{i,k}^{(4)} + \frac{A_{i,2}^{(4)} CK1 + A_{i,n-1}^{(4)} CKN}{CN}$  (35)

这样使得未知量减少为  $n - 4$  个,去掉与两端以及邻近两端的节点对应的 4 个方程,这种做法既精确引入了边界条件,又减少了未知量的数目,能得到更为准确的结果。控制方程是二阶常系数微分方程,利用 Newmark 算法即可得到数值解。

由式(34)退化可得到欧拉梁频率特征方程:

$$s \{u\} = \Omega^2 \{u\} \quad (36)$$

式中  $\Omega$  为欧拉梁的圆频率,  $\{u\} = \{u_3, u_4, \dots, u_{n-2}\}$

## 4 算例分析

某商贸城的钢结构连廊跨度为 21.8 m,宽度为 2.3 m,主梁由 2 根 H850×300×16×17H 型钢组成,次梁由 11 根 H250×125×6.5×9 组成,楼板由 100 mm 厚的混凝土组成,钢材为 Q235,混凝土强度等级为 C30,结构的阻尼比为 0.01。换算后,钢结构连廊截面竖弯等效抗弯刚度为  $3.268 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ,单位长度质量为 1603.5 kg,单位长度阻尼系数为 950.8 N/(m·s)。

### 4.1 模态分析

采用不同节点数目,用微分求积法计算钢结构连廊的前六阶竖向自振频率,并与理论解进行对比,结果列入表 1。计算结果表明,即使采用较少的节点数,用微分求积法得到的低阶频域也与理论解一致,当采用 21 个节点时,用微分求积法计算得到的连廊前六阶自振频率与理论解完全一致,证明了本文节点选取以及边界处理的合理性,也证明了用 DQ 法求解欧拉梁自由振动问题的高效性和精确性。

《建筑楼盖结构振动舒适度技术规范》规定连

表 1 连廊的竖向自振频率

Tab. 1 Vertical natural frequency of corridor

自振频率阶次	不同节点数的微分求积解/Hz				理论解/Hz
	13	15	19	21	
1	4.7186	4.7186	4.7186	4.7186	4.7186
2	18.8744	18.8744	18.8744	18.8744	18.8744
3	42.4668	42.4674	42.4674	42.4674	42.4674
4	75.5646	75.4974	75.4976	75.4976	75.4976
5	116.657	117.909	117.965	117.965	117.965
6	186.792	171.242	169.871	169.869	169.879

廊第一竖向自振频率不宜小于 3 Hz,该钢结构连廊竖向第一自振频率为 4.72 Hz,符合规范要求。

### 4.2 人行荷载下连廊的动力响应

采用上述的人行荷载模型,分别采用DQ-IQ混合法和振型叠加法计算连廊跨中处的动力响应,其中振型叠加法只考虑第一阶竖向自振频率的贡献。

图 3 为当行人以步频 1.573 Hz,即连廊第一阶竖向自振频率的 1/3 通过连廊时,连廊跨中处的位移响应。图 4 和图 5 为连廊处的加速度响应及相应的傅立叶谱。从 4.1 节的模态分析结果可以看出,连廊竖向频率分离较好,当行人步频为连廊第一阶竖向振动频率的 1/3 时,会在连廊第一阶频率处发生类共振现象,连廊的振动应以第一阶频率振动为主,其他频率的影响很小,此时用 DQ-IQ 混合法和振型叠加法计算得到的连廊跨中的振动响应几乎相同。

从图 3 和图 4 可以看出,连廊跨中的位移响应和加速度响应几乎重合,用 DQ-IQ 混合法和振型叠加法计算的位移峰值为 0.13762 mm 和 0.13757 mm,加速度峰值分别为 0.10953 m/s<sup>2</sup> 和 0.10956 m/s<sup>2</sup>,几乎相等。

从图 5 可以看出共振频率为 4.73 Hz,在连廊第一阶频率附近,另外有两个小的多峰值点,为 1.564 Hz 和 3.128 Hz,分别在一倍步频和二倍步

频附近。由此看出,DQ-IQ混合法在计算人行荷载作用下梁式结构振动时具有较高可靠性。

《建筑楼盖结构振动舒适度技术规范》中振动舒适度评估除了竖向第一阶自振评估限制外,还规定了加速度峰值的限制,规定加速度峰值超过 0.15 m/s<sup>2</sup>,会出现振动舒适度问题。通过计算可知,连廊第一阶频率处发生类共振时的加速度峰值没有超过限值,连廊不会出现振动舒适度问题。

