

通信技术

二维受限编码信道容量的分析

张远平 王雅 仲波

(兰州理工大学计算机与通信学院, 兰州 730050)

摘要 分析证明了二维的游程限制码在水平和垂直方向上受限条件相同, 且 $k_2=d_2, d_2 \leq d_1, d_1 \leq k_1, d_1+d_2$ 的情况下信道容量为零。

关键词 容量 受限编码 二维

中图分类号 TN911.22; 文献标识码 A

游程限制码已经被广泛地应用于数字存储技术中, 尤其是磁记录和光记录^[1]。目前最常见的游程限制是 (d, k) 限制: 一个二元序列, 如果0的循环个数最小为 d_1 , 最大为 k_1 , 1的循环个数最小为 d_2 , 最大为 k_2 , 则称这个序列为一维的 (d_1, k_1, d_2, k_2) 游程受限码。目前研究的一维限制码, 都是假设1的循环个数为1, 只讨论0循环个数的变化, 此时如果0的循环在 d 和 k 之间, 则信道容量记为 $C(d, k)$ 。Calkin和Wilf给出了 $C(1, \cdot)$ 上下界的范围^[2]。Ashley证明了 $C(1, 2) = 0$ ^[3], Kato改进了这个证明, 并且给出当且仅当 $k > d + 1$ 时 $C(d, k) > 0$ ^[4]。

一个 $m \times n$ 的二元数组, 如果在水平方向0和1的限制分别满足 d_1, k_1 和 d_2, k_2 ; 垂直方向0和1的限制分别满足 d_3, k_3 和 d_4, k_4 , 则称这个限制为二维 $(d_1, k_1, d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4)$ 游程限制码。

二维的 $(d_1, k_1, d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4)$ 游程限制码的信道容量

$$C(d_1, k_1, d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4) = \lim_{m, n} \frac{\log_2 N(m, n | d_1, k_1, d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4)}{mn}$$

其中, $N(m, n | d_1, k_1, d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4)$ 为满足 $(d_1, k_1,$

$d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4)$ 限制的 $m \times n$ 的二元数组排列的个数^[5]。二维的游程限制码目前被广泛研究^[6-12]。文献[10]中, 证明了二维的 (d, k) 限制容量是存在的。Etzion等定义了二维的 $(d_1, k_1, d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4)$ 游程受限码^[12, 13], Golin等利用转移矩阵方法分析了一类二维的读写分离受限码的容量, 并给出了比较精确的估计^[14]。Kato在此基础上进一步细化了受限条件, 指出 d 和 k 在一些特定关系下容量的值^[15]。

本文分析的问题仍然基于水平和垂直方向上0和1的循环个数相等, 但在同一方向上它们的循环个数不等的情况; 要解决的是, 当 $d_1, k_1, d_2, k_2, d_3, k_3, d_4, k_4$ 取何值时, 信道容量是大于或者等于0的。文中提及的概念, 如对角线、块、行齐平、列齐平、行相交、列相交等参照文献[5]。

1 基本概念和结果

文献[5]中详细分析了当 $d_1=d_3, k_1=k_3, d_2=d_4, k_2=k_4$ 情况下, 如果 $k_2=d_2$ 且 $d_1 \leq d_2, k_1 \leq d_1+2d_2, C(d_1, k_1, d_2, d_2) > 0$ 。但是, 当 $d_1=d_3, k_1=k_3, d_2=d_4, k_2=k_4$ 情况下, 如果 $k_2=d_2$ 且 $d_1 \leq d_2, d_1 < k_1 < d_1+2d_2$, 容量是零还是正值仍然未知。

本文讨论当 $d_1=d_3, k_1=k_3, d_2=d_4, k_2=k_4$ 情况下, 如果 $k_2=d_2$ 且 $d_1 \leq d_2, d_1 < k_1, d_1+d_2$ 时容量的情况, 即把文献[5]中 k_1 讨论范围的上界缩小, 来研究容量的取值情况。

假设 $k_1=d_1+d_2$ 。则此二维限制码的容量即为 $C(d_1, d_1+d_2, d_2, k_2; d_1, d_1+d_2, d_2, k_2)$, 简写为 $C(d_1, k_1, d_2, d_2)$, 用符号 Φ 表示这个受限条件, 那么, 此容量记作 $C(\Phi)$ 。

2006年7月13日收到

第一作者简介: 张远平(1966—), 男, 汉族, 安徽无为, (双)博士, 教授, 硕士生导师, 研究方向: 算法设计与分析、组合论、矩阵分析、图论、编码理论、信息论等。E-mail: ypzhang@ut.cn.

