文章编号：1673-5196(2006)04-0138-04

一类四阶差分方程边值问题的正解

王大斌，马双红

(兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州 730050)

摘要：利用锥上的不动点定理对一类四阶差分方程进行了讨论，得到了一个及两个正解的存在性的充分条件.

关键词：差分方程；锥；正解；边值问题

中图分类号：O175.7 **文献标识码**：A

Positive solutions for a class of boundary value problems of fourth order difference equation

WANG Da-bin，MA Shuang-hong

(School of Science，Lanzhou Univ. of Tech.，Lanzhou 730050，China)

Abstract：By using the theorem of fixed points on cone a class of boundary value problems of fourth order difference equation was discussed and the sufficient condition of existence of one or two positive solutions was obtained.

Key words：difference equation；cone；positive solution；boundary value problem

设 $a,b\in Z$，记$[a,b]=\{a,a+1,\cdots,b\}$，$[a,b)=\{a,a+1,\cdots,b-1\}$，$[a,\infty)=\{a,a+1,\cdots\}$，其他的区间可类似定义.令 $T\geqslant 1$ 是固定的自然数，考虑下述边值问题：

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} \Delta^4(u)+f(k,u(k))=0 \\ \qquad k\in[0,T] \\ u(0)=u(T+4)=\Delta^2u(0)= \\ \qquad \Delta^2u(T+2)=0 \end{cases}$$

正解的存在性，$f:[0,T]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$连续.

当 $T\in R$ 时对边值问题(P)正解的存在性的研究见文[1,2].本文的工作是受文[3～5]的启发.

1 预备知识

作如下假定：

$$E=\{u\mid u:[0,T+4]\to \mathrm{R}\}$$

$$\forall u\in E,\quad \|u\|=\max_{k\in[0,T+4]}|u(k)|$$

则 E 为 Banach 空间.$G(k,\tau)$是下述边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta^2u(k)=0, \quad k\in[0,T+2] \\ u(0)=u(T+4)=0 \end{cases}$$

的 Green 函数.且由文[4]可知

$$G(k,\tau)=\frac{1}{T+4}\begin{cases} (T+4-k)(\tau+1) \\ \qquad (0\leqslant\tau\leqslant k-2) \\ k(T+3-\tau) \\ \qquad (k-1\leqslant\tau\leqslant T+2) \end{cases}$$

显然有 $G(k,\tau)\geqslant 0$，$k\in[0,T+4]$，$\tau\in[0,T+2]$.

由文[4]知 $H(k,s)=\sum_{\tau=0}^{T+2}G(k,\tau)g(\tau,s)$是(P)的 Green 函数.其中

$$g(\tau,s)=\frac{1}{T+2}\begin{cases} (T+2-\tau)(s+1) & (0\leqslant s\leqslant\tau-2) \\ \tau(T+1-s) & (\tau-1\leqslant s\leqslant T) \end{cases}$$

显然 $g(\tau,s)\geqslant 0$，$\tau\in[0,T+2]$，$s\in[0,T]$.

为了叙述并证明本文的主要结果，需以下引理：

引理 1[6] $\forall k\in[0,T+4]$，$\tau\in[0,T+2]$：

$$\frac{G(k,\tau)}{G(\tau+1,\tau)}\leqslant 1$$

引理 2[6] 对于$\forall k\in[1,T+3]$，$\tau\in[0,T+2]$：

$$\frac{G(k,\tau)}{G(\tau+1,\tau)}\geqslant\frac{1}{T+3}$$

引理 3[5] 设 $u(k)$在$[0,T+2]$上有定义，在$[0,T]$上 $\Delta^2u(k)\leqslant 0$，且存在 $k^*\in[1,T+1]$，使得 $u(k^*)\leqslant u(k)$，$k\in[0,T+2]$，则 $u(k)$在$[0,T+2]$上恒为常数.

引理 4 假设 $u:[0,t+4]\to R$ 满足

$$\Delta^2u(k)\leqslant 0\qquad (k\in[0,T+2])$$

收稿日期：2005-08-24

作者简介：王大斌(1978-)，男，甘肃临夏人，硕士，助教.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$u(0)=u(T+4)=0$$

则
$$\min_{k\in[1,T+3]}u(k)\geqslant\frac{1}{T+3}\|u\|$$

证明　由引理 3 可知，$u(k)\geqslant 0, k\in[0,T+4]$.

