

引用格式:Ma Yongbin,Li Qi.Dynamic Study on Temperature Dependent Material Properties under Fractional Order Thermoelastic Theory[J].Journal of Gansu Sciences,2018,30(2):1-6.[马永斌,李琪.分数阶热弹理论下温度依赖材料特性问题研究[J].甘肃科学学报,2018,30(2):1-6.]
doi:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2018.02.001.

分数阶热弹理论下温度依赖材料特性问题研究

马永斌,李琪

(兰州理工大学理学院,甘肃兰州 730050)

摘要 基于 Youssef 提出的分数阶广义热弹理论,研究材料特性随温度变化的含有球腔无限大体边界受热冲击的动态响应。借助拉普拉斯变换及其数值反变换技术,得到了模型的无量纲温度,位移以及应力的变化趋势。结果表明:当材料特性参数随温度变化时,热波传播距离在减小,无量纲温度、位移以及应力受到显著影响。

关键词 分数阶热弹;热冲击;材料参数;温度相关性;空心球体

中图分类号:O343.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1004-0366(2018)02-0001-06

近年来,许多学者研究了广义热弹理论来纠正经典热弹理论的缺陷问题。广义热弹理论可以描述在极端热条件下的不稳定传热过程,例如高温梯度下的传热,低温下的传热问题,以及在短时间或者空间微尺度条件下的热传递。

基于已有的广义热弹性理论,学者们已经做了大量工作,Sherief 等^[1]基于 L-S 广义热弹性理论研究了无限长中空柱体外表面受热冲击问题;Darabseh 等^[2]基于 G-L 广义热弹性理论研究了材料参数呈梯度变化的无限长圆柱受瞬时热载荷的问题;Aouadi^[3]研究了无限大球腔的广义热扩散问题;Banik 等^[4]基于双温度理论研究了无限大球腔受热冲击问题;Abouelregal^[5]基于双相滞后模型研究了半无限大体受指数变化热载荷的动态响应。

近年来,分数阶已被成功运用到修改许多现有的物理过程模型。Yu 等^[6]用分数阶广义热弹性理论研究了微梁问题;Sarkar 等^[7]研究了二维半无限大体广义磁热弹耦合问题;Sherief 等^[8]研究了受温度影响的半无限大体受热冲击问题;何天虎等^[9]基于分数阶广义热弹理论,研究了材料特性参数与温度相关的无限长中空柱体的广义电磁热弹耦合理论;何天虎等^[10]基于分数阶广义热弹理论,就无限

长圆柱导体的广义电磁热弹耦合问题的动态响应进行了研究。经典和广义热弹性理论不适用于许多材料和物理过程。因此,必须为热弹理论带来分数阶。所以,Youssef^[11]基于分数阶和热传导建立了一种新的广义热弹性模型。其基本模式为

$$q_i + \tau_0 \dot{q}_i = -\kappa I^{\alpha-1} T_{,i}, 0 < \alpha \leq 2 \quad (1)$$

其中: q_i 为热流量矢量的分量; τ_0 为热松弛时间参数; κ 为热传导系数; α 为分数阶参数; T 为温度。并且, I 被定义为一个整体的运算符:

$$I^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds. \quad (2)$$

Youssef^[12]利用该理论研究了半无限大体边界受斜坡形热冲击的问题。

鉴于以上原因,基于 Youssef 分数阶热弹理论,研究具有受热冲击的球形腔的无限大体。通过假设材料参数随温度变化,得到相应的控制方程。然后通过拉普拉斯变换及其数值反变换获得控制方程,获得无量纲温度、位移及应力的分布。通过分析图的变化,得出温度对材料参数的影响。

1 基本控制方程

假设无边界的弹热介质包含半径为 a 的球形

收稿日期:2017-08-31;修回日期:2017-09-27

基金项目:国家自然科学基金(11372123);甘肃省自然科学基金(148RJZA007)