*通信作者简介: 王雅(1981—), 女, 汉族, 陕西西安人, 硕士研究生, 研究方向: 信息论, 编码理论和信号处理等。E-mail: yawang163@163.com.cn.

引理1^[1] 只要满足上述受限条件, 那么二元数组中所有的1都在一个对角线或者块中。

引理2^[2] 只要满足上述受限条件, 且二元数组中每一个1都包含在一个对角线内, 那么此时的信道容量为0。

引理3^[3] 当 $d_1, d_2, k_1, k_2, 1 \leq i \leq 4$ 时,
 $C(d_1, k_1, d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4) = C(d_1, k_1, d_2, k_2; d_3, k_3, d_4, k_4)$ 。

2 容量分析

本文主要工作就是证明下述引理, 并给出满足受限条件的编码的具体构成形式。

引理4 若二维限制码满足上述受限条件, 则此限制码中所有的1都在对角线中。

由引理2可知, 只要所有的1都在对角线中, 其容量就为0。由引理1, 接下来要做的工作是分析它们在块中的情形。

情况1: 当二元数组中存在一个全1块。

假设一个 $m \times n$ 的二元数组中存在某一个满足的对角线, 且该对角线为右对角线, 因 $d_2=k_2$, 所以该对角线的每一行只能比下一行向右移一个位置, 称此对角线为D, 且它的周期为 (d_2, d_2) 。B为一个 $d_2 \times d_2$ 的全1块, $B \notin D$, 它们之间被0循环隔开, 且B位于D的右方, 如图1所示。

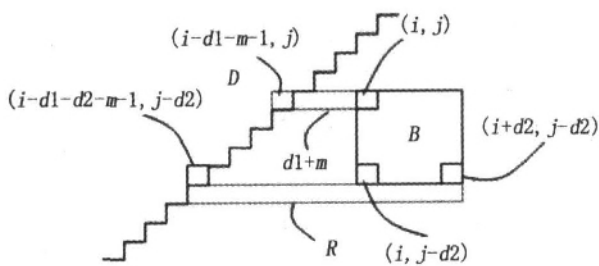


图1 二元数组

这里引入坐标系的概念, 假设块B最左上角位置的1在坐标系中的位置为 (i, j) , 设B最左上角位置的1距该行D的长度为 d_{1+m} , $0 \leq m \leq d_2$ 。那么, D中同样位于第j行的最右边1的位置为 $(i-d_1-m-1, j)$; B的最左下方位置的1的坐标为 $(i, j-d_2)$ 。在这一行上D的最右边的1的坐标为 $(i-d_1-d_2-m-1, j-d_2)$ 。则 $j-d_2$ 行从D到B的长度为 d_1+d_2+m , 根据受限条件, 知道0的循环个数在 d_1 和 d_1+d_2 之间, 可知 $m=0$, 此时的坐标分布