令 $u(k_0)=\|u\|, k_0\in[0,T+4]$. 若 $k_0=0$ 或 $k_0=T+4$，则估计式成立.

下证当 $k_0\in[1,T+3]$时，估计式也成立.

则断言：对于$\forall k\in[1,k_0]$：

$$u(k)\geqslant\frac{1}{T+3}\|u\| \tag{1}$$

事实上，由 $\Delta^2u(k)\leqslant 0, k\in[0,T+2]$知，对于$\forall k\in[0,T+2]$，有

$$u(k+1)\geqslant\frac{1}{2}[u(k+2)+u(k)]$$

于是就有

$$u(k)\geqslant\frac{k}{k_0}\|u\|\geqslant\frac{1}{T+3}\|u\|$$
$$k\in[1,k_0], k_0\in[1,T+3]$$

从而式(1)成立.

同理可得$\forall k\in[k_0,T+3]$，有

$$u(k)\geqslant\frac{T+4-k}{T+4-k_0}\|u\|\geqslant\frac{1}{T+3}\|u\| \tag{2}$$

因此，结合式(1)与式(2)对，有

$$u(k)\geqslant\frac{1}{T+3}\|u\|$$

即
$$\min_{k\in[1,T+3]}u(k)\geqslant\frac{1}{T+3}\|u\|$$

定义 E 中的锥如下：

$$P=\left\{\begin{array}{l}u\in E\mid u(k)\geqslant 0, k\in[0,T+4];\\ \Delta^2u(k)\leqslant 0, k\in[0,T+2];\\ \min\limits_{k\in[1,T+3]}u(k)\geqslant\dfrac{1}{T+3}\|u\|\end{array}\right\}$$

BVP(P)有解等价于差分方程：

$$(Tu)(k)=\sum_{s=0}^{T}H(k,s)f(s,u(s))$$

有不动点. 其中 $T:E\to E$.

引理 5　$T:P\to P$ 全连续.

此引理的证明比较简单，故省去.

本文有以下所用各独立条件：

(H_1) $\lim\limits_{u\to 0^+}\min\limits_{k\in[0,T]}\dfrac{f(k,u)}{u}=\infty$;

(H_2) $\lim\limits_{u\to\infty}\min\limits_{k\in[0,T]}\dfrac{f(k,u)}{u}=\infty$;

(H_3) $\lim\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{k\in[0,T]}\dfrac{f(k,u)}{u}=0$;

(H_4) $\lim\limits_{u\to\infty}\max\limits_{k\in[0,T]}\dfrac{f(k,u)}{u}=0$.

2　主要结果

定理 1　设存在 $W>0$，使得

$$\max_{k\in[0,T]}f(k,u(k))\leqslant W\Big[\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)\Big]^{-1}$$
$$(0<u(k)\leqslant W)$$

(a) 如果(H_1)成立，则问题(P)有一个正解 u_1，使得 $0<\|u_1\|\leqslant W$;

(b) 如果(H_2)成立，则问题(P)有一个正解 u_2，使得 $\|u_2\|\geqslant W$;

(c) 如果(H_1)，(H_2)成立，则问题(P)有两个正解，使得 $0<\|u_1\|\leqslant W\leqslant\|u_2\|$.

证明　先证(a). 由条件(H_1)知，$\exists 0<\delta<W$，使得 $f(k,u(k))\geqslant Mu(k), 0<u(k)\leqslant\delta$, $\forall k\in[0,T]$. 此处

$$M=(T+3)^2\Big[\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=1}^{T}g(\tau,s)\Big]^{-1} \tag{6}$$

$\forall k^*\in[1,T+3]$，由引理 2 及式(6)有

$$(Tu)(k^*)=\sum_{\tau=0}^{T+2}G(k^*,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)f(s,u(s))\geqslant$$
$$\frac{M}{T+3}\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=1}^{T}g(\tau,s)\cdot u(s)\geqslant$$
$$\frac{\|u\|M}{(T+3)^2}\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=1}^{T}\frac{1}{T+3}g(\tau,s)=\|u\|$$

