

引用格式: Wang Jichang, Shen Yongchun, Yang Jingning. Theoretical Analysis of Nonlinear Bending of Shape Memory Alloy Beam under the Action of Couple[J]. Journal of Gansu Sciences, 2018, 30(2): 20-24. [王吉昌, 沈永春, 杨静宁. 力偶作用下形状记忆合金梁的非线性弯曲理论分析[J]. 甘肃科学学报, 2018, 30(2): 20-24.]
doi: 10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2018.02.005.

力偶作用下形状记忆合金梁的非线性弯曲理论分析

王吉昌¹, 沈永春², 杨静宁¹

(1. 兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 中国船舶科学研究中心, 江苏 无锡 214082)

摘要 基于梁的大变形理论, 结合已有实验测得的形状记忆合金材料的应力-应变关系, 研究了形状记忆合金梁的拉压不对称性对其弯曲变形的影响, 建立了梁的横截面应力分布、马氏体体积分数表达式, 推导得出了梁在纯弯曲条件下的非线性控制方程并进行求解。结果表明: 中性层先移向受压侧, 后移向受拉侧; 随拉压不对称系数的增大, 受压侧马氏体体积分数减小, 材料越不易发生相变。

关键词 纯弯曲; 形状记忆合金; 非线性; 拉压不对称

中图分类号: O343 文献标志码: A 文章编号: 1004-0366(2018)02-0020-05

形状记忆合金(SMA, shape memory alloy)材料在近几十年获得了飞速发展, 如今已经广泛应用于航天、机械、医学等重要领域。SMA材料是一种新型的智能材料, 主要具有超弹性和形状记忆效应两种特殊性能, 这些特性主要跟形状记忆合金材料内奥氏体和马氏体间的相互转化有关^[1]。

为揭示 SMA 材料相变原理, 很多学者对 SMA 材料进行了深入研究, 建立了多种本构方程和理论模型。文献[2]中测定了 SMA 拉压不对称性和中性轴的移动对形状记忆合金梁弯曲特性的影响。文献[3]研究了 SMA 纤维在拉伸和剪切载荷作用下的力学行为。文献[4]中研究了温度和弯矩的变化对环形和箱形横截面形状记忆合金梁弯曲变形的影响。文献[5]中分析了形状记忆合金在结构裂缝自修复过程中的作用。近年来, Ahmadreza 等^[6]中研究了集中力作用下的形状记忆合金梁弯曲变形, 以及温度变化对梁弯曲变形的影响。但对于形状记忆合金材料变形过程中拉压两侧的不对称性和横截面上应力分布及马氏体体积分数的变化研究很少。

根据实验测得的 SMA 材料应力-应变关系^[7], 基于梁的大变形理论, 针对 SMA 材料拉压不对称性, 建立了 SMA 梁非线性弯曲变形的控制方程, 得到了截面应力、马氏体体积分数、变形量、相边界的

表达式, 以及中性轴位移量、相变百分比、最大挠度、变形量和相边界与弯矩的关系曲线。

1 SMA 梁的非线性弯曲变形

1.1 SMA 梁的力学模型

矩形截面形状记忆合金梁长、宽、高分别为 l 、 b 、 $2h$, 受弯矩 M 作用, 在弯曲过程中受拉侧边缘到中性轴的距离为 h_1 , 受压侧边缘到中性轴的距离为 h_2 , 如图 1 所示。

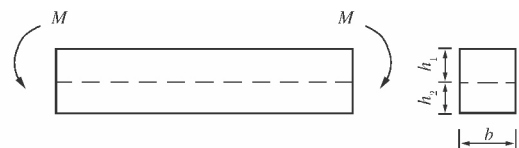


图 1 矩形截面梁力学模型

Fig.1 Mechanical model of rectangular section beam

根据连续介质力学的基本观点, SMA 梁在弯曲变形的过程中始终满足平面假定, 梁横截面受拉侧和受压侧边缘处的应变分别为

$$\epsilon_t = \frac{h_1}{\rho}, \epsilon_c = \frac{h_2}{\rho}, \quad (1)$$

梁变形量为

$$\Delta = \epsilon_t + \epsilon_c = \frac{h_1}{\rho} + \frac{h_2}{\rho}, \quad (2)$$