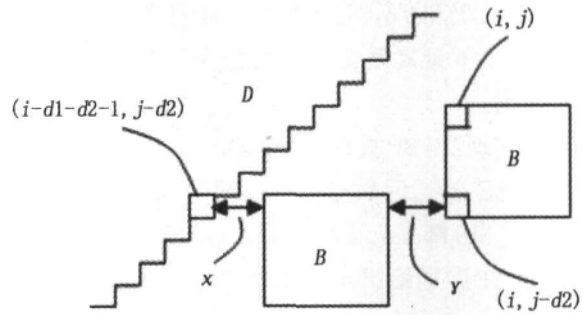


图2

是满足受限条件的。

(1) B下面一行, 即 $j-d_2-1$ 行, 如图1所示, 从 $i-d_1-d_2-1$ 位置到 $i+d_2$ 位置用R表示0的循环个数, 那么R为 D_1+2d_2+1 。事实上, 最大连0数只能为 d_1+d_2 , 所以不满足水平上的0的受限条件, 故在R中必然至少存在 d_2 个连续1, 使得0的连续个数满足其受限条件。考虑到垂直方向上1的连续个数只能为 d_2 , 引入另一个 $d_2 \times d_2$ 全1块 B' , 令 B' 位于B和D的中间, 如图2所示。假设 B' 和B行相交。B最左下角 $(i, j-d_2)$ 位置的1和D最右边 $(i-d_1-d_2-1, j-d_2)$ 位置上的1之间相隔 d_1+d_2 个0, 若B最左上角的1距D的长度为 x , $x \leq d_1$, 最右上角的1距B的长度为 y , $y \leq d_2$, $x+y > d_1+d_2$, 违背了0的水平受限条件, 所以 B' 和B不能行相交, 只能是行齐平。

(2) 假设 B' 和B之间有相隔, 由于已经证明它们行齐平, B'的位置如图3所示, V是紧靠B最左边一列的一段竖直的连续的0的个数, 从与D相交的位置 $(i-1, j+d_1-1)$ 开始到B最下面一行, 坐标为 $(i-1, j-2d_2)$, 显然, V的长度为 $d_1+2d_2-1 > d_1+d_2$, 与0的垂直受限相矛盾。从而得到B'与B是列齐平的。

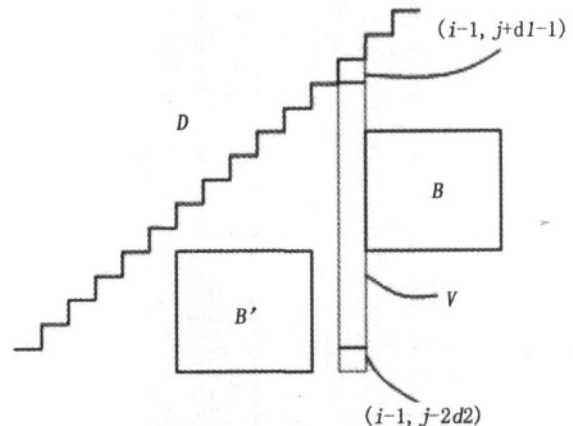


图3 B'与B相隔

故而, B_1 和 B_2 不但行齐平而且列齐平。假设成立, 它们上下延展就得到一个由无数个 $d_2 \times d_2$ 块组成的对角线。

由引理2得知, 此时 $C(\quad) = 0$ 。

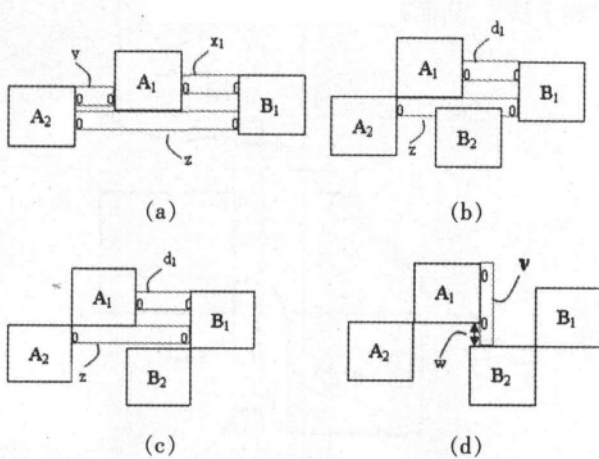
情况2: 当二元数组中存在两个全1块。

令 A_i 和 B_i 都是 $d_2 \times d_2$ 的全1块, $i = 1$ 。其实 A_i 和 B_i 是相同的, 在这里给出不同的形式, 只是为了便于后面的论述。

首先, 假设 A_1 和 B_1 部分行相交, 两者之间在水平上的距离为 x_1 , 且 B_1 位于 A_1 的右下方。令 x_1 是最小的0的循环长度, 则 $x_1 < d_1$ 。其它的构造可以用相似的方法来证明。

