

# 基于样条曲线的水泵叶片流线控制方法

张人会, 杨军虎

(兰州理工大学流体动力与控制学院, 兰州 730050)

**摘要:** 针对传统的水泵CAD软件在绘制和调控展开流线时很大程度上依靠经验的判断, 提出了用单段和多段三次样条曲线来模拟展开流线, 以及约束调控样条曲线的数学模型。对多段三次样条曲线模拟展开流线给出了非常具体的绘图及调控方法, 具有较强的工程实用价值。

**关键词:** 样条曲线; 水力设计; 展开流线; CAD

**中图分类号:** TH311 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-6254(2005)01-0007-03

## 0 引言

水泵过流部件的水力尺寸特别是叶片形状决定了水泵的性能, 因此, 叶轮的水力设计是泵整个设计成败的关键。传统的叶片绘型大多采用方格网保角变换法, 在方格网上调控展开流线。随着CAD技术的发展, 很多部门都开发了针对泵设计的CAD软件, 但发展还不是很成熟, 在使用时受到很大的局限。特别是流线展开图的绘制, 经验在传统的手工设计过程中占有很大的比重。因此, 如何将这些好的经验性的东西进行数字化及定量地控制是一个值得研究的课题。

## 1 流线展开图的数学模型

### 1.1 研究现状

在传统的手工绘图方法中, 设计者用弹性样条来画展开流线, 由进出口位置及其安放角即可确定展开流线。在数学上一般都采用样条曲线来对弹性样条画的曲线进行数学抽象。

通过对小扰度梁分析可知在两型值点间的曲线都是三次多项式, 而且在各型值点上都具有连续的一阶、二阶导数。王福军等<sup>[1]</sup>提出采用Hermite曲线来对展开流线模拟, 并通过在屏幕上移动鼠标的方法, 来对Hermite曲线进行调控。由于在水力设计中要求叶片安放角由 $\alpha_1$ 均匀地过渡到 $\alpha_2$ , 且曲线不出现S型, 所以在调控展开流线时必须要对其进行约束, 否则就可能出现S型的曲线。在已有的CAD软件中都是凭着直

觉对曲线进行调控, 没有提出具体的约束调控的数学模型。

### 1.2 数学模型

用三次样条曲线对展开流线进行模拟, 根据所给定的各型值点的参数即可得到多段三次样条曲线, 每两型值点间为一段三次样条曲线, 而且在各型值点上都具有连续的一阶、二阶导数, 设样条曲线可表示为

$$y_i = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}x^2 + a_{3i}x^3 \quad (1)$$

式中  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ 。

式(1)中的参数可由型值点的各参数确定, 写成矩阵的形式

$$Y = AX \quad (2)$$

式中  $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)^T$ ;

$X = (1, x, x^2, x^3)^T$ ;  $A$  为系数矩阵。

由二阶导数在各节点处连续可得三转角方程

$$I_j m_{j-1} + 2m_j + a_j m_{j+1} = d_j \quad (3)$$

该式表示的是各型值点的一阶导数相互耦合的线性方程组。方程组中的系数

$a_j = h_{j-1} / (h_{j-1} + h_j)$  式中,  $h_j = x_{j+1} - x_j$ ;

$I_j = 1 - a_j$ ;

$$d_j = 3 \left[ \frac{I_j}{h_{j-1}} (y_i - y_{i-1}) + \frac{a_j}{h_j} (y_{i+1} - y_i) \right] \quad (4)$$

构成系数矩阵  $Q$ , 所以有

$$QM = D \quad (5)$$

基金项目: 兰州理工大学校基金资助项目(0214)

作者简介: 张人会(1977-), 男, 江西都昌人, 硕士, 主要从事流体机械的教学及科研。

另外加上边界条件  $m_1 = \text{tg} \beta_1$ 、 $m_n = \text{tg} \beta_2$  解此线性方程组即可得各型值点的一阶导数值  $m_j$ ，然后将各个一阶导数值代入下式即可得样条曲线的表达式。

$$y_i(x) = (1 + 2 \frac{x - x_j}{h_j})(\frac{x - x_{j+1}}{h_j})^2 y_j + (1 - 2 \frac{x - x_{j+1}}{h_j})(\frac{x - x_j}{h_j})^2 y_{j+1} + (x - x_j)(\frac{x - x_{j+1}}{h_j})^2 m_j + (x - x_{j+1})(\frac{x - x_j}{h_j})^2 m_{j+1} \quad (6)$$