收稿日期: 2017-07-18; 修回日期: 2017-08-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(05-020317)

作者简介: 王吉昌(1990-), 男, 河北邢台人, 硕士研究生, 研究方向为复合材料结构的非线性力学行为。E-mail: jichangw@163.com

受拉侧相变开始应变值为

$$\epsilon_{ts} = \frac{\sigma_{ts}}{E_A}, \quad (3)$$

受拉侧相变结束应变值为

$$\epsilon_{tf} = \epsilon_{ts} + \Delta\epsilon_t, \quad (4)$$

其中: ϵ_t 和 ϵ_c 分别为受拉侧和受压侧应变值; ρ 为曲率半径; E_A 为奥氏体相弹性模量; ϵ_{ts} 和 ϵ_{tf} 分别为受拉侧应变相变的起始值和结束值; σ_{ts} 为受拉侧应力相变起始值; $\Delta\epsilon_t$ 为相变平台段。

1.2 引入拉压不对称系数

考虑到 SMA 梁在弯曲变形的过程中受拉侧和受压侧不对称,为充分研究其不对称性,特引入拉压不对称系数 α ^[8]对已有力学模型中的应力应变值进行修正,应力应变与 α 关系为

$$\alpha = \frac{\sigma_{cs} - \sigma_{ts}}{\sigma_{cs} + \sigma_{ts}} = \frac{\sigma_{cf} - \sigma_{tf}}{\sigma_{cf} + \sigma_{tf}}, \quad (5)$$

由式(5)得

$$\sigma_{cs} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \sigma_{ts}, \sigma_{cf} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \sigma_{tf}, \quad (6)$$

其中: σ_{tf} 为受拉侧应力相变结束值; σ_{cs} 和 σ_{cf} 分别为受压侧应力相变起始和结束值。

1.3 横截面上应力分布

随着弯矩 M 的不断增大, SMA 材料经历了 1

个由弹性变形到相变的过程。可将 SMA 梁弯曲变形过程分为初始和相变 2 个阶段:

(1) 初始阶段 ($\epsilon_t \leq \epsilon_{ts}$) 在初始阶段,整个 SMA 梁都没有发生相变,材料处于奥氏体相,中性轴位置没有发生偏移。截面上应力分布为

$$\sigma(y) = \frac{E_A y \epsilon_t}{h}, \quad -h \leq y \leq h. \quad (7)$$

(2) 相变阶段 ($\epsilon_t \geq \epsilon_{ts}$) 随着弯矩的增大,受拉侧表层应变 ϵ_t 首先达到了相变起始应变值 ϵ_{ts} ,梁开始发生相变,中性轴发生偏移,如图 2 所示。A 表示奥氏体相, M 表示马氏体相, AM 表示奥氏体马氏体混合相, Δh 为不同阶段的中性轴位移量。当 $|\epsilon_c| \leq \epsilon_{cs}, \epsilon_{ts} \leq \epsilon_t \leq \epsilon_{tf}$ 时,进入 I 阶相变,如图 2(a) 所示,受拉侧表层应变值 ϵ_t 达到了相变起始应变值 ϵ_{ts} ,受拉侧表层材料开始发生相变,出现奥氏体马氏体混合相,相边界为 BTA; 当 $\epsilon_{cs} \leq |\epsilon_c| \leq \epsilon_{cf}, \epsilon_{ts} \leq \epsilon_t \leq \epsilon_{tf}$ 时,进入 II 阶相变,如图 2(b) 所示,受压侧表层材料的应变 ϵ_c 达到相变起始应变值 ϵ_{cs} ,受压侧开始发生相变,出现一个新的相边界 BCA; 当 $\epsilon_{cs} \leq |\epsilon_c| \leq \epsilon_{cf}, \epsilon_{tf} \leq \epsilon_t$ 时,进入 III 阶相变,如图 2(c) 所示,受拉侧表层材料应变值 ϵ_t 达到相变结束应变值 ϵ_{tf} ,表层材料完全转化为马氏体相,此时梁的横截面自上而下依次为马氏体相,混合相,奥氏体相,混