接着, 考虑 A_2 的位置。若 A_2 位于 A_1 的右边, 那么 A_2 与 B_1 之间距离必定小于 x_1 , 这与 $x_1 < d_1$ 相矛盾, 所以 A_2 只能在 A_1 的左边。如果 A_2 与 A_1 行相交, 如图4(a)所示。 A_2 与 A_1 之间0的循环长度为 y , $y < d_1$; 令 z 为 A_2 与 B_1 之间0的循环长度, 显然, $z = y + d_2 + x_1 > d_1 + d_2$, 与0的水平受限条件相矛盾。因 A_1 宽度为 d_2 , $x_1 < d_1$, $z < d_1 + d_2$, 可得 $y = 0$, $x_1 = d_1$, $z = d_1 + d_2$, 那么, A_2 与 A_1 是列齐平; 又因 A_2 和 B_1 之间的0循环要满足水平限制, 而 $y = 0$, 所以 A_2 与 A_1 也是行齐平。

下面, 考虑 B_2 的位置。若 B_2 在 B_1 的右边, 不能满足0循环的水平受限条件, 所以 B_2 只能位于 B_1 的左下方, 假设它们是部分列相交, 如图4(b)所示。因为 $z = d_1 + d_2$, 而 B_2 宽度为 d_2 , 但最短0循环长度为 d_1 , 所以 B_2 和 B_1 只能是列齐平。又因为 B_2 必须阻挡 B_1 下面一行, 使得其满足从 A_2 开始的0的水平循环, 所以 B_2 和 B_1 也是行齐平。如图4(c)所示。



考虑到0循环的垂直受限, 令 v 为 A_1 右面一行, 顶端与 A_1 的最上方一行齐平, 底端到 B_2 的最上方一行,

如图4(d)所示。 $v < d_1 + d_2$, 因 $d_1 < d_2$, 所以 B_2 和 A_1 可能列相交, 当它们列相交时, w 表示两者间的距离, $v = w + d_2 - d_1 - d_2$, 而 $w < d_1$, 可得 $w = d_1$ 。

以此类推, 可以得出 A_i 和 B_i 的位置, A_i 和 B_i 分别构成各自的块的对角线。

由引理2得知, 此时 $C(\quad) = 0$ 。

由上述两部分证明可以得到, 引理4成立。

根据引理3和引理4, 得到本文中心结果。

定理5 只要满足 $k_2 = d_2$, $d_1 < d_2$ 受限, $d_1 < k_1 - d_1 + d_2$, 则 $C(d_1, k_1, d_2, d_2) = 0$ 。

3 结论

本文在文献[5]的基础上分析了二维游程受限码在 $d_1 = d_3$, $k_1 = k_3$, $d_2 = d_4$, $k_2 = k_4$ 情况下, 如果 $k_2 = d_2$ 且 $d_1 < d_2$, $d_1 < k_1 - d_1 + d_2$ 时信道容量为0。缩小了受限的范围, 使得结果进一步精确。

参 考 文 献

- 1 Immink K A S. Coding techniques for digital recorders. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991
- 2 Calkin N J, Wilf H S. The number of independent sets in a gridgraph. Discrete Mathematics, 1998; 11: 54—60
- 3 Ashley J J, Marcus B H. Two-dimensional lowpass filtering codes. IEEE Transactions on Communication, 1998; 46(6): 724—727
- 4 Kato A, Zeger K. On the capacity of two-dimensional run length constrained channels. IEEE Transactions on Information Theory, 1999; 45(5): 1527—1540
- 5 Etzion T, Paterson K G. Zero/positive capacities of two-dimensional runlength-constrained arrays. IEEE Transactions on Information Theory, 2005; 51(9): 3186—3199
- 6 Immink K A S, Segel P H, Wolf J K. Codes for digital recorders. IEEE Transactions on Information Theory, 1998; 44: 2260—2299
- 7 Week IV W, Blahut R. The capacity and coding gain of certain checker board codes. IEEE Transactions on Information Theory, 1998; 44: 1193—1203
- 8 Roth R M, Segel P H, Wolf J K. Efficient coding schemes for the hard-square model. IEEE Transactions on Information Theory, to be published
- 9 Segel P H, Wolf J K. Bit stuffing bounds on the capacity 2-dimensional constrained arrays. In: IEEE International Symposium on Information Theory. Boston: IEEE, 1998: 323
- 10 Kato A. On the capacity of two-dimensional runlength constrained channels. IEEE Transactions on Information Theory, 1999; 45: 1527—1540
- 11 Ashley J J, Marcus B H. Two-Dimensional Lowpass filtering codes. IBM research division. Almaden Research Center, IBM Res Rep