从而

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|, \forall u\in\partial\Omega_1\cap P,$$
$$\Omega_1=\{u\in E\mid\|u\|<\delta\} \tag{7}$$

令
$$\Omega_2=\{u\in E\mid\|u\|<W\}$$

则$\forall u\in\partial\Omega_2\cap P$，由引理 1 及题设有

$$(Tu)(k)\leqslant\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)f(s,u(s))\leqslant$$
$$\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)\cdot$$
$$W\Big[\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)\Big]^{-1}=W=\|u\|$$

从而有

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,\quad\forall u\in\partial\Omega_2\cap P \tag{8}$$

结合式(7)及式(8)并根据锥拉伸锥压缩定理[7,8]知，T 在 $P\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$中至少有一个不动点 u_1，即问题(P)至少有一正解 u_1，且 $\delta\leqslant\|u_1\|\leqslant W$.

(b) 令 $\Omega_1=\{u\in E\mid\|u\|<W\}$，则由(a)知

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,\qquad\forall u\in\partial\Omega_1\cap P \tag{9}$$

由条件(H_2)知，存在 $N>W$，使得

$$f(k,u(k))\geqslant Mu(k), u(k)\geqslant N, k\in[0,T]$$

此处 M 如(a)部分定义，令

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$N'=\max\{2W, N(T+3)\}$$
$$\Omega_2=\{u\in E \mid \|u\|<N_1\}$$

则

$$\forall u\in\partial\Omega_2\cap P$$
$$u(k)\geqslant\frac{1}{T+3}\|u\|=\frac{1}{T+3}N(T+3)=N$$
$$(k\in[1,T+3])$$

从而有

$$f(k,u(k))\geqslant Mu(k),\quad k\in[1,T] \tag{10}$$

$\forall k^*\in[1,T+3]$，由引理 2 及式(10)知

$$(Tu)(k^*)=\sum_{\tau=0}^{T+2}G(k^*,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)f(s,u(s))\geqslant$$
$$\frac{1}{T+3}\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)f(s,u(s))\geqslant$$
$$\frac{M\|u\|}{(T+3)^2}\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=1}^{T}g(\tau,s)=\|u\|$$

即

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,\quad\forall u\in\partial\Omega_2\cap P \tag{11}$$

结合式(9)和式(11)并根据锥拉伸锥压缩定理[7,8]知，T 在 $P\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$ 中至少有一个不动点 u_2，即问题(P)至少有一个正解 u_2，且 $\|u_2\|\geqslant W$.

(c) 从(a)与(b)两部分的证明知边值问题(P)有两个正解 u_1，u_2，使得 $0<\|u_1\|\leqslant W\leqslant\|u_2\|$.

定理 2 存在 $W>0$，使得

$$\min_{k\in[0,T]}f(k,u(k))\geqslant$$
$$W\Big[(T+3)\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)\Big]^{-1}$$

式中：$\frac{1}{T+3}W\leqslant u(k)\leqslant W$.

(a) 如果(H_3)成立，则问题(P)有一个正解 u_1，使得 $0<\|u_1\|\leqslant W$.

(b) 如果(H_4)成立，则问题(P)有一个正解 u_2，使得 $\|u_2\|\geqslant W$.

(c) 如果(H_3)，(H_4)成立，则问题(P)有两个正解 u_1，u_2，使得 $0<\|u_1\|\leqslant W\leqslant\|u_2\|$.

证明 先证明(a)部分. 由条件(H_3)知，$\exists\,0<\delta<W$，使得 $f(k,u(k))\leqslant Mu(k)$，$0<u(k)\leqslant\delta$，$\forall u(k)\leqslant\delta$，$k\in[0,T]$，此处

$$M=\Big[\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=1}^{T}g(\tau,s)\Big]^{-1} \tag{12}$$

令 $\Omega_1=\{u\in E \mid \|u\|<\delta\}$

$\forall u\in\partial\Omega_1\cap P$，由引理 1 及式(12)有

$$(Tu)(k)\leqslant\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)f(s,u(s))\leqslant$$
$$M\|u\|\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)=\|u\|$$

即

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,\quad\forall u\in\partial\Omega_1\cap P \tag{13}$$