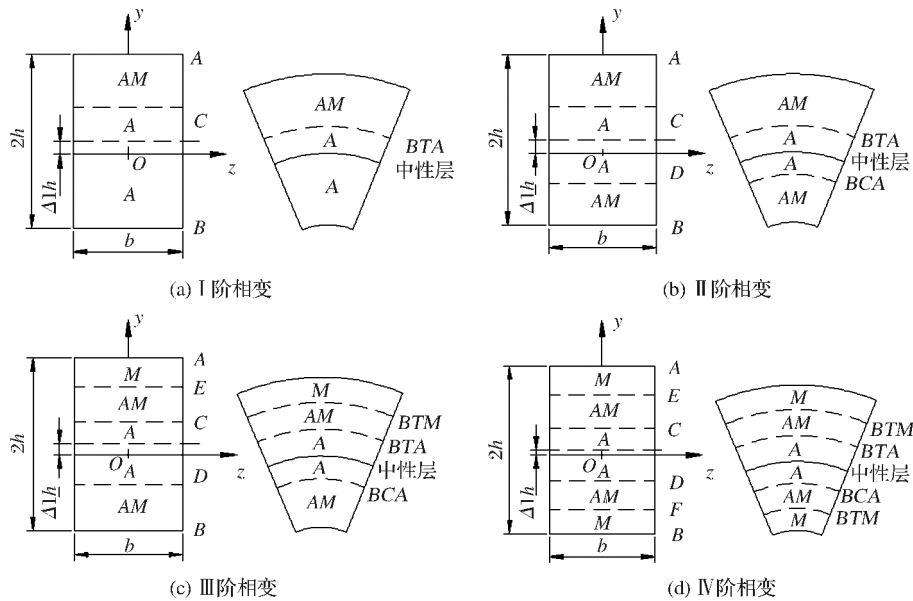


图 2 I-IV 阶相变梁的横截面与梁一微段变形示意

Fig.2 Micro section deformation schematic diagram of cross section and beam on I-IV order phase transition beam

合相,新出现的相边界为 BTM; 当 $\epsilon_{cf} \leq |\epsilon_c|, \epsilon_{tf} \leq \epsilon_t$ 时,进入 IV 阶相变,如图 2(d) 所示,受压侧表层的应变值 ϵ_c 达到应变结束值 ϵ_{cf} ,梁上下两侧均转化

为马氏体相,自中性轴向两侧依次为奥氏体相区,混合相区,马氏体相区,又出现一个相边界 BCM。图中 A, B, C, D, E, F 处坐标分别为

$$y_1 = (1 + \Delta_V)h, y_2 = -(1 - \Delta_V)h,$$

$$y_3 = \frac{\epsilon_{ts}(1 + \Delta_V)h}{\epsilon_t}, y_4 = -\frac{\epsilon_{cs}(1 + \Delta_V)h}{\epsilon_t},$$

$$y_5 = \frac{\epsilon_{tf}(1 + \Delta_V)h}{\epsilon_t}, y_6 = -\frac{\epsilon_{cf}(1 + \Delta_V)h}{\epsilon_t}.$$