为验证 DQ-IQ 混合法能否考虑高阶频率的影响,假定行人以 18.87 Hz 的步频(实际上人的步频达不到)即以连廊第二阶竖向自振频率通过连廊,分别采用 DQ-IQ 混合法和振型叠加法计算连廊跨中处的动力响应,其中振型叠加法同样只考虑第一阶竖向自振频率的贡献。图 6 为连廊跨中处的位移响应,图 7 和图 8 为连廊处的加速度响应及相应的傅立叶谱值。从图 6 和图 7 可以看出,由 DQ-IQ 混合法和振型叠加法计算得到的连廊处的位移和加速度响应出现了较大的差异,用 DQ-IQ 混合法和振型叠加法计算得到的位移峰值为 4.09 mm 和 4.44 mm,加速度峰值分别为 63.80 m/s<sup>2</sup> 和 61.48 m/s<sup>2</sup>。原因从图 8 可以看出,DQ-IQ 混合法和振型叠加法计算得到的响应都在步频处附近出现极值,而 DQ-IQ 混合法不光在步频处附近出现极值,在连廊的第三

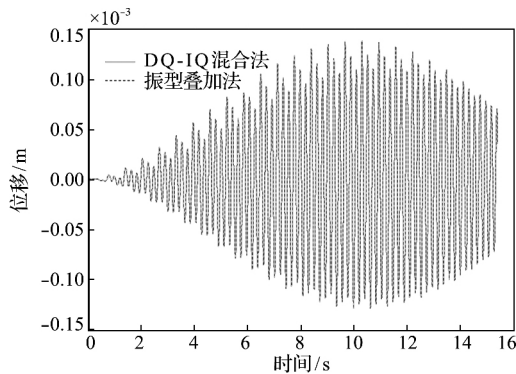


图 3 步频 1.573 Hz 时连廊跨中处位移响应  
Fig. 3 Displacement response in middle span when walking frequency equal to 1.573 Hz

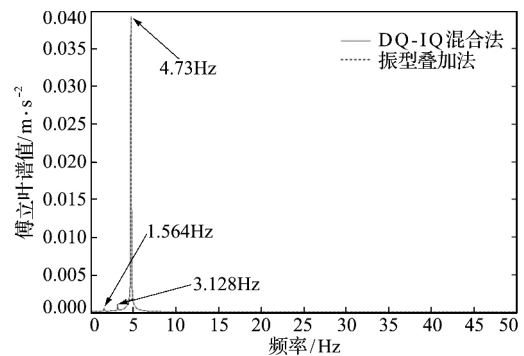


图 5 步频 1.573 Hz 时连廊跨中处加速度傅立叶谱  
Fig. 5 Acceleration Fourier spectrum in middle span when walking frequency equal to 1.573 Hz

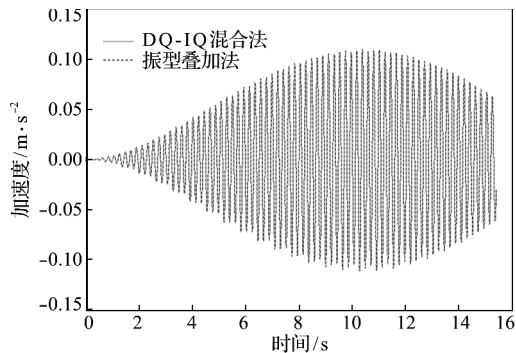


图 4 步频 1.573 Hz 时连廊跨中处加速度响应  
Fig. 4 Acceleration response in middle span when walking frequency equal to 1.573 Hz

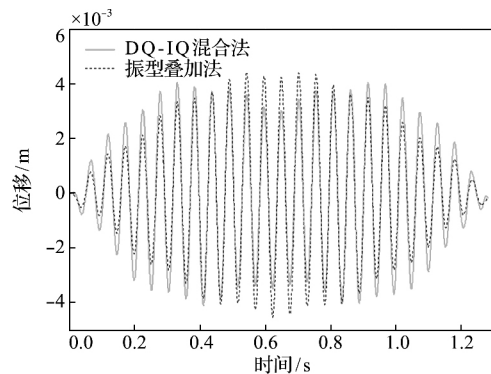


图 6 步频 18.87 Hz 时连廊跨中处位移响应  
Fig. 6 Displacement response in middle span when walking frequency equal to 18.87 Hz

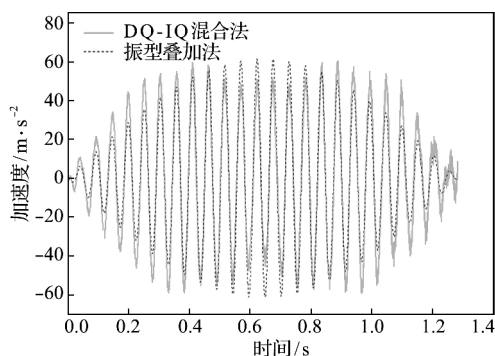


图7 步频 18.87 Hz 时连廊跨中处加速度响应  
Fig. 7 Acceleration response in middle span when walking frequency equal to 18.87 Hz