作者简介:马永斌(1974-),男,甘肃靖远人,副教授,硕士生导师,研究方向为结构优化和多场耦合分析等。E-mail:myb-126@163.com

通信作者:李琪,E-mail:374405377@qq.com

腔,并且最初处于均匀的温度。对于与温度相关的材料参数,假设:

$$\lambda = \lambda_0 f(T), \mu = \mu_0 f(T), \kappa = \kappa_0 f(T),$$

其中: λ_0, μ_0 和 κ_0 为不考虑温度相关性的特征参数; $f(T)$ 在温度的无量纲函数中给出。当材料参数与温度无关时, $f(T) = 1$ 。考虑到广义热弹耦合理论与参考温度的微小偏差,则

$$f(T) = 1 - \alpha' T_0,$$

其中: λ, μ 为 Lamé 常数; α' 被称为经验材料参数; T_0 为原始温度。

有 $\lambda = \lambda_0 (1 - \alpha' T_0), \mu = \mu_0 (1 - \alpha' T_0), \kappa = \kappa_0 (1 - \alpha' T_0)$ 。

在无体力的情况下,对于均匀的各向同性弹性体,引入球面极坐标 $(\gamma, \theta, \varphi)$, 球腔中心处于原点并且考虑球面对称性,得到控制方程为

运动方程:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (1 - \alpha' T_0) (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial e}{\partial r} - (1 - \alpha' T_0) (3\lambda_0 + 2\mu_0) \alpha^T \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (3)$$

能量控制方程:

$$k I^{\alpha-1} \nabla^2 \theta = \rho c_E (\theta + \tau_0 \ddot{\theta}) + T_0 (1 - \alpha' T_0) (3\lambda_0 + 2\mu_0) \alpha^T (\dot{e} + \tau_0 \ddot{e}), \quad (4)$$

本构方程

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (1 - \alpha' T_0) \left[2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda_0 e - (3\lambda_0 + 2\mu_0) \alpha^T \theta \right], \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= (1 - \alpha' T_0) \left[2\mu_0 \frac{u}{r} + \lambda_0 e - (3\lambda_0 + 2\mu_0) \alpha^T \theta \right], \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $\theta = T - T_0$ 为变温; $u = u(r)$ 为位移分量; ρ 为恒定质量密度; c_E 为恒定温度下比热; σ_{ij} 为应力张量的分量; e_{ij} 为应变张量的分量; $\gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha^T$, α^T 为线性热膨胀系数; 体应变 $e = e_{kk} = \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r}$ 。在上述方程中,物理量上面的点表示对时间的导数,物理量下面的逗号表示对坐标的导数。

对上述控制方程用以下变量进行无量纲化:

$$\begin{aligned} r' &= c_1 \eta r, u' = c_1 \eta u, \\ \theta' &= \frac{\gamma_0 \theta}{(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \\ t' &= c_1^2 \eta t, \tau'_0 = c_1^2 \eta \tau_0, \end{aligned}$$

$$\text{其中: } c_1^2 = \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0)}{\rho}, \eta = \frac{\rho c_E}{\kappa}.$$

为方便,方程(3)~方程(6)采取以下形式:

$$\nabla^2 e - \nabla^2 \theta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \omega, \quad (7)$$

$$I^{\alpha-1} \nabla^2 \theta = (\dot{\theta} + \tau_0 \ddot{\theta}) \cdot \omega + \varepsilon (\dot{e} + \tau_0 \ddot{e}), \quad (8)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{e}{\omega} + \frac{4}{\beta^2 \omega} \frac{u}{r} - \frac{\theta}{\omega}, \quad (9)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \left(v - \frac{2}{\beta^2 \omega} \right) e + \frac{2}{\beta^2 \omega} \frac{u}{r} - \frac{\theta}{\omega}, \quad (10)$$

$$\text{其中: } \omega = \frac{1}{1 - \alpha' T_0}; \varepsilon = \frac{(3\lambda_0 + 2\mu_0)^2 \alpha^T T_0}{\rho^2 c_E c_1^2};$$

$$\beta^2 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\mu_0}.$$

边界条件:

$$\sigma_{rr}(a, t) = 0, \quad (11)$$

$$\theta(a, t) = \theta_1 \delta(t), \quad (12)$$

其中: θ_1 是常数并且 $\delta(t)$ 是 Dirac delta 函数。

2 方程求解

运用拉普拉斯变公式将控制方程变换到拉氏域进行求解,即

$$L[I_n F(t)] = \frac{1}{s^n} L[F(t)], \quad (13)$$

得到拉氏域控制方程:

$$(\nabla^2 - s^2 \omega) \bar{e} = \nabla^2 \bar{\theta}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\theta} &= s^\alpha (1 + \tau_0 s) \cdot \omega \cdot \bar{\theta} + \\ &\varepsilon \cdot s^\alpha (1 + \tau_0 s) \bar{e}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{\bar{e}}{\omega} - \frac{4}{\beta^2 \omega} \frac{\bar{u}}{r} - \bar{\theta}, \quad (16)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \left(\omega - \frac{2}{\beta^2 \omega} \right) \cdot \bar{e} + \frac{2}{\beta^2 \omega} \frac{\bar{u}}{r} - \bar{\theta}. \quad (17)$$

拉氏域边界条件:

$$\sigma_{rr}(a, s) = 0, \theta(a, s) = \frac{\theta_1}{s}. \quad (18)$$

根据方程(14)和方程(15),得到

$$\begin{aligned} \{ \nabla^4 - \nabla^2 [s^\alpha (1 + \tau_0 s) (\omega + \varepsilon) + s^2] + \\ s^{\alpha+2} (1 + \tau_0 s) \cdot \omega \} (\bar{e}, \bar{\theta}) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

方程(19)可表示为

$$(\nabla^2 - m_1^2)(\nabla^2 - m_2^2)(\bar{e}, \bar{\theta}) = 0, \quad (20)$$

其中: m_1 和 m_2 为特征方程的正根:

$$\begin{aligned} m^4 - m^2 [s^\alpha (1 + \tau_0 s) (\omega + \varepsilon) + \\ s^{\alpha+2} (1 + \tau_0 s) \cdot \omega] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

根据贝塞尔函数解的形式,方程(20)的解为

$$\bar{\theta}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 A_i(s) K_{1/2}(m_i r), \quad (22)$$

$$\bar{e}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 A'_i(s) K_{1/2}(m_i r), \quad (23)$$

其中: A_i 和 A'_i 为根据边界条件确定的参数。

通过特征方程的基本公式,得到

$$m_{1,2} = \sqrt{\frac{[s^\alpha(1+\tau_0 s)(\omega+\epsilon)+s^2] \pm [s^\alpha(1+\tau_0 s)(\omega+\epsilon)+s^2]^2 - 4s^{\alpha+2}(1+\tau_0 s) \cdot \omega}{2}}, \quad (24)$$

因此,由方程(22),方程(23)和方程(14),得到

$$A'_i(s) = \frac{m_i^2}{m_i^2 - s^2} A_i(s), \quad (25)$$

从而得到

$$\bar{e}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i^2}{m_i^2 - s^2} A_i(s) K_{1/2}(m_i r). \quad (26)$$

根据贝塞尔函数的推导关系和式(26),得到

$$\bar{u}(r, s) = -\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 \frac{A'_i(s) K_{3/2}(m_i r)}{m_i}. \quad (27)$$

结合方程(22)、方程(26)、方程(27),得到

$$\bar{\sigma}_{rr}(r, s) = \frac{1}{\nu\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 \frac{A_i(s)}{m_i^2 - s^2} \left[s^2 K_{1/2}(m_i r) + \frac{4m_i}{\beta^2 r} K_{3/2}(m_i r) \right], \quad (28)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(r, s) = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(r, s) = \frac{1}{\nu\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 \frac{A_i(s)}{m_i^2 - s^2} \left[\left(s^2 - \frac{2m_i^2}{\beta^2} \right) K_{1/2}(m_i r) - \frac{2m_i}{\beta^2 r} K_{3/2}(m_i r) \right]. \quad (29)$$