将式(6)整理可得样条曲线的矩阵形式的表达式如(2)式所示。

## 2 展开流线的调控及其约束

### 2.1 流线展开

如果在起点与终点之间不再插入其它的型值点，则由流线进口边流线的长、进出口安放角及包角即可唯一确定一条三次样条曲线

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (7)$$

并可作出展开流线，如图 1 所示。

由  $y(0)=0$ ； $y(a)=b$ ； $y'(0)=m_1$ ； $y'(a)=m_2$  可得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \\ a_1 &= m_1; \\ a_2 &= (3b - 2am_1 - am_2)/a^2; \\ a_3 &= (am_1 + am_2 - 2b)/a^3 \end{aligned} \quad (8)$$

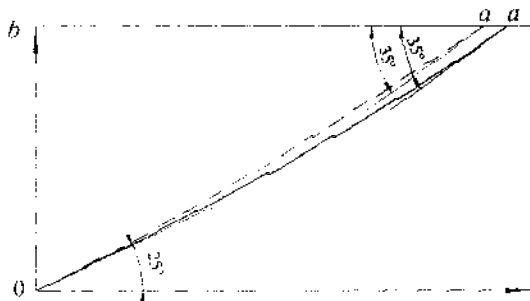


图 1 流线展开图

此时通常通过调整叶片的包角来改变出口的位置(改变包角后的流线展开图如图 1 中虚线所示)，但在调整时必须不能使曲线出现 S 型，也即叶片安放角  $\beta$  应该是单调的，一般有  $\beta_2 > \beta_1$ ，

所以有  $y'' \geq 0$ 。

由(7)式可得

$$a_2 + 3a_3 x \geq 0 \quad (9)$$

也即要使展开流线不出现 S 型就必须使得(9)式在  $x \in (0, a)$  上恒成立。

由(8)及(9)式即可得不等式

$$\frac{2b}{m_1 + m_2} < a < \frac{3b}{2m_1 + m_2} \quad (10)$$

因此可得包角最大可调量为

$$(\frac{3b}{2m_1 + m_2} - \frac{2b}{m_1 + m_2}) \cdot \Delta\theta$$

式中， $\Delta\theta$  为每个方格所代表的角度。

### 2.2 流线的调控

如果用一段样条曲线来模拟展开流线，则展开流线的调控受到很大的限制，只能通过调节进口边流线的长、进出口安放角及包角来控制展开流线。如果在流线的进出口点间插入  $(n - 1)$  个型值点，则整个展开流线可用  $n$  段三次样条曲线来模拟，表示式为(2)式。此时可以通过调节各型值点的位置  $(x_j, y_j)$ 、节进口边流线的长、进出口安放角等多个参量来控制样条曲线，所以调控的余地大，使得设计者能在较大的范围内自由控制样条曲线。同样为保证调控曲线时不出现 S 型，则对每个型值点的调控都需要限制。由于整个展开流线是由  $n$  段三次样条曲线组成，所以必须分别对这  $n$  条样条曲线的调控进行限制。在给定初始型值点时先按照 2.1 的方法得到一条样条曲线，然后按流线长度方向等距离插值得到其它各型值点坐标  $(x_j, y_j)$ ，见图 2。

