

文章编号: 1673-5196(2018)03-0115-04

基于粒间毛细作用探讨界限含水量

周凤玺^{1,2}, 张海威¹, 张家齐¹

(1. 兰州理工大学 土木工程学院 甘肃 兰州 730050; 2. 兰州理工大学 西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 土的界限含水量是研究土体物理力学性质及工程分类的重要指标. 通过建立两球形颗粒之间的液桥作用模型, 采用环形近似的方法给出毛细作用力和液桥体积之间的定量关系, 并通过分析毛细作用力随液桥体积的变化规律, 从微观角度对土体的塑限和液限进行探讨. 参数分析结果表明, 毛细作用随着液桥体积的增加先增大后减小; 其随液桥体积的变化过程中有 2 个明显的拐点, 即颗粒间的相互作用的状态变化存在界限含水量. 本次研究从微观角度解释了土体稠度变化的特性, 并为液塑限的概念化提供了理论依据.

关键词: 液塑限; 毛细作用力; 液桥体积; Young-Laplace 方程; 环形假设

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A

Probe into liquid and plastic limits of fine-grained soils with intergranular capillary

ZHOU Feng-xi^{1,2}, ZHANG Hai-wei¹, ZHANG Jia-qi¹

(1. College of Civil Engineering, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China; 2. Western Engineering Research Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering, the Ministry of Education, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: The limit moisture of soil is an important index in investigation of its physical and mechanical properties and its engineering classification. By establishing the liquid-bridge action model between two spherical particles and applying the circular approximation method, the quantitative relation of capillary force to liquid-bridge volume was given out and the liquid limit and plastic limit of the soil mass were probed by means of analyzing the changing rule of capillary force with liquid bridge volume in the microscopic term. The result of parameter analysis shows that the capillary force will increase at first and then decrease with the liquid-bridge volume, and will have two obvious inflexions with it, meaning that there will be moisture limit during state change of interaction between particles. Characteristics of soil mass consistency change will be explained in the microscopic term, offering a theoretical basis for conceptualization of the liquid and plastic limits.

Key words: liquid plastic limits; capillary force; liquid bridge volume; Young-Laplace equation; ring hypothesis

土体的稠度是土体重要的物理状态特征之一, 不同的稠度状态分界处相应的含水量称为稠度界限^[1]. 1911 年瑞典农学家 Atterberg 提出土从固态过渡到液态的 5 个阶段, 将液限定义为黏滞液态与塑性状态的界限含水量, 将塑限定义为塑性状态与半固体状态的界限含水量, 通常称为 Atterberg 限度^[2]. 太沙基将它应用于土力学, 并且在 1926 年提出揉搓法测定土的塑限, 但人为因素的影响得出的结果差异很大; 1932 年 Casagrande 设计了碟式仪,

创立了较精确的液限测定方法, 沿用至今; 1914 年由瑞典国家方面提出圆锥手落法测定液限, 并定义为圆锥仪法; 此后, 日本北乡繁等人用这种方法做了系统的试验研究; 中国水电、交通、冶金等部门也在这方面做了比较系统的研究, 并认为圆锥仪联合测定液、塑限其结果在双数坐标上线性关系比较好. 目前光电液、塑限联合测定仪被用于测定土的液、塑限, 已被列入交通部标准公路土工试验规范, 其原理依然同圆锥仪法一样, 只不过减少了人为因素的干扰. Feng^[3]指出, 用圆锥仪联合测定法所得到的液限值只是抗剪强度的一个反映, 无法代表土的可塑性, 所以用液、塑限联合测定法并不能反应真实的液塑限值. 关于测定土的液、塑限的各种改进方法很多,

收稿日期: 2017-01-13

基金项目: 国家自然科学基金(51368038), 甘肃省环保厅科研项目(GSEP-2014-23)

作者简介: 周凤玺(1979-), 男, 甘肃会宁人, 博士, 教授.