将式(22)、式(28)代入边界条件(18),得到参数 $A_1(s)$ 和 $A_2(s)$:

$$A_1(s) = -\frac{B_2 \theta_1 \sqrt{a}}{B_1 B_4 - B_2 B_3}, \quad (30)$$

$$A_2(s) = \frac{B_1 \theta_1 \sqrt{a}}{B_1 B_4 - B_2 B_3}, \quad (31)$$

其中: $B_1 = \frac{s^2 K_{1/2}(m_1 a) + \frac{4m_1}{\beta^2 a} K_{3/2}(m_1 a)}{m_1^2 - s^2}$,

$$B_2 = \frac{s^2 K_{1/2}(m_2 a) + \frac{4m_2}{\beta^2 a} K_{3/2}(m_2 a)}{m_2^2 - s^2},$$

$$B_3 = K_{1/2}(m_1 a), B_4 = K_{1/2}(m_2 a)。$$

3 拉普拉斯反变换

为了求得物理域中的温度、位移和应力,需要对 \bar{u} 、 $\bar{\theta}$ 和 $\bar{\sigma}$ 进行拉普拉斯反变换。由于所求得的 \bar{u} 、 $\bar{\theta}$ 和 $\bar{\sigma}$ 的表达式十分复杂,因此,有必要采用 Riemann-sum 方法来对其进行数值反变换。借助这种方法,任何在拉普拉斯域中的函数 $\bar{f}(x, p)$ 都可以

变换到时间域,其公式如下:

$$f(x, t) = \frac{e^{\beta t}}{t} \left[\frac{1}{2} \bar{f}(x, \beta) + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N \bar{f}\left(x, \beta + \frac{in\pi}{t}\right) (-1)^n \right], \quad (32)$$

其中: Re 是实部; i 是虚数单位; $\beta t \approx 4.7$ 。

4 算例

在计算中,取铜材料,列出相关参数如下:

$$\lambda_0 = 7.76 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2},$$

$$\mu_0 = 3.86 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2},$$

$$\kappa_0 = 386 \text{ N} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \tau_0 = 0.01, K = \frac{386N}{Ks},$$

$$c_E = 383.1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}, T_0 = 293 \text{ K}^{-1},$$

$$\beta^* = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \rho = 8954 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$\eta = 8886.73 \text{ s} \cdot \text{m}^{-2}, \theta_0 = 1, \theta_1 = 1。$$

研究温度对无限大空心球体材料参数的影响,考虑 $\omega = 0.5, \omega = 1.0, \omega = 1.5$ 等 3 种情况,所得各物理量分布规律如图 1~图 8 所示。

图 1、图 2 分别表示当 $\alpha = 1.0$ 和 $\alpha = 2.0$ 时的无

量纲温度的分布。从图 1、图 2 可以看出,当分数阶参数不变时,无量纲温度随着 ω 的增大而减小;而当 ω 不变时,无量纲温度随着分数阶参数的增大也减小。

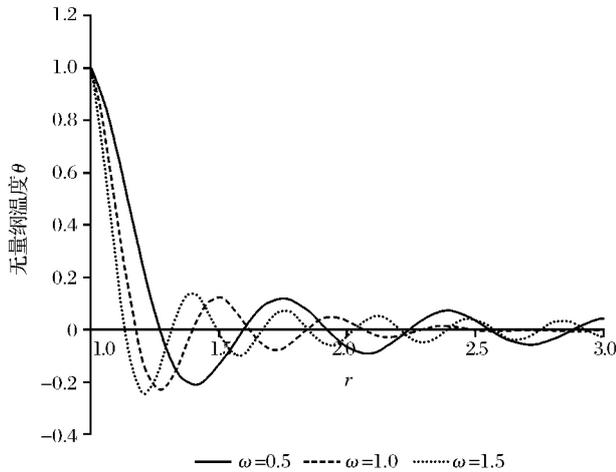


图 1 当 $\alpha = 1.0$ 时的无量纲温度分布
Fig.1 Dimensionless temperature distribution at that time $\alpha = 1.0$