令 $\Omega_2=\{u\in E \mid \|u\|<W\}$

$\forall u\in\partial\Omega_2\cap P$，$k^*\in[1,T+3]$，由引理 2 及定理中的假设有

$$(Tu)(k^*)\geqslant\frac{1}{T+3}\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)\times$$
$$f(s,u(s))\geqslant\frac{1}{T+3}\sum_{\tau=0}^{T+3}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)\cdot$$
$$W\Big[(T+3)\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)\Big]^{-1}=$$
$$W=\|u\|$$

从而

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,\quad\forall u\in\partial\Omega_2\cap P \tag{14}$$

结合式(13)和式(14)并根据锥拉伸锥压缩定理[7,8]可知，T 在 $P\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$ 中至少有一个不动点 u_1，即边值问题(P)至少有一个正解 u_1，且 $\delta\leqslant\|u_1\|\leqslant W$.

(b) 令 $\Omega_1=\{u\in E \mid \|u\|<W\}$，则由(a)知

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,\quad\forall u\in\partial\Omega_1\cap P \tag{15}$$

根据条件(H_4)知，存在 $N>W$，使

$$f(k,u(k))\leqslant Mu(k),\ u(k)\geqslant N,\ k\in[0,T]$$

需分两种情况来证明，即 f 是有界的或 f 是无界的两种情况.

(ⅰ) 设 f 是有界的，即存在 $R>0$，使得

$$f(k,u(k))\leqslant R,\ k\in[0,T],\ u(k)\in[0,\infty) \tag{16}$$

令 $N^1=\max\Big\{2W, R\sum_{\tau=0}^{T+2}G(k,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)\Big\}$

$\forall u\in P$，使得 $\|u\|=N^1$，由引理 1 及式(16)有

$$(Tu)(k)\leqslant\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)f(s,u(s))\leqslant$$
$$\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)R\leqslant N^1=\|u\|$$

从而

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,\ \forall u\in\partial\Omega_2\cap P,$$
$$\Omega_2=\{u\in E \mid \|u\|<W\} \tag{17}$$

(ⅱ) 设 f 是无界的，则存在 $N^1>\max\{2W, N\}$，使得

$$f(k,u(k))\leqslant f(k,N^1)$$
$$0\leqslant u(k)\leqslant N^1,\quad k\in[0,T] \tag{18}$$

令 $\Omega_2=\{u\in E \mid \|u\|<N^1\}$

$\forall u\in\partial\Omega_1\cap P$，由引理 1 及式(18)有

$$(Tu)(k)\geqslant\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)f(s,u(s))\leqslant$$
$$\sum_{\tau=0}^{T+2}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}g(\tau,s)f(s,N^1)\leqslant$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{\tau=0}^{T+2} G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T} g(\tau,s)MN^1 = N^1 = \|u\|$$

从而

$$\|Tu\| \leqslant \|u\|, \quad \forall u \in \partial\Omega_2 \cap P \quad (17)$$

结合式(15)及式(17)或式(19)根据锥拉伸锥压缩定理[7,8]知，T 在 $P\cap(\Omega_2\backslash\Omega_1)$ 中至少有一个不动点 u_2，即问题(P)至少有一正解 u_2，且 $\|u_2\|\geqslant W$.

(c) 从(a)与(b)两部分的证明知边值问题(P)有两个正解 u_1，u_2，使得 $0<\|u_1\|\leqslant W\leqslant\|u_2\|$.

下面举两个例子.

例 1　考虑边值问题

$$\begin{cases} \Delta^4(u)k+10^{-4}(u^2+2)=0, k\in[0,12] \\ u(0)=u(16)=\Delta^2u(0)=\Delta^2u(14)=0 \end{cases}$$

式中　$f(k,u)=10^{-4}(u^2+2)$

从 f 的表达式知：

$$\lim_{u\to0^+}\min_{k\in[0,12]}\frac{f(k,u)}{u}=\infty$$

$$\lim_{u\to\infty}\min_{k\in[0,12]}\frac{f(k,u)}{u}=\infty$$

从而定理 1 中的(H_1)，(H_2)成立.