但其适用性仍有存疑且没有达到行业共识, 各国之间的测定标准大不相同, 甚至不同方法之间的结果也不相一致. 由于现有的液、塑限方法具有不确定性, 很多专家学者也试图寻找其他测定液、塑限的方法, 其中 Schmitza^[4] 试图找出黏土中黏土矿物和塑性指数之间的关系, 且建立了一个 EBS 参数. 如果能找到塑性指数和液性指数之间的关系, 就可以确定塑性指数, 得到土更确切的可塑性描述. Dolinar 和 Trainer^[5] 也做了类似的研究, 但结果只适用于非膨胀性土. 截止目前关于土体界限含水量的研究, 尤其是对液塑限的研究, 大多是采用试验的方法进行分析, 而从水力学的角度对液塑限进行理论方面的研究鲜有文献报道.

随着研究的不断深入, 对土粒间吸力的性状, 土体颗粒之间的相互作用有了较为全面的认识^[6]. 其中, 非饱和土中水的运移是在毛细作用力的驱动下完成的, 而土体随含水量的变化会表现出不同的物理状态, 具有不同的物理力学性质. 土颗粒之间的连接强度和活动难易程度均与含水量有关. 显然, 在一定湿度环境下的土颗粒间由液桥产生的毛细作用在颗粒作用力中有着重要的影响^[7]. 本次研究通过基于两球形颗粒间的液桥作用模型, 采用环形近似的方法对粒间毛细作用进行分析, 并基于颗粒间毛细作用力和液体体积之间的关系对土体的液塑限机理进行探讨分析.

1 粒间毛细作用模型

Mitarai 等^[8] 用毛细长度 a_c 来描述颗粒重力和毛细作用力的相对大小为

$$a_c = \sqrt{\gamma / (\rho_l g)} \quad (1)$$

其中: γ 为表面张力; ρ_l 为液体密度; g 为重力加速度.

研究发现室温状态下颗粒粒径 $R \leq 3.9 \text{ mm}$ 时, 液桥的毛细作用力起主导作用; Willett 等^[9] 研究表明在液桥的毛细作用力中考虑颗粒浮力的影响与不考虑浮力影响所产生的相对误差小于 0.1%, 故本次研究中不考虑重力及浮力的影响, 即由引力效应引起的弯液面变形可以忽略不计.

如图 1 所示, 半径分别为 R_1 和 R_2 的两球形颗粒及粒间液桥的几何模型. 球心分别为 O_1 和 O_2 ; 两颗粒邻近边缘的距离 $n_1 n_2$ 长为 d , 固-液接触角为 θ , 填充角分别为 β_1 和 β_2 ; 采用环形近似方法, 假设液桥轮廓线 $l_1 l_2$ 的圆心为 O_3 , 两固-液接触点的横坐标为 x_1 和 x_2 , 液桥的两个主曲率半径为 r_1, r_2 .

以 $O_1 O_2$ 两球心连线为 x 轴, 以 OO_3 为 y 轴,

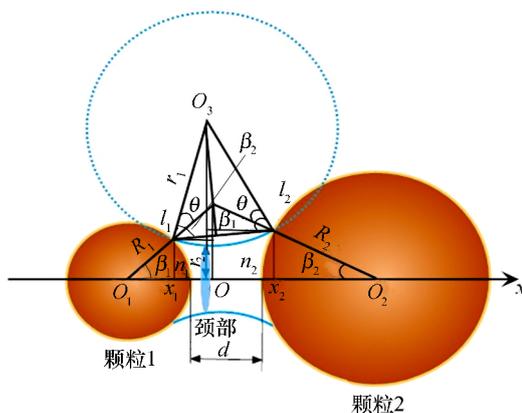


图 1 液桥连接的两刚性球体接触模型

Fig.1 Contact model of two rigid spheres connected with liquid bridge

那么弯液面方程可表示为

$$y^2(x) = m^2 + n^2 - x^2 + 2m \sqrt{(n^2 - x^2)} \quad (2)$$

式中: $m = r_1 + r_2 = r_1 \sin(\beta_2 + \theta) + R_2 \sin \beta_2, n = r_1$;

$$r_1 = \frac{R_1(1 - \cos \beta_1) + d + R_2(1 - \cos \beta_2)}{\cos(\beta_1 + \theta) + \cos(\beta_2 + \theta)};$$

$$r_2 = R_1 \sin \beta_1 - r_1 [1 - \sin(\beta_1 + \theta)];$$

$$\beta_2 = 2 \arctan \left[\frac{d + 2R_1 \tan(\frac{\beta_1}{2})}{d + 2R_2} \right].$$

1.1 液桥的体积

根据图 1 中的几何关系可知液桥的体积为

$$V_w = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx - \frac{\pi}{3} [(2 - 3 \cos \beta_1 + \cos^3 \beta_1) R_1^3 + (2 - 3 \cos \beta_2 + \cos^3 \beta_2) R_2^3] \quad (3)$$

式中: $y(x)$ 表示为弯液面气-水交界面的几何曲线形状.