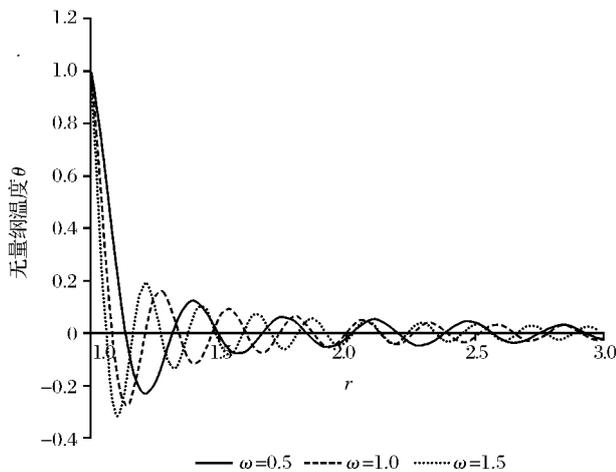


图 2 当 $\alpha = 2.0$ 时的无量纲温度分布
Fig.2 Dimensionless temperature distribution at that time $\alpha = 2.0$

图 3、图 4 分别表示无量纲位移的分布。从图 3、图 4 可以看出,无量纲位移随着 ω 的增大而减小,但是随着分数阶参数的增大而增大。

图 5、图 6 分别表示无量纲径向应力的分布。由图 5、图 6 可以看出,无量纲径向应力随着 ω 的增大而减小,而且随着分数阶参数的增大也减小。

图 7、图 8 分别表示无量纲环向应力的分布,由图 7、图 8 可以看出,无量纲环向应力同样也是随着 ω 的增大而减小,而且随着分数阶参数的增大也减小。

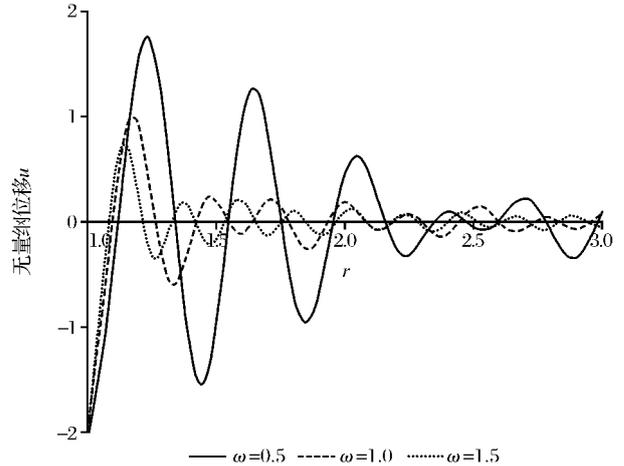


图 3 当 $\alpha = 1.0$ 时的无量纲位移分布
Fig.3 Dimensionless displacement distribution at that time $\alpha = 1.0$

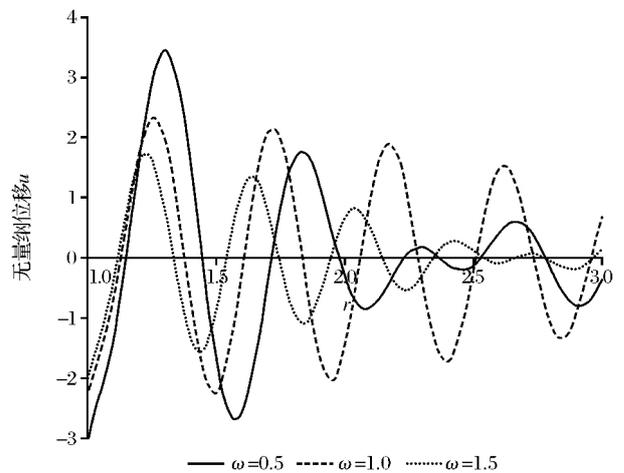


图 4 当 $\alpha = 2.0$ 时的无量纲位移分布
Fig.4 Dimensionless displacement distribution at that time $\alpha = 2.0$