梁在整个相变过程中横截面上的应力分布可用式(8)统一表示。I阶相变时,满足(c),(d)两式,只出现1条相边界BTA且纵坐标为 y_3 ;II阶相变时,满足(b)~(d)式,出现2条相边界BTA和BCA且纵坐标分别为 y_3 和 y_4 ;III阶相变时,满足(b)~(e)式,出现3条相边界BTA、BCA和BTM且纵坐标分别为 y_3 、 y_4 和 y_5 ;IV阶相变时,满足(a)~(e)式,4条相边界全部出现,应力分布与下式完全相同。

$$\sigma(y) = \begin{cases} -\sigma_{cf} + E_M \left(\frac{y\epsilon_t}{(1 + \Delta_i)h} - \epsilon_{cf} \right), & y_2 \leq y \leq y_6 \quad (a) \\ -\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y\epsilon_t}{(1 + \Delta_i)h} - \epsilon_{cs} \right), & y_6 \leq y \leq y_4 \quad (b) \\ \frac{yE_A\epsilon_t}{(1 + \Delta_i)h}, & y_4 \leq y \leq y_3 \quad (c) \\ \sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y\epsilon_t}{(1 + \Delta_i)h} - \epsilon_{ts} \right), & y_3 \leq y \leq y_5 \quad (d) \\ \sigma_{tf} + E_M \left(\frac{y\epsilon_t}{(1 + \Delta_i)h} - \epsilon_{tf} \right), & y_5 \leq y \leq y_1 \quad (e) \end{cases} \quad (8)$$

其中: E_1 为奥氏体马氏体混合相弹性模量; E_M 为马氏体相弹性模量; Δ_i 为不同阶段的中性轴位移量与 h 的比。

1.4 平衡方程

梁上任一横截面的静力平衡为

$$\int \sigma dA = 0, \quad (9)$$

$$\int \sigma y dA = M. \quad (10)$$

1.5 挠度

梁在弯曲变形时,考虑材料非线性和几何非线性2个方面进行分析,梁的挠曲线方程为

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \quad (11)$$

2 算例

设矩形截面的形状记忆合金梁的长度 $l = 500$ mm,宽度 $b = 30$ mm,高度 $2h = 50$ mm,相变平

台段 $\Delta\epsilon_t = 0.04$,受弯矩 M 的作用。 x 轴沿梁的中性层不断变化,如图3所示。由实验测得的形状记忆合金梁受拉侧相变开始应力和结束应力分别为 $\sigma_{ts} = 465$ MPa, $\sigma_{tf} = 645$ MPa,弹性模量 $E_A = 62$ GPa, $E_M = 62$ GPa, $E_1 = 4.5$ GPa^[6]。

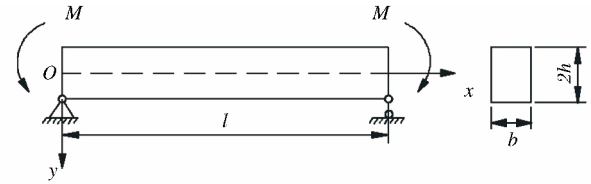


图3 SMA简支梁示意图

Fig.3 Schematic diagram of SMA simply supported beam

$\alpha = 0.05$ 时的形状记忆合金梁的相关计算参数如表1所列,表1显示中性层曲率、中性轴位置、梁变形量随弯矩的改变而不断变化,当弯矩 $M = 10.465$ kN时,中性轴位移量达到最大,约为0.719 mm。当弯矩 $M > 10.465$ kN时,中性轴开始向回移动。当 $M = 12.923$ kN时,中性轴回到最初位置即梁的中间位置,受拉侧和受压侧厚度几乎相等。当 $M > 12.923$ kN时,中性轴开始向受拉侧移动,受拉侧厚度开始小于受压侧厚度。

表1 $\alpha = 0.05$ 时 SMA梁的计算参数

Table 1 Calculation parameters of SMA beam $\alpha = 0.05$

ϵ_t	Δ	$\Delta_i h / \text{mm}$	$\frac{1}{\rho} / \text{m}^{-1}$	$M / (\text{KN} \cdot \text{m})$
0.007 8	0.015 6	0.008 6	0.312 0	6.037 0
0.012 0	0.023 6	0.372 0	0.473 0	7.892 0
0.020 0	0.039 0	0.624 0	0.781 0	9.127 0
0.030 0	0.058 3	0.707 0	1.167 0	9.930 0
0.038 3	0.074 5	0.719 0	1.489 0	10.465 0
0.047 5	0.092 4	0.711 0	1.847 0	11.015 0
0.052 5	0.102 1	0.447 0	2.063 0	11.518 0
0.057 9	0.115 8	0	2.316 0	12.923 0
0.060 0	0.116 4	-0.089 0	2.409 0	13.690 0
0.062 5	0.121 1	-0.163 0	2.516 0	14.726 0