式(3)经过整理后得到

$$V_w = \pi \{ 2(m^2 + r_1^2) r_1 \times \cos\left(\frac{\beta_1 + \beta_2 + 2\theta}{2}\right) \cos(\beta_1 - \beta_2) - \frac{1}{3} r_1^3 [\cos^3(\beta_1 + \theta) + \cos^3(\beta_2 + \theta)] + mr_1^2 [(\beta_1 + \beta_2 + 2\theta - \pi) - \sin(\beta_1 + \beta_2 + 2\theta) \cos(\beta_1 - \beta_2)] \} - \frac{\pi}{3} [(2 - 3 \cos \beta_1 + \cos^3 \beta_1) R_1^3 + (2 - 3 \cos \beta_2 + \cos^3 \beta_2) R_2^3] \quad (4)$$

1.2 毛细作用合力

忽略重力影响, 当液桥自由表面发生静态变形时, 气-水-固交界面必须满足 Young-Laplace 方程^[10]

$$u_a - u_w = \gamma(1/r_1 - 1/r_2) \quad (5)$$

式中: $u_a - u_w$ 为基质吸力; u_a, u_w 分别为孔隙水压力、孔隙气压力; γ 为液体的表面张力.

根据 Gorge 法^[11],毛细作用的合力由基质吸力作用 f_p 和表面张力作用 f_γ 两部分组成,如图 2 所示.结合式(5)即可得

$$F_{cap} = 2\pi r_2 \gamma + \pi r_2^2 \gamma (1/r_1 - 1/r_2) = \pi \gamma r_2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1} \right) \quad (6)$$

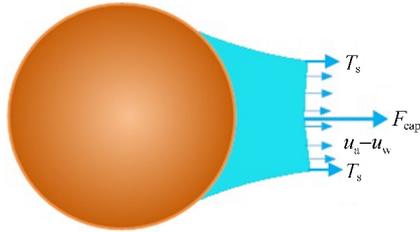


图 2 液桥“颈部”暴露的力

Fig.2 Exposed force in liquid bridge “neck”

对于液桥体积一定的弯液桥系统,两颗粒之间的间距也不可能无限大,弯液桥不可能无限细,而是存在一个颗粒间距最大值,可表示为^[12]

$$D_r = \left(1 + \frac{\theta}{2} \right) V_w^{1/3} \quad (7)$$

式中: D_r 是极限断裂距离.

2 模型计算结果的分析与讨论

2.1 颗粒间毛细作用力与液桥体积的关系

上述式(4)和式(6)分别给出了液桥体积和毛细作用合力的表达式.以颗粒 1 的直径为边长的正方形截面为参考,把毛细作用合力转化为吸应力:

$$\sigma_s = \frac{F_{cap}}{(2R)^2} \quad (8)$$

为了方便分析毛细作用与液桥体积的关系,考虑固-液接触角为 $\theta_1 = \theta_2 = 15^\circ$ 时,图 3a 的上幅给出了当颗粒间距 $d = 0$,在颗粒半径 R_1, R_2 分别为 0.03、0.04、0.05 mm 的情况下时颗粒间毛细作用与液桥体积之间关系曲线.可以看出等径颗粒接触时,随着液桥体积的增加,粒间毛细作用产生的吸引力 σ_s 的值先增大后减小,并且随着颗粒粒径的增大,毛细作用的变化区间将随之增加.

考虑两颗粒半径为 $R_1 = R_2 = 0.05$ mm 时,在颗粒间距 d 分别为 0、0.001、0.005、0.01 mm 的情况下,粒间毛细作用与液桥体积之间关系如图 3b 的上幅所示.从图中可以看出,随着颗粒间距的增加,毛细作用最大值减小,而与液桥的作用范围将增加.

图 3c 的上幅给出了不等粒径颗粒的粒间吸应力与液桥体积之间的关系曲线.由图可知,不等径颗粒之间接触且颗粒间距不变时,不同的粒径比将引起毛细作用最大值发生显著变化,随粒径比增加而

增加,而且毛细作用的变化区间将随之增加.

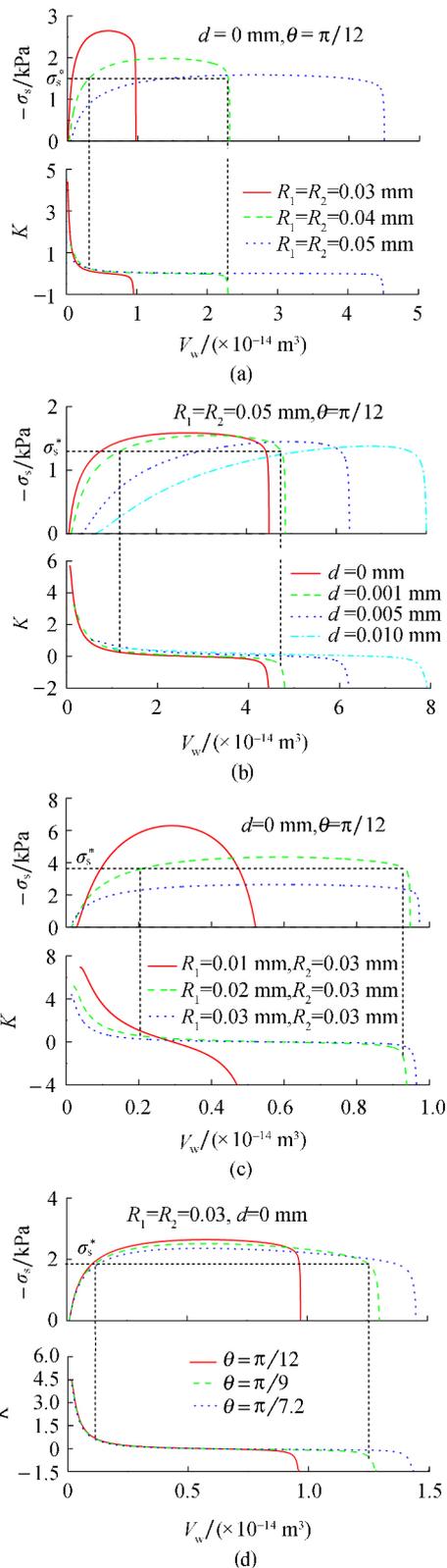


图 3 粒间吸应力 σ_s 与液桥体积 V_w 之间的关系

Fig.3 Dependence of suction stress σ_s on liquid bridge volume V_w

图 3d 的上幅给出了当 $d = 0, R_1 = R_2 = 0.03$ mm 时,不同固-液接触角 θ 的吸应力与液桥体积之间的关系曲线.由图可知,颗粒之间接触且颗粒间距不

变时,不同接触角将引起吸应力的显著变化,吸引力随接触角的增加而减小.显然对于两颗粒接触模型而言,粒径的大小比接触角对毛细作用的影响更大.

通过图 3a~d 的上幅可知,颗粒间液桥体积颗粒间吸应力首先随着液桥体积的增加而增加,当达到最大值后将随着液桥体积的增加而减小.这一结果与汤连生等^[13]通过试验分析得到的“对特定的非饱和土,毛细作用力随含水率先增大而后减小,即存在确定的含水率临界值”的结论一致,充分验证了本文数值解的正确性.