设 $W>0$ 存在，使得

$$\max_{k\in[0,12]}f(k,u(k))\leqslant W\Big[\sum_{\tau=0}^{14}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{12}g(\tau,s)\Big]^{-1}$$

又

$$\max_{k\in[0,12]}f(k,u(k))\leqslant 10^{-4}(W^2+2)$$

$$(0\leqslant u(k)\leqslant W)$$

$$\sum_{\tau=0}^{14}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{12}g(\tau,s)\leqslant$$

$$\sum_{\tau=0}^{14}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{12}G(s+1,s)=$$

$$\sum_{\tau=0}^{14}\frac{1}{16}(\tau+1,15-\tau)\sum_{s=0}^{12}\frac{1}{14}(s+1,13-s)\leqslant$$

$$2\ 730$$

为了使

$$\max_{k\in[0,12]}f(k,u(k))\leqslant W\Big[\sum_{\tau=0}^{14}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{12}g(\tau,s)\Big]^{-1}$$

设

$$10^{-4}(W^2+2)\leqslant W[2\ 370]^{-1}\leqslant$$

$$W\Big[\sum_{\tau=0}^{14}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{T}G(\tau,s)\Big]^{-1}$$

即

$$0.590\ 4\leqslant W\leqslant 3.986\ 3$$

由定理 1 的(c)知该边值问题有两个正解 u_1，u_2，使得 $0<\|u_1\|\leqslant 0.590\ 4$，$\|u_2\|\geqslant 3.986\ 3$.

例 2　考虑下述边值问题

$$\begin{cases} \Delta^4(u)k+u^2e^{-|u|}=0,\ k\in[0,12] \\ u(0)=u(16)=\Delta^2u(0)=\Delta^2u(14)=0 \end{cases}$$

其中 $f(k,u)=u^2e^{-|u|}$，从 f 的表达式知：

$$\lim_{u\to0^+}\max_{k\in[0,12]}\frac{f(k,u)}{u}=0$$

$$\lim_{u\to\infty}\max_{k\in[0,12]}\frac{f(k,u)}{u}=0$$

从而定理 2 中的(H_3)，(H_4)成立.

设存在 $W\leqslant 2$，根据 f 的递增性当 $u(k)\in[0,2]$，从而有

$$\min_{k\in[0,12]}f(k,u(k))\geqslant\left(\frac{W}{15}\right)^2e^{-\frac{W}{15}}$$

$$\frac{W}{15}\leqslant u(k)\leqslant W$$

为了使

$$\min_{k\in[0,12]}f(k,u(k))\geqslant$$

$$W\Big[(12+3)\sum_{\tau=0}^{14}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{12}G(\tau,s)\Big]^{-1}$$

成立. 设

$$\left(\frac{W}{15}\right)^2e^{-\frac{W}{15}}\geqslant W\Big[(12+3)\sum_{\tau=0}^{14}G(\tau+1,\tau)\sum_{s=0}^{12}G(\tau,s)\Big]^{-1}$$

成立. 从而有

$$\left(\frac{W}{15}\right)^2e^{-\frac{W}{15}}\geqslant\frac{W}{15\times2\ 370}$$

即有 $0.006\ 1\leqslant W\leqslant 2$.

由定理 2 的(c)知道该边值问题有两个正解 u_1，u_2，满足 $0<\|u_1\|\leqslant 0.006\ 1$，$\|u_2\|\geqslant 2$.

参考文献：

[1] MA R Y, WANG H Y. On the existence of positive solutions of four-order ordinary differential equations [J]. Appl Anal, 1995 (59): 225-231.

[2] GRAEF J R, YANG B. On a nonlinear boundary value problem for four order equations [J]. Appl Anal, 1999(72): 439-448.

[3] HENDERSON J. Positive solutions for nonlinear difference equations [J]. Nonlinear Stud, 1997, 4(1): 29-36.

[4] WONG P J Y, AGARWAL R P. Multiple solutions of differential and partial difference equations with lidstone conditions [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2000(32): 699-725.

[5] AGARWAL R P, LALLI B S. Discrete polynomial interpolation, Green's functions, Maximum Principles, Error bounds and boundary value problems [J]. J Comp Math Appl, 1993, 25 (8): 3-39.

[6] SUN J P, LI W T. Multiple positive solutions of a discrete difference system [J]. Appl Math Comput, 2003(143): 213-221.

[7] 郭大均，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程的泛函方法 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1995.

[8] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1985.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net