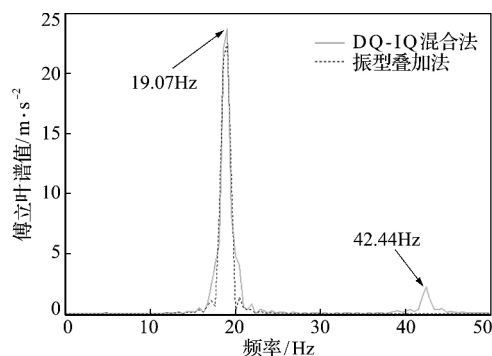


图8 步频 18.87 Hz 时连廊跨中处加速度傅立叶谱  
Fig. 8 Acceleration Fourier spectrum in middle span when walking frequency equal to 18.87 Hz

阶自振频率处也出现小峰值,由于高阶频率的影响,DQ-IQ混合法计算得到的响应与振型叠加法计算得到的响应有明显不同,充分说明DQ-IQ混合法能够考虑高阶频率的影响。

## 5 结论

通常采用振型叠加法计算人行荷载作用下梁式结构的振动响应,通过振型坐标转化,可以将偏微分方程转换成各个独立的单自由度振型坐标方程,计算效率较高。但该方法需要事先假定振型函数,且在叠加过程中通常舍弃高阶振型,造成计算结果偏差。

本文利用DQ-IQ混合法计算人行荷载作用下结构的振动响应,利用IQ法离散与时间相关的Dirac函数,再利用DQ法将控制方程转化为二阶常系数微分方程,最后利用Newmark算法即可得到数值解,将计算结果与振型叠加法所得结果进行对比。以钢结构连廊作为算例,用DQ法计算结构的前六阶自振频率并与解析解进行对比,证明了节点选取和边界条件施加的精确性;假定行人以1.573 Hz的正常步频,即1/3的结构第二阶竖向自振频率通过连廊,并引起连廊竖向基频共振为例,说明了DQ-IQ混合法具有较高的可靠性;假定行人以18.87 Hz的步频(实际上人的步频达不到),即连

廊第二阶竖向自振频率通过连廊,验证了DQ-IQ混合法能考虑高阶频率的影响,具有较高的精密性,DQ-IQ混合法虽然是针对人行荷载下梁的振动分析所提出的,但也可以推广到诸如车辆荷载作用下路面或桥梁的动力响应等其他移动荷载下结构的振动分析。

## 参考文献(References):

- [1] 许立言,陶慕轩,樊健生,等.大跨度钢-混凝土组合人行天桥舒适度分析[J].建筑结构学报,2016,37(5):138-145. (XU Li-yan, TAO Mu-xuan, FAN Jian-sheng, et al. Vibration comfort analysis on large-span steel-concrete composite pedestrian [J]. *Journal Building of Structure*, 2016, 37(5): 138-145. (in Chinese))
- [2] 朱前坤,陈凯,张举涛,等.某梁式钢楼梯在人致激励下的振动舒适度分析[J].建筑结构,2015,45(19):53-57. (ZHU Qian-kun, CHEN Kai, ZHANG Ju-tao, et al. Vibration serviceability analysis of a beam-typed steel stair under human induced excitation [J]. *Building Structure*, 2015, 45(19): 53-57. (in Chinese))
- [3] Tubino F, Piccardo G. Tuned Mass Damper optimization for the mitigation of human-induced vibrations of pedestrian bridges[J]. *Meccanica*, 2015, 50(3): 809-824.
- [4] 朱前坤,李宏男,杜永峰,等.不同行走步速下人行桥振动舒适度量化评估[J].工程力学,2016,33(10):97-104. (ZHU Qian-kun, LI Hong-nan, DU Yong-feng, et al. Quantitative evaluation of vibration serviceability of pedestrian bridge under different walking speed [J]. *Engineering Mechanics*, 2016, 33(10): 97-104.
- [5] Živanović S, Pavić A. Quantification of dynamic excitation potential of pedestrian population crossing footbridges [J]. *Shock and Vibration*, 2011, 18(4): 563-577.
- [6] Venuti F, Racic V, Corbetta A. Modelling framework for dynamic interaction between multiple pedestrians and vertical vibrations of footbridges[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 379: 245-263.
- [7] Živanović S, Pavić A, Reynolds P. Probability-based prediction of multi-mode vibration response to walking excitation[J]. *Engineering Structures*, 2007, 29(6): 942-954.
- [8] 李红利,陈政清.考虑荷载随机性的人行桥人致振动计算方法研究[J].湖南大学学报(自然科学版),2013,40(10):22-31. (LI Hong-li, CHEN Zheng-qing. A calculation method for footbridge vibration under stochastic pedestrian loading [J]. *Journal of Hunan University(Natural Science)*, 2013, 40(10): 22-31. (in Chinese))
- [9] Bellman R, Kashef B G, Casti J. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear

- partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1972, **10**(1): 40-52.
- [10] Bert C W, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, **49**(1): 1-28.
- [11] 张 琼, 杜永峰, 朱前坤. 基于微分求积法的 Euler-Bernoulli 梁的大变形力学行为研究[J]. *工程力学*, 2014, **31**(s1): 1-4, 10. (ZHANG Qiong, DU Yong-feng, ZHU Qian-kun. Study on large deformation mechanical behavior of Euler-Bernoulli beam using DQM [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, **31**(s1): 1-4, 10.
- [12] 聂国隽, 朱佳瑜. 纤维曲线铺放的复合材料层合板的自由振动分析[J]. *力学季刊*, 2016, **37**(2): 274-283. (NIE Guo-jun, ZHU Jia-yu. Free vibration analysis of composite laminates with curvilinear fibers [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2016, **37**(2): 274-283. (in Chinese))
- [13] Fung T C. Solving initial value problems by differential quadrature method, Part 1: First-order equations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **50**(6): 1411-1427.
- [14] 李 莹, 程昌钧, 胡育佳. 移动周期载荷作用下孔隙热弹性地基的动力学响应[J]. *固体力学学报*, 2012, **33**(2): 125-135. (LI Ying, CHENG Chang-jun, HU Yu-jia. Dynamic response of thermoelastic foundation with voids under a moving periodic load [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2012, **33**(2): 125-135. (in Chinese))
- [15] 廖 旭, 李鸿晶, 孙广俊. 基于 DQ 原理的结构弹塑性地震反应分析[J]. *工程力学*, 2013, **30**(7): 161-166. (LIAO Xu, LI Hong-jing, SUN Guang-jun. Structure elasto-plastic seismic response analysis by differential quadrature method [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(7): 161-166. (in Chinese))
- [16] Eftekhari S A, Jafari A A. Mixed finite element and differential quadrature method for free and forced vibration and buckling analysis of rectangular plates [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(1): 81-98.
- [17] Eftekhari S A. A differential quadrature procedure with regularization of the Dirac-delta function for numerical solution of moving load problem [J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2015, **12**(7): 1241-1265.
- [18] Eftekhari S A. A note on mathematical treatment of the Dirac-delta function in the differential quadrature bending and forced vibration analysis of beams and rectangular plates subjected to concentrated loads [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, **39**(20): 6223-6242.
- [19] Kerr S C, Bishop N W M. Human induced loading on flexible staircases [J]. *Engineering Structures*, 2001, **23**(1): 37-45.
- [20] 丁丽娟, 程杞元. 数值计算方法(第二版)[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2005. (DING Li-juan, CHENG Qi-yuan. *Numerical Method* (Second Edition) [M]. Beijing: Beijing University of Technology Press, 2005.

## DQ-IQ hybrid method for structure vibration analysis of beam structure under pedestrian loading

ZHANG Qiong<sup>\*1</sup>, NAN Na-na<sup>1</sup>, ZHU Qian-kun<sup>1,2</sup>, DU Yong-feng<sup>1</sup>

(1. Institute of Earthquake Protection and Disaster Mitigation, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;

2. Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** This paper evaluates the vibration serviceability of a girder beam structure under a moving load. Its vibration control equation is a partial differential equation containing Dirac function. Dirac function is discretized by IQ method for time-dependent and the control equation is transformed into a differential equation with constant coefficients of the second order by DQ method. The solution to the differential equation is obtained by using Newmark algorithm. Differential quadrature-integral quadrature hybrid method is used for solving the vibration response of a beam under the action of pedestrians. Take a steel corridor as an example. The natural frequencies of the structure are calculated by DQ method and compared with the analytical solution to illustrate the accuracy of node selection and boundary conditions. The corridor responses at different walking frequencies under corridor response are calculated by using the hybrid DQ-IQ method and modal superposition method, which verify the reliability and accuracy of the DQ-IQ hybrid method. The DQ-IQ hybrid method also can be applied to vibration analysis of a structure under other moving loads such as the dynamic responses of pavements or bridges under vehicle loads.

**Key words:** beam structure; Dirac function; partial differential equation; DQ-IQ hybrid method

引用本文/Cite this paper:

张 琼, 南娜娜, 朱前坤, 等. 人行荷载下梁式结构振动分析的DQ-IQ混合法[J]. *计算力学学报*, 2019, **36**(2): 166-172.

ZHANG Qiong, NAN Na-na, ZHU Qian-kun, et al. DQ-IQ hybrid method for structure vibration analysis of beam structure under pedestrian loading [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(2): 166-172.