2.1 截面上的应力分布

梁横截面上应力分布如图4所示,由图4可知,从横截面的中性轴向两边应力值不断增大,自中性轴向两侧分别为奥氏体相、奥氏体与马氏体混合相、马氏体相。当 $\alpha = 0$ 时,中性轴上下两侧应力大小完全相同。不同拉压不对称系数对受压侧影响较大,随着拉压不对称系数的增大,受压侧混合相区的应力值增大,马氏体相区面积减小,混合相区面积增大,最大应力值减小。

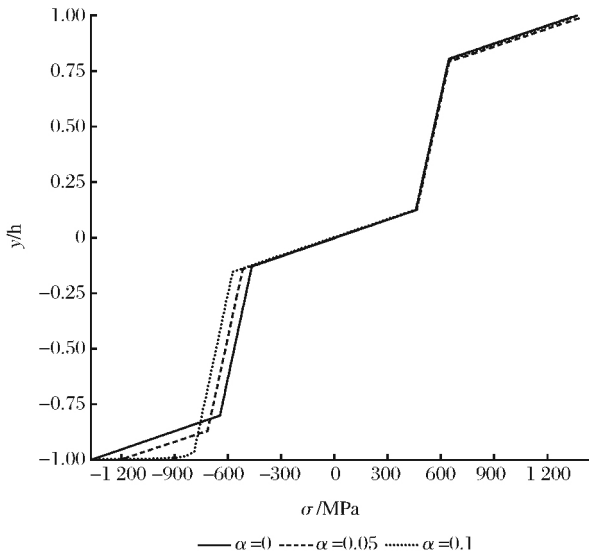


图 4 梁横截面上应力分布

Fig.4 Stress distribution on beam cross section

2.2 马氏体体积分数

横截面马氏体体积分数如图 5 所示。由图 5 可知,中性轴附近均为奥氏体,马氏体体积分数随着离中性轴的距离的增大而增大,直到最边缘处全部转变为马氏体。随着拉压不对称系数的增大,受压侧距离中性轴同一距离的马氏体体积分数减小,拉压不对称系数越大越不易发生相变。

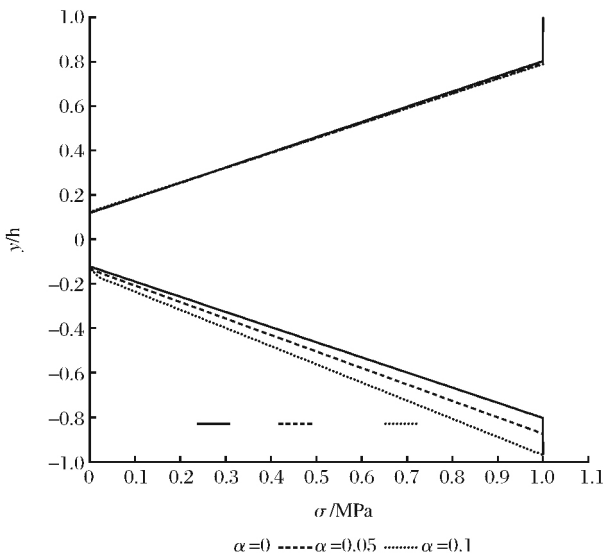


图 5 横截面马氏体体积分数

Fig.5 Martensite volume fraction of beam section

2.3 弯矩和中性轴位置的变化关系

中性轴的位移量与弯矩的关系如图 6 所示。由图 6 可知,当拉压不对称系数 $\alpha = 0$ 时,梁横截面中性轴在初始阶段和相变阶段均未发生位移,而随着

拉压不对称系数的增大,横截面中性轴位移量逐渐增大。当弯矩 $M < M_0$ 时,处于初始阶段;当弯矩 $M > M_0$ 时,进入 I 阶相变,受拉侧边缘开始由奥氏体转化为马氏体,出现奥氏体马氏体混合相,梁的弹性模量降低,梁中性轴随弯矩的增大开始向受压侧发生位移,且随着拉压不对称系数的增大中性轴位移速率增大;II 阶相变时,受压侧和受拉侧均出现奥氏体马氏体混合相,弹性模量减小到最小值,中性轴位移量达到最大值;当进入 III 阶相变时,受拉侧边缘完全转化为马氏体,梁的弹性模量逐渐增大,中性轴迅速回移;IV 阶相变时,受拉侧和受压侧边缘均完全转化为马氏体,中性轴逐渐回到初始位置。

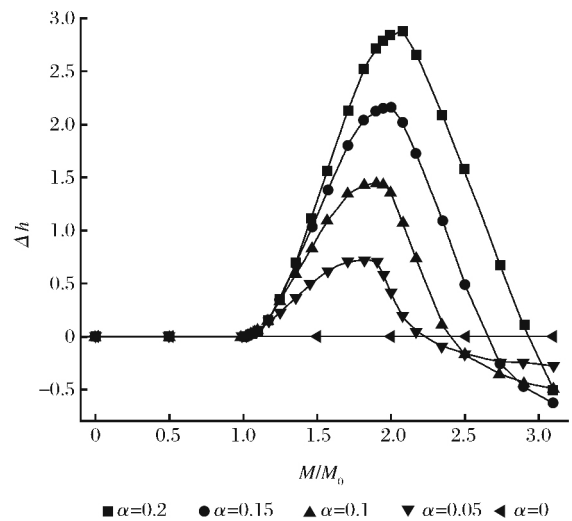


图 6 中性轴的位移量与弯矩的关系

Fig.6 Neutral axis displacement and bending moment relationship diagram

2.4 弯矩和曲率的关系

当弯矩 $M > M_0$ 时,梁开始发生相变,先由奥氏体相转变为混合相,随后转变为马氏体相,弹性模量出现由大变小,再由小变大的过程。在开始发生相变阶段,曲率随弯矩的变化较快,在相变结束阶段,曲率随弯矩的变化较慢,随拉压不对称系数越大曲率越小,如图 7 所示。

2.5 跨中挠度与弯矩的关系

当弯矩 $M < M_0$ 时,形状记忆合金梁处于初始阶段,没有发生相变,挠度与弯矩成线性关系;当 $M > M_0$ 时,SMA 梁进入相变阶段,拉压不对称系数越大跨中挠度越小,弯矩与跨中挠度的关系曲线斜率先增大后减小。SMA 梁进入相变阶段后,先由奥氏体相转换为混合相,然后变为马氏体相,弹性模量、抗弯刚度先减小后增大,如图 8 所示。

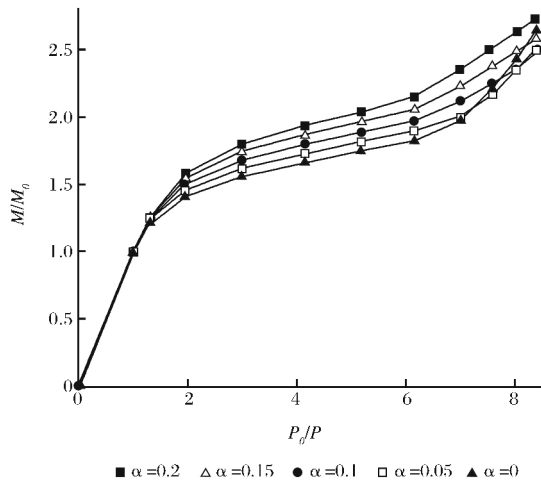


图7 弯矩和曲率的关系

Fig.7 Bending moment and curvature relationship diagram

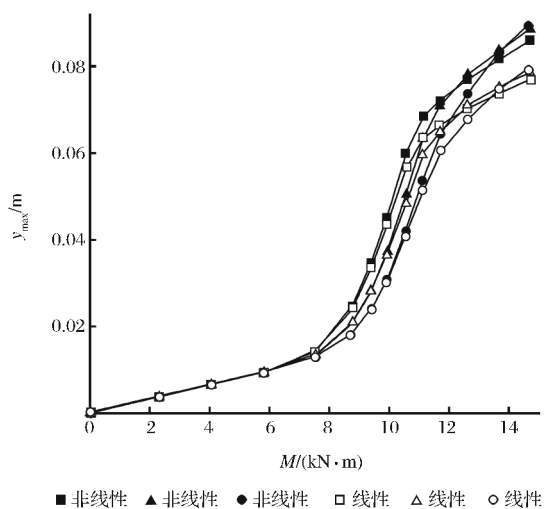


图8 梁跨中挠度随弯矩的变化

Fig.8 Deflection variation diagram along with bending moment in beam span

3 结论

(1)拉压不对称性对受压侧影响较大,中性层位移量随拉压不对称系数的增大而增大,且偏移速率也随之增大。

(2)拉压不对称系数为0时,中性轴上下两侧的应力和马氏体体积分数分布完全对称;拉压不对称系数不为0时,两侧出现明显不对称。

(3)拉压不对称系数越大,越不易发生相变。

参考文献:

- [1] 薛立军,兑关锁,刘兵飞.功能梯度形状记忆合金梁纯弯曲的理论分析[J].机械工程学报,2012,48(22):40-45.
- [2] Flor S,Urbina C,Ferrando F.Asymmetrical Bending Model for Ni Ti Shape Memory Wires;Numerical Simulations and Experimental Analysis[J].Strain.2011.47(3):255-267.
- [3] 刘爱荣,禹奇才,潘亦苏,等.形状记忆合金纤维复合材料的等效力学行为[J].计算力学学报,2004,21(2):236-240.
- [4] Ren Y S,Sun S S.An Analytical Model for Shape Memory Alloy Fiberreinforced Composite Thin Walled Beam Under Going Large Deflection [J]. Advances in Mechanical Engineering. 2015,7(2):1-14.
- [5] 狄生奎,王周峰,项长生,等.形状记忆合金用于结构裂缝自修复的研究[J].甘肃科学学报,2014,26(4):101-105.
- [6] Ahmadrza Eshghinejad, Mohammad Elahinia.Exact Solution for Bending of Shape Memory Alloy Beams[J].Mechanics of Advanced Materials and Structures,2015,10(22):829-838.
- [7] 崔世堂,姜锡权,严军.形状记忆合金梁纯弯曲的理论分析[J].应用力学学报,2016,33(1):43-49.
- [8] Auricchio F, Taylor R L, Lubliner J.Shape Memory Alloys: Macromodelling and Numerical Simulations of the Super Elastic Behavior[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1997,146(3/4):281-312.

Nonlinear Bending Theory Analysis of Shape Memory Alloy Beam under the Influence of Force Couple

Wang Jichang¹, Shen Yongchun², Yang Jingning¹

(1.School of Science,Lanzhou University of Technology,Lanzhou 730050,China;

2.China Ship Scientific Research Center,Wuxi 214082,China)

Abstract Based on the large deformation theory of beam,the author will combine with the stress-strain relationship of shape memory alloy materials measured from the existing experiment to study on the influence on bending deflection caused by shape memory alloy grider's tension-compression asymmetry,then, build the cross section stress distribution of grider and martensite volume fraction expression to derivate and solve the nonlinear control equation under the pure bending conditions of grider.The results show that: The neutrosphere will move towards the compression side,followed by the tension side;With the growth of tension and compression asymmetry coefficient and the reduction of martensite volume fraction in the compression side,the materials will not be easy to suffer the phase transition.

Key words Pure bending;Shape memory alloy;Nonlinear;Tension and compression asymmetry