假设将图 1 中的展开流线分成三段，则需要插出型值点  $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ ，此时  $y_2 = b/3$ 、 $y_3 = 2b/3$ ，然后由(3)~(6)式即可展开流线表达式。要求整个展开流线不出现拐点，由于二阶导数在型值点上连续，所以要求三段样条曲线均不出现拐点即可，由(10)式可知

$$\frac{2b/3}{m_1 + m_2} < x_2 < \frac{3b/3}{2m_1 + m_2} \quad (11)$$

$$\frac{2b/3}{m_2 + m_3} < x_3 < \frac{3b/3}{2m_2 + m_3} \quad (12)$$

$$\frac{2b/3}{m_3 + m_4} < x_4 < \frac{3b/3}{2m_3 + m_4} \quad (13)$$

在调节各型值点时，类似于 2.1 的方法，只

是沿着  $x$  方向移动各型值点,  $y_i$  不变。但各型值点的坐标必须满足(11)、(12)、(13)所限定的范围(注意此时的  $x$  坐标都是相对作标,即相对于该段样条曲线的始点的坐标)但不等式(11)、(12)、(13)中的  $m_2, m_3$  却是由  $x_2, x_3, x_4$  的函数,其函数关系式满足三转角方程。所以不能直接得到  $x_2, x_3, x_4$  的可调范围。对展开流线进行调控时只能凭着设计经验对各型值点进行调整,调整后应根据(3)、(11)、(12)及(13)式来检验调整的合理性,如各型值点不在(11)、(12)及(13)规定的范围内则需要将其调整到规定的范围内,反复调整反复检验,直到结果满意为止。

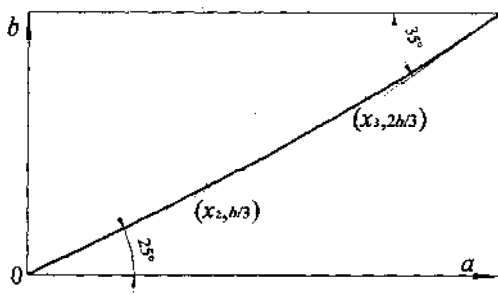


图2 插出其它各型值点

叶轮的水力设计的好坏在很大程度上依赖设计者的经验,如能最大限度的将这些设计经验设定到程序之中则能大大增强CAD软件的通用性。例如,如何调整展开流线使得叶片不致扭曲严重;如何调整展开流线使得轴面截线与流线的夹角不致太小及如何调开展整流线沿流线长度上的叶片安放角的分布等等,都可以通过调整各型值点的来调整展开流线,在实际调整过程中都只需

要平移各型值点来实现。概括起来展开流线的调控步骤可分如下几步:

- 1) 由2.1的方法,选择合适包角后可得到展开流线,同时反插值可得到各型值点参数;
- 2) 绘制展开流线图及轴面截线图;
- 3) 检查绘图结果是否满意(包括检查轴面图);
- 4) 如不满意则需要调整各型值点;
- 5) 重新由(3)~(6)式可得调整后的样条曲线;
- 6) 由(11)~(13)式来检验调整的合理性;
- 7) 转2)直至结果满意时停止。

这样的调控方法虽然要求较复杂的后台计算程序,但是通用程序做好以后,同样能大大缩短设计时间,提高泵的性能。

### 3 结论

1) 由三次样条曲线的特性,提出了用单段三次样条曲线及多段三次样条曲线模拟展开流线的方法。

2) 提出了调控展开流线的约束模型。

3) 对多段样条曲线模拟展开流线提出了具体的操作步骤。

#### 参考文献:

- [1] 王福军. 水泵CAD中展开流线动态调控机理[J]. 计算机辅助设计与图形学报. 1997, 9(6): 494~499.
- [2] 关醒凡. 泵的理论与设计[M]. 北京:机械工业出版社, 1987, (2).
- [3] 张人会, 张学静, 杨军虎. 非设计工况下叶轮进口附近的流动及其控制[J]. 甘肃工业大学学报, 2003, 29(4): 64~66.

## Controlling Method of Pump Blade Streamline Based on Spline Curve

ZHANG Ren-hui, YANG Jun-hu

(College of Fluid Power and Control, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050 China)

Abstract: According to the condition that traditional method to draw and control the expanding streamline mostly depending on the designer's experience, the method to simulate the expanding streamline by single or multi cube spline curves, and the mathematical model to control the spline curve are proposed. The approach of simulating and controlling the expanding streamline with multi cube spline curves is narrated in detail, which proved be practical.

Key words: Spline curve; Hydraulic design; Expanding streamline; CAD