2.2 毛细作用与液塑限的内在联系

土的界限含水量是研究其物理力学性质及其工程分类的重要指标.随着含水量的增加细颗粒土由半固态过渡到可塑状态,即为塑限,是可塑状态含水量下限;而后由可塑状态过渡到流体状态,即为液限,是可塑状态含水量上限.为了分析毛细作用与液塑限之间的关系,在不同参数下,图 3 的下幅绘出了颗粒间吸应力 σ_s 的变化率 $K = d\sigma_s/dV_w$ 与液桥体积之间的关系曲线.由图可知, σ_s 的斜率的变化先迅速减小而后出现第一个拐点,然后 σ_s 的变化率趋于平缓,此时土体中的毛细作用力发生了较大改变.由于非黏性细粒土中毛细作用力是土体吸力的主要组成部分,说明土体稠度状态发生改变,由半固态变为可塑状态,相当于土体的塑限. σ_s 的斜率曲线经过平缓阶段后出现第二个拐点,随后迅速下降,说明颗粒间毛细作用随着液桥体积的增大而迅速减小,最终趋于饱和.此时土体状态已由可塑状态变为黏滞液体状态,相当于土体的液限.图中斜率平缓阶段相当于土体的可塑阶段.以上分析与土体液塑限变化规律完全吻合.从图 3 中还可以看出,不同参数下斜率曲线的 2 个拐点所对应的颗粒间毛细力 σ_s 基本相等,说明随着液桥体积的变化,当吸应力超过某一临界值 σ_s^* 时(见图 3),土体的稠度状态就发生变化.因此, σ_s^* 所对应的液桥体积与土体的塑限和液限有着直接的对对应关系.在两颗粒接触系统中,液桥连接着两颗粒.由于粒径不同,作用于两颗粒的吸应力大小不同.

3 结论

通过建立两球形颗粒间毛细作用模型,基于 Young-Laplace 方程和弯液面环形假设,分析了毛

细作用力与液桥体积的关系.结果表明,颗粒间毛细作用随着液桥体积的增加,呈先增大后减小的趋势;在毛细作用为主要颗粒间作用力的土体中,毛细作用随液桥体积的变化率曲线上存在 2 个明显的拐点,从微观角度上解释了土体稠度状态的变化以及与液塑限关系.

参考文献:

- [1] DOLINAR B, SKRABL S. Atterberg limits in relation to other properties of fine-grained soils [J]. *Acta Geotechnica Slovenica*, 2013, 10(2): 4-13.
- [2] GADALLAH A A, RUSSELL E R, YODER E J. Determination of Atterberg limits using moisture tension methods [J]. *Transportation Research Record: Soil Properties*, 1974 (497): 69-80.
- [3] FENG T W. Using a small ring and a fall-cone to determine the plastic limit [J]. *Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 2004, 130(6): 630-635.
- [4] SCHMITZ R M, SEHROEDER C, CHARLIER R. Chemo-mechanical interactions in clay: a correlation between clay mineralogy and Battenberg limits [J]. *Applied Clay Science*, 2004, 26(8): 351-358.
- [5] BOMANA D, LUDVIK T. Liquid limit and specific surface of clay particles [J]. *Geotechnical Testing Journal*, 2004, 27(6): 580-584.
- [6] FAURE A. A new conception of the plastic and liquid limits of clay [J]. *Soil and Tillage Research*, 1980, 1(2): 97-105.
- [7] ZHOU Fengxi, MA Qiang. Exact solution for capillary interactions between two particles with fixed liquid volume [J]. *Applied Mathematics & Mechanics*, 2016, 37(12): 1-10.
- [8] MITARAI N, NORI F. Wet granular materials [J]. *Advances in Physics*, 2006, 55(1/2): 1-45.
- [9] WILLETT C D, ADAMS M J, HOHNSON S A, et al. Capillary bridges between two spherical bodies [J]. *Langmuir*, 2000, 16(24): 9396-9405.
- [10] LIU S H, SUN D A. Simulating the collapse of unsaturated soil by DEM [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2002, 26(6): 633-646.
- [11] MOLENKAMP F, NAZEMI A H. Interactions between two rough spheres, water bridge and water vapour [J]. *Géotechnique*, 2003, 53(2): 255-264.
- [12] LIAN G, THORNTON C, ADAMS M J. A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies [J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1993, 161(1): 138-147.
- [13] 张鹏程, 汤连生, 邓钟尉. 非饱和土湿吸力与含水率的定量关系研究 [J]. *岩土工程学报*, 2012, 34(8): 1453-1457.