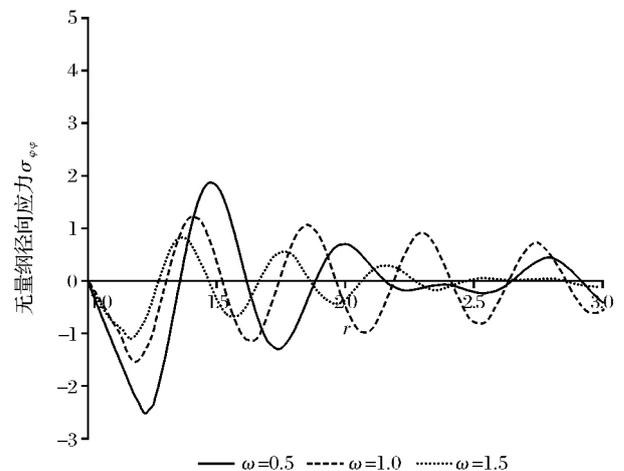
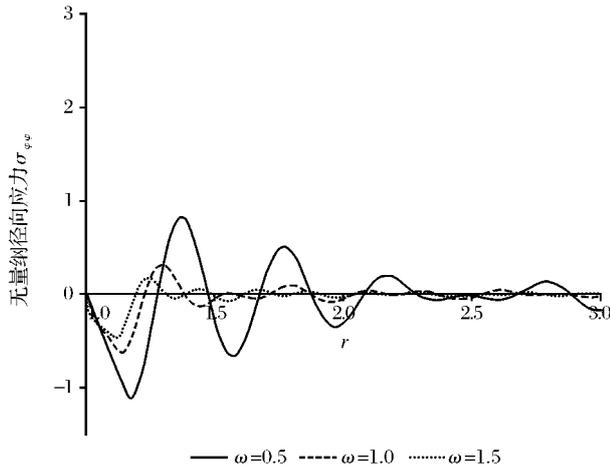
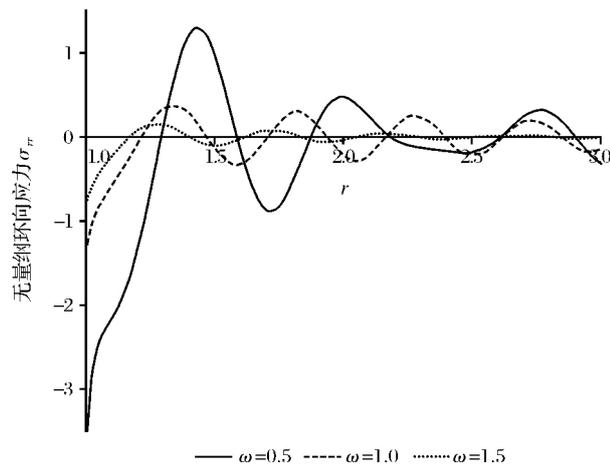
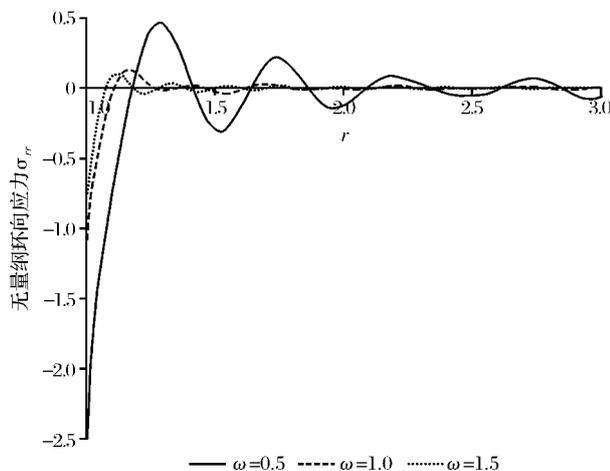


图 5 当 $\alpha = 1.0$ 时的无量纲径向应力分布
Fig.5 Dimensionless radial stress distribution at that time $\alpha = 1.0$

图6 当 $\alpha=2.0$ 时的无量纲径向应力分布Fig.6 Dimensionless radial stress distribution at that time $\alpha=2.0$ 图7 当 $\alpha=1.0$ 时的无量纲环向应力分布Fig.7 Dimensionless hoop stress distribution at that time $\alpha=1.0$ 图8 当 $\alpha=2.0$ 时的无量纲环向应力分布Fig.8 Dimensionless hoop stress distribution at that time $\alpha=2.0$

5 结论

基于 Youssef 分数阶广义热弹理论,研究结构的材料参数随着温度变化的动态响应。通过分析无量纲温度、位移和应力的分布,可以得出:

(1)各物理量的非零值只在有限范围内,即热波传播速度有限;

(2)当材料参数受温度影响时,各物理量的峰值和范围受到影响;

(3)分数阶参数的变化对无量纲温度、位移以及应力的影响也不同,因此考虑适当的分数阶参数对研究材料真实的力学行为较为重要;

(4)无量纲温度、位移、径向应力和环向应力靠近球形空腔内边缘处达到峰值,峰值随着 ω 的增大而减小。

参考文献:

- [1] Sherief H H, Elmihiery A E M, Elhagary M A. Generalized Thermoelastic Problem for an Infinitely Long Hollow Cylinder for Short Times[J]. Journal of Thermal Stresses, 2004, 27:885-902.
- [2] Darabseh T, Yilmaz N, Bataineh M. Transient Thermoelasticity Analysis of Functionally Graded Thick Hollow Cylinder Based on Green-Lindsay model[J]. International Journal of Mechanics & Materials in Design, 2012, 8(3):247-255.
- [3] Aouadi M. A Problem for an Infinite Elastic Body with a Spherical Cavity in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion[J]. International Journal of Solids & Structures, 2007, 44(17):5711-5722.
- [4] Banik S, Kanoria M. Two-temperature Generalized Thermoelastic Interactions in an Infinite Body with a Spherical Cavity[J]. International Journal of Thermophysics, 2011, 32(6):1247-1270.
- [5] Abouelregal A E. A Problem of a Semi-infinite Medium Subjected to Exponential Heating Using a Dual-Phase-Lag Thermoelastic Model[J]. Applied Mathematics, 2011, 2(5):619-624.
- [6] Yu Y J, Tian X G, Lu T J. On Fractional Order Generalized Thermoelasticity with Micromodeling[J]. Acta Mechanica, 2013, 224(12):2911-2927.
- [7] Sarkar N, Lahiri A. The Effect of Fractional Parameter on a Perfect Conducting Elastic Half-space in Generalized Magneto-thermoelasticity[J]. Meccanica, 2013, 48(1):231-245.
- [8] Sherief H, El-Latief A M A. Effect of Variable Thermal Conductivity on a Half-space under the Fractional Order Theory of Thermoelasticity[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 74(13):185-189.
- [9] 何天虎,徐业守,李林.温度相关中空柱的分数阶电磁热弹问

- 题研究[J].甘肃科学学报,2015,27(3):1-7.
- [10] 何天虎,李林.分数阶热弹理论下的广义电磁热弹问题[J].兰州理工大学学报,2016,42(2):167-172.
- [11] Youssef H M.Theory of Fractional Order Generalized Thermoelasticity[J].J.Heat Trans.,2010,132:61301.
- [12] Youssef H M.Two-dimensional Generalized Thermoelasticity Problem for a Half-space Subjected to Ramp-type Heating [J].Eur.J.Mech.A-Solids,2006,25(5):745-763.

Study on Temperature Dependent Material Properties under Fractional Order Thermoelastic Theory

Ma Yongbin, Li Qi

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract Based on the fractional generalized thermoelastic theory proposed by Youssef, the author will study on the material properties' dynamic response of infinite boundary roughly heat shock including ball cavity along with temperature changes. Then, the author will take the Laplace transformation and numerical inverse transformation technology to solve the problem and get the model's dimensionless temperature, displacement and stress variation trend. As shown in the distribution diagram, the thermal wave propagation distance will be decreased when material property parameters change with temperature, meanwhile, the dimensionless temperature, displacement and stress are significantly affected.

Key words Fractional order thermoelastic; Thermal shock; Material parameter; Temperature dependency; Hollow sphere