- RJ 1996, 10045 (90541)
- 12 Etzion T. Cascading methods for runlength- limited arrays. IEEE Trans Inform Theory, 1997; 43: 319—324
- 13 Etzion T. On two- dimensional runlength limited codes. IEEE International Workshop on Information Theory, Salvador: IEEE, 1990
- 14 Colin Mordecai J, Yong Xuerong, Zhang Yuanping. New upper and lower bounds on the channel capacity of read/write isolated memory. Discrete Applied Mathematics, 2004; 140: 35—48
- 15 Kato A, Zeger Kenneth. Partial characterization of positive capacity region of two- dimensional asymmetric run length constrained channels. IEEE Transactions on Information Theory, 2000; 46(7) : 2666—2670

Analysis for the Channel Capacity of a Two- dimensional Run- length Constrained Code

ZHANG Yuanping, WANG Ya*, ZHONG Bo

(School of Computer and Communication, Lanzhou Univ of Tech, Lanzhou 730050)

[Abstract] The channel capacity is zero when the horizontal and vertical constrains of two- dimensional run- length constrained code are the same, as well as $k_2=d_2, d_2 \leq d_1, d_1 \leq k_1, d_1+d_2$. This conclusion is analyzed and proved.

[Key words] capacity constraint coding two- dimensional

(上接第 3819 页)

有 $u(t, t_0, u_0) < M^*, t \geq t_0$ 。取 $\epsilon = \frac{M^*}{C}$, 即得 (7) 式成立。若不然, 对任意 $M^* > 0$, 存在 $T > t_0, T = T(M^*)$, 使得

$\int_T u(t, t_0, u_0) dt > M^*$, 不妨取 $M^* = \frac{(1+M_1+M_2) + 1}{C}$, 此

时设 $T \in (t_q, t_{q+1}]$, 则对任意 $t \in T$ (不妨设 $[T, t]$ 上有 m 个脉冲时刻), 对 $u = cu + \sum_k u_k$ 积分可得

$$u(t) = u(T) + \sum_{j=q}^{q+m} d_j u_j - \int_T^t cu(s) ds + \sum_{j=q}^{q+m} [\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_{j-1}(t_j - t_{j-1}) +$$

$$u_{q+m} u_{q+m}(t - t_{q+m})] < +M_1 + M_2 - cM^* = -1, \text{ 矛盾。}$$

故 (7) 式成立, 即得系统 (3) 零解是 L - 一致稳定的。再由定理 2, 知系统 (1) 是 (h_0, h, L) - 一致稳定的。

(h₀, h, L) - stability Analysis of Impulsive Hybrid systems

WANG Wei, FU Xilin*

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Ji'nan 250014)

[Abstract] (h_0, h, L) - stability of impulsive hybrid systems is developed by the direct method and the comparison method.

[Key words] impulsive hybrid systems (h_0, h, L) - stability direct method comparison method

参 考 文 献

- 1 Fu X L, Liu X Z. Uniform boundedness and stability criteria in terms of two measures for impulsive integro- differential equations. App Math Comput, 1999; 102(2- 3): 237—255
- 2 Fu X, Qi J, Liu Y. General comparison principle for impulsive variable time differential equations with applications. Nonlinear Anal, 2000; 42:1421—1429
- 3 Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations. Singapore, World Scientific, 1989
- 4 Lakshmikantham V, Liu X. Impulsive hybrid systems and stability theory. Dyn Sys Appl 1998; 7(1): 1—9
- 5 Lakshmikantham V, Leela S. Differential and integral inequalities Vol, I and II. New York: Academic Press, 1969
- 6 张艳燕, 傅希林. 脉冲混合系统的稳定性分析. 山东师范大学学报(自然科学版), 2003; 6: