

文章编号: 1673-5196(2018)03-0159-07

特性参数与温度相关的非局部广义热弹问题的动态响应

何天虎, 乔孟辉

(兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 基于 Green-Lindsay 广义热弹性理论和 Eringen 的非局部弹性理论, 研究了材料特性参数与温度相关、受热冲击和应力冲击作用的半无限大体的一维非局部热弹动态响应问题. 借助于拉普拉斯积分变换及其数值反变换, 经数值求解, 得到了无量纲温度、位移、应力的分布规律, 并用图形进行表示. 分别研究了温度相关的材料特性参数、分数阶参数及非局部效应参数对温度、位移和应力的影响效应, 结果表明: 温度相关的材料特性参数对各物理量的影响显著; 分数阶系数对温度影响较大, 对位移和应力影响不大; 非局部效应参数对位移和应力有显著影响, 对温度影响较小.

关键词: 广义热弹性; 非局部效应; 温度相关性; 拉普拉斯变换

中图分类号: O343.6 **文献标识码:** A

Dynamic response to nonlocal generalized thermoelasticity problem with temperature-dependent characteristic parameters

HE Tian-hu, QIAO Meng-hui

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: Based on Green-Lindsay's generalized thermoelasticity theory and Eringen's nonlocal elasticity theory, the problem of dynamic response of a semiinfinite object with temperature-dependent material characteristic parameters to one-dimensional nonlocal thermoelasticity is investigated when the object is subjected to with temperature-dependent properties and thermal shock and stress shock. By means of Laplace integral transform and its numerical inversion, the distributions of the non-dimensional temperature, displacement and stress are obtained with numerical solution and illustrated graphically. The effect of the temperature-dependent material characteristic parameters, fractional-order parameter, and nonlocal effect parameter on temperature, displacement and stress is investigated, respectively. The result shows that the temperature-dependent material characteristic parameters will have an obvious influence on every physical quantities, the influence of fractional-order coefficient on the temperature will be greater, but a little on the displacement and stress, and the nonlocal effect parameter will have a remarkable influence on the displacement and stress, but less on the temperature.

Key words: generalized thermoelasticity; nonlocal effect; temperature-dependence; Laplace transform

随着激光脉冲、微波等加热技术的发展以及器件的小型化, 采用经典热弹性理论已不能准确描述时间极短情形下材料的热力学行为. 经典热弹性理论认为热的传播速度无限大, 而这与实验观测相悖, 在极低温或超快速传热中, 热的传播速度有限^[1]. 为

了弥补经典热弹性理论的不足, 人们建立了广义热弹性理论, 其中, 由 Lord 和 Shulman^[2] (L-S) 及 Green 和 Lindsay^[3] (G-L) 分别建立的广义热弹性理论得到了较广泛的应用. 在 L-S 理论中, 通过引入一个热松弛时间因子及热流率的乘积项, 对经典的 Fourier 热传导方程进行修正; 而在 G-L 理论中, 则在本构方程和能量方程中各引入了一个热松弛时间因子. 这两种理论都可描述热的波动性, 即热以有限

收稿日期: 2016-11-08

基金项目: 国家自然科学基金(11372123)

作者简介: 何天虎(1973-), 男, 甘肃靖远人, 博士, 教授.

的速度进行传播.基于广义热弹性理论,学者们已开展了大量的研究工作^[4-6].

自 Abel 首次运用分数阶导数求解等时曲线问题中积分方程的解之后,分数阶微积分已被成功用来修正许多现有的物理模型,尤其是在热传导、扩散、粘弹性等领域.就空间而言,分数阶导数表征的是一个物理过程在整个空间的性质,而整数解导数仅表征该物理过程的某一特定位置的局部性质;就时间而言,分数阶导数刻画整个物理或力学过程的演化历史,而整数阶导数仅描述该物理过程某时间的变化^[7].分数阶微分模型弥补了整数阶微分模型的不足,使理论与实验结果更加吻合,进而更好地促进用理论来研究工程实际问题.Youssef^[8-9]通过将 Riemann-Liouville 分数阶积分算子引入广义热传导方程中,建立了分数阶广义热弹性理论;Sherief 等^[10]则提出了另一类全新的分数阶广义热弹性理论.Yu 等^[11]基于 G-L 热弹性理论将 Caputo 导数引入 Fourier 热传导方程,得到了 G-L 型分数阶热弹性理论,并分析讨论了分数阶系数对热弹响应的影响.

以上理论主要适用于求解热作用时间属微尺度而变形体的几何尺寸属宏观尺度的热弹性问题.而当变形体的特征几何尺寸属微尺度时,其力学响应呈现出很强的尺寸相关性.为了描述这种尺寸相关效应,学者们对经典的连续介质力学理论进行了修正,得到了可描述尺寸相关效应的非局部连续介质力学理论,如:Eringen^[12]的非局部弹性理论、Aifantis^[13-14]的应变梯度理论及 Yang 等^[15]的修正的耦合应力理论等.其中,Eringen 的非局部弹性理论,作为目前发展最成熟、应用最广泛的非局部连续介质力学理论之一,认为:变形体内某点处的应力不仅与该点处的应变相关,还与变形体内其它点处的应变(包括应变的历史)相关,只是这种作用效应随距离的增大而逐渐衰减.Yu 等^[16]将非局部效应引入热弹本构方程研究了基于 Eringen 的非局部模型尺度相关的广义热弹问题.

一般而言,材料的特性参数,如弹性模量、泊松比、热膨胀系数及热传导率等,与温度相关,这将进而影响材料的热弹行为,学者们开展了相关的研究工作来揭示这种相关性^[17-18].

目前,有关考虑非局部效应的广义热弹问题的研究还不多见,本文基于 Eringen 非局部弹性理论和 G-L 广义热弹性理论,考虑分数阶热传导,研究材料特性参数与温度相关的半无限体受热冲击和应力冲击同时作用时的热弹响应问题.

1 非局部效应下的 G-L 广义热弹模型

1.1 Eringen 非局部弹性理论

非局部理论认为,在应力场某区域 V 内,对位置矢量为 r 的任一点,该点的应力 $\sigma_{ij}(r)$,不仅与该点的应变 $\epsilon_{ij}(r)$ 相关,还与区域 V 内其它点处的应变 $\epsilon_{ij}(r')$ 相关, r' 指区域内除 r 点以外的其它位矢点.非局部理论下的本构关系为

$$\sigma_{ij}(r) = \int_V \kappa(r, r', \chi) \sigma'_{ij}(r') dV(r') \quad (1)$$

$$\sigma'_{ij}(r') = \lambda \epsilon_{kk}(r') \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(r') \quad (2)$$

$$\epsilon_{ij}(r') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j(r')}{\partial r'_i} + \frac{\partial u_i(r')}{\partial r'_j} \right) \quad (3)$$

式中: σ_{ij} 是非局部应力; σ'_{ij} 是经典应力; λ 和 μ 为拉梅常数; δ_{ij} 为 Kronecker delta 变量; u_i 是位移矢量; $\kappa(r, r', \chi)$ 为核函数,它由质点 r 和 r' 间的距离 $|r' - r|$ 及非局部参数 χ 所决定. χ 的定义如下: $\chi = ea/l$, l 为外部特征尺寸,代表整个研究对象的大小, a 为内部特征长度,表示非局部空间的大小.对不同研究对象, l 可为位错宽度,或裂纹长度,或应力波波波长等; a 可为晶格尺寸,化学键长等. e 为材料特征参数,由不同材料性质决定. e 的大小反应了微观非局部尺度.本文将 ea 作为非局部效应参数.

考虑到非局部积分的计算存在一定的困难,Eringen 通过假设和代换,得到了简化后的非局部弹性的微分本构表达式

$$(1 - (ea)^2 \nabla^2) \sigma_{ij}(x) = \sigma'_{ij}(x') \quad (4)$$

1.2 非局部热弹模型

将 Eringen 的应力非局部效应引入 G-L 广义热弹性理论,考虑 Yu 等^[11]提出的分数阶热传导,相应的控制方程如下:

$$\sigma_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (5)$$

$$q_{i,i} = -\rho T_0 \dot{\eta} \quad (6)$$

$$(1 - (ea)^2 \nabla^2) \sigma_{ij}(x) = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - \gamma(\theta + \tau_1 \dot{\theta}) \delta_{ij} \quad (7)$$

$$\rho \eta = \gamma \epsilon_{kk} + \frac{\rho C_E}{T_0} (\theta + \tau_2 \dot{\theta}) \quad (8)$$

$$D_C^{-1} q_i = -\kappa \theta_{,i} \quad (9)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

式中: σ_{ij} 为应力分量; ϵ_{ij} 为应变分量; ρ 为质量密度; q_i 为热流向量分量; ϵ_{kk} 为体积膨胀率; κ 为热传导系数; η 为熵密度; τ_1, τ_2 为热松弛时间; C_E 为比热; $\theta = T - T_0$, T 为绝对温度, T_0 为参考温度; $\gamma =$

$(3\lambda + 2\mu)\alpha_i, \alpha_i$ 为线性热膨胀系数; $D_C^{\alpha-1}$ 为 Caputo 分数阶导数, α 为分数阶系数且 $0 < \alpha \leq 1$.

考虑与温度相关的材料特性参数, 可假定

$$\lambda = \lambda_0 f_1(\theta), \quad \mu = \mu_0 f_2(\theta), \quad \kappa = \kappa_0 f_3(\theta) \quad (11)$$

式中: $\lambda_0, \mu_0, \kappa_0$ 均为常数; $f_i(\theta) (i=1, 2, 3)$ 为无量纲的温度函数. 当材料特性参数与温度不相关时, $f_i(\theta) \equiv 1$, 且 $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, \kappa = \kappa_0$.

Rishin 等^[19]研究了金属材料的弹性模量与温度之间的联系, 结果证实, 材料弹性模量随温度的增加而单调减小. 一般情况下, 设

$$f_i(\theta) = f(\theta) = 1 - \zeta\theta \quad (i=1, 2, 3) \quad (12)$$

式中: ζ 为材料常数, 取经验值. 当 $|T - T_0|/T_0 \ll 1$ 时, 可简化为 $f(\theta) \approx 1 - \zeta T_0$.

对各向同性材料, 当材料特性参数与温度相关、计入非局部时, 由式(5~9)可得其相应的控制方程如下:

$$(1 - (ea)^2 \nabla^2) \sigma_{ij}(x) = (1 - \zeta T_0) \times (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma(\theta + \tau_1 \dot{\theta}) \delta_{ij}) \quad (13)$$

$$\rho \eta = (1 - \zeta T_0) \gamma \varepsilon_{kk} + \frac{\rho C_E}{T_0} (\theta + \tau_2 \dot{\theta}) \quad (14)$$

$$D_C^{\alpha-1} q_i = - (1 - \zeta T_0) \kappa \theta_{,i} \quad (15)$$

2 问题的描述及基本方程

为了应用上述理论, 考虑材料特性参数与温度相关的半无限体同时受热冲击和应力冲击的一维广义热弹问题的动态响应. 对一维问题, 可设其非零的位移分量为 $u_x = u(x, t)$, 则方程(5, 6)和(13~15)可简化为

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\rho T_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (17)$$

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma = (1 - \zeta T_0) \times [(\lambda + \mu)\varepsilon - \gamma(\theta + \tau_1 \dot{\theta})] \quad (18)$$

$$\rho \eta = (1 - \zeta T_0) \gamma \varepsilon + \frac{\rho C_E}{T_0} (\theta + \tau_2 \dot{\theta}) \quad (19)$$

$$D_C^{\alpha-1} q = -\kappa (1 - \zeta T_0) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (20)$$

由方程(16~20), 可得温度及位移的耦合的控制方程分别为

$$(1 - \zeta T_0) \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right) \right] = \rho \left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (21)$$

$$(1 - \zeta T_0) \gamma T_0 D_C^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \rho C_E D_C^{\alpha-1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \tau_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = \kappa (1 - \zeta T_0) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (22)$$

为了正则化各物理量, 引入如下无量纲量:

$$x^* = c_0 \eta_0 x \quad u^* = c_0 \eta_0 u \quad (ea)^* = c_0 \eta_0 (ea)$$

$$t^* = c_0^2 \eta_0 t \quad \tau_1^* = c_0^2 \eta_0 \tau_1 \quad \tau_2^* = c_0^2 \eta_0 \tau_2$$

$$\theta^* = \frac{\theta}{T_0} \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\mu} \quad c_0^2 = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \quad \eta_0 = \frac{\rho C_E}{\kappa}$$

对方程(21, 22)进行正则化, 简洁起见, 略去各物理量右上角的*号, 正则化后的方程如下:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right) = \vartheta \beta^2 \left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (23)$$

$$g D_C^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \vartheta D_C^{\alpha-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vartheta \tau_2 D_C^{\alpha-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (24)$$

$$\text{式中: } \beta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, b = \frac{\gamma T_0}{\mu}, g = \frac{\gamma}{\rho C_E}, \vartheta = \frac{1}{(1 - \zeta T_0)}.$$

给定初始条件, 当 $t=0$ 时

$$u(x, t=0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = 0 \quad (25)$$

$$\theta(x, t=0) = \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t=0) = 0 \quad (26)$$

边界条件, 在 $x=0$ 时

$$\sigma(x=0, t) = -\sigma_0 H(t), \quad \theta(x=0, t) = \theta_0 H(t) \quad (27)$$

$$u(x \rightarrow \infty, t) = \theta(x \rightarrow \infty, t) = 0 \quad (28)$$

σ_0, θ_0 为固定值, $H(t)$ 为 Heaviside 函数.

3 拉氏变换及问题的求解

应用拉普拉斯变换公式

$$L[f(t)] = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad \text{Re}(p) > 0 \quad (29)$$

对方程(23, 24)进行拉普拉斯变换, 可得

$$\beta^2 \left[(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) \frac{d^2}{dx^2} - \vartheta p^2 \right] \bar{u} = b(1 + \tau_1 p) \frac{d\bar{\theta}}{dx} \quad (30)$$

$$p^\alpha g \frac{d\bar{u}}{dx} + \vartheta p^\alpha (1 + \tau_2 p) \bar{\theta} = \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} \quad (31)$$

对边界条件进行拉普拉斯变换, 可得

$$\bar{\sigma}(x=0, p) = -\frac{\sigma_0}{p}, \bar{\theta}(x=0, p) = \frac{\theta_0}{p}$$

$$\bar{u}(x \rightarrow \infty, p) = \bar{\theta}(x \rightarrow \infty, p) = 0 \quad (32)$$

联立方程(30, 31), 消去 $\bar{\theta}$, 得到 \bar{u} 满足的微分方程

$$\frac{d^4 \bar{u}}{dx^4} - m_1 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + m_2 \bar{u} = 0 \quad (33)$$

式中

$$m_1 = [\vartheta \beta^2 p^2 + gb p^a (1 + \tau_1 p) + \vartheta p^a \beta^2 (1 + \tau_2 p) \times (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)] / \beta^2 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)$$

$$m_2 = \frac{\vartheta^2 p^a \beta^2 (1 + \tau_2 p) p^2}{\beta^2 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)}$$

方程(33)的通解如下:

$$\bar{u} = C_1 e^{-k_1 x} + C_2 e^{k_1 x} + C_3 e^{-k_2 x} + C_4 e^{k_2 x} \quad (34)$$

式中: $C_i (i=1,2,3,4)$ 为 p 的参变量; k_1 和 k_2 是如下方程的两个特征根:

$$k^4 - m_1 k^2 + m_2 = 0$$

可得 k_1 和 k_2 为

$$k_1 = \sqrt{\frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2}}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2}}$$

类似地, $\bar{\theta}$ 满足的微分方程如下:

$$\frac{d^4 \bar{\theta}}{dx^4} - m_1 \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + m_2 \bar{\theta} = 0 \quad (35)$$

$$C_1 = -\frac{(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2 k_1 \sigma_0 - \vartheta p^2 k_1 \sigma_0 - b(1 + \tau_1 p) p^2 k_1 \theta_0}{\beta^2 (k_2^2 - k_1^2) p^3 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2 k_2 \sigma_0 - \vartheta p^2 k_2 \sigma_0 - b(1 + \tau_1 p) p^2 k_2 \theta_0}{\beta^2 (k_2^2 - k_1^2) p^3 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)}$$

$$C_4 = 0$$

将式(39)代入式(34),可得

$$\bar{u} = -\frac{(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2 k_1 \sigma_0 - \vartheta p^2 k_1 \sigma_0 - b(1 + \tau_1 p) p^2 k_1 \theta_0}{\beta^2 (k_2^2 - k_1^2) p^3 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)} e^{-k_1 x} + \frac{(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2 k_2 \sigma_0 - \vartheta p^2 k_2 \sigma_0 - b(1 + \tau_1 p) p^2 k_2 \theta_0}{\beta^2 (k_2^2 - k_1^2) p^3 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)} e^{-k_2 x} \quad (40)$$

将式(39)代入式(37),可得

$$C_{11} = \frac{\{[-(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2 + \vartheta p^2] [-(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2 + \vartheta p^2] \sigma_0 + b(1 + \tau_1 p) p^2 \theta_0\}}{b(1 + \tau_1 p) (k_2^2 - k_1^2) p^3 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)}$$

$$C_{22} = 0$$

$$C_{33} = \frac{\{[-(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2 + \vartheta p^2] [(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2 - \vartheta p^2] \sigma_0 - b(1 + \tau_1 p) p^2 \theta_0\}}{b(1 + \tau_1 p) (k_2^2 - k_1^2) p^3 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)}$$

$$C_{44} = 0$$

将式(41)代入式(36),可得

$$\bar{\theta} = \frac{\{[-(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2 + \vartheta p^2] [-(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2 + \vartheta p^2] \sigma_0 + b(1 + \tau_1 p) p^2 \theta_0\}}{b(1 + \tau_1 p) (k_2^2 - k_1^2) p^3 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)} e^{-k_1 x} + \frac{\{[-(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2 + \vartheta p^2] [(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2 - \vartheta p^2] \sigma_0 - b(1 + \tau_1 p) p^2 \theta_0\}}{b(1 + \tau_1 p) (k_2^2 - k_1^2) p^3 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)} e^{-k_2 x} \quad (42)$$

对方程(18)进行拉普拉斯变换,得到

其通解为

$$\bar{\theta} = C_{11} e^{-k_1 x} + C_{22} e^{k_1 x} + C_{33} e^{-k_2 x} + C_{44} e^{k_2 x} \quad (36)$$

式中: $C_{ii} (i=1,2,3,4)$ 为 p 的参变量.

将式(34,36)分别代入式(30),可得如下关系式:

$$C_{11} = \frac{\beta^2 \vartheta p^2 - \beta^2 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2}{b(1 + \tau_1 p) k_1} C_1$$

$$C_{22} = -\frac{\beta^2 \vartheta p^2 - \beta^2 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2}{b(1 + \tau_1 p) k_1} C_2$$

$$C_{33} = \frac{\beta^2 \vartheta p^2 - \beta^2 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2}{b(1 + \tau_1 p) k_2} C_3$$

$$C_{44} = -\frac{\beta^2 \vartheta p^2 - \beta^2 (1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2}{b(1 + \tau_1 p) k_2} C_4 \quad (37)$$

把式(34,36)代入边界条件(32),可得

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

$$C_2 e^{k_1 x} + C_4 e^{k_2 x} = 0$$

$$C_{11} + C_{22} + C_{33} + C_{44} = \frac{\theta_0}{p} \quad (38)$$

$$C_{22} e^{k_1 x} + C_{44} e^{k_2 x} = 0$$

将式(37)代入式(38),可得

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \bar{\sigma} = \frac{1}{\vartheta} \left(\beta^2 \frac{d\bar{u}}{dx} - b(1 + \tau_1 s) \bar{\theta}\right) \quad (43)$$

将式(40,42)代入式(43),可得

$$\bar{\sigma} = \frac{(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_2^2 \sigma_0 - \vartheta p^2 \sigma_0 - b(1 + \tau_1 p) p^2 \theta_0}{(k_2^2 - k_1^2) p (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)} e^{-k_1 x} - \frac{(1 + \vartheta (ea)^2 p^2) k_1^2 \sigma_0 - \vartheta p^2 \sigma_0 - b(1 + \tau_1 p) p^2 \theta_0}{(k_2^2 - k_1^2) p (1 + \vartheta (ea)^2 p^2)} e^{-k_2 x} \quad (44)$$

4 时域解

要得到各物理量在时域中的解,应将拉氏域中所得各物理量的解进行反变换.但鉴于拉氏域中解的复杂性,解析反变换是不可能的,因而,需采用数值反变换,常用的数值方法是 Riemann-sum 方法.在该方法中,拉氏域中的任一函数 $\bar{f}(x, p)$ 都可以数值反变换到时间域,其公式如下:

$$f(x, t) = \frac{e^{\beta t}}{t} \left[\frac{1}{2} \bar{f}(x, \beta) + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N \bar{f}\left(x, \beta + \frac{in\pi}{t}\right) (-1)^n \right]$$

式中: i 代表虚数单位; Re 代表实部; 当 β 满足 $\beta t \approx 4.7$ 时^[20], 可加速其收敛.

5 算例及分析

经拉普拉斯数值反变换,可得到半无限体中无量纲温度、位移及应力分布规律.在计算中,选择铜质材料进行数值模拟,其与温度不相关的性能参数如下: $\lambda = 77.6 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$, $\mu = 38.6 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$, $\rho = 8954 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\alpha_t = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $C_E = 383.1 \text{ J} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\kappa = 386 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $T_0 = 293 \text{ K}$, $\tau_1 = \tau_2 = 0.05$, $\theta_0 = 1$, $\sigma_0 = -1$.

数值计算分析分别考虑 3 种不同的情形:1) 分数阶参数和非局部效应参数不变,改变材料特性与温度相关性参数;2) 材料特性与温度相关性参数和非局部效应参数不变,改变分数阶参数;3) 材料特性与温度相关性参数和分数阶参数不变,改变非局部效应参数.所得结果如图 1~3 所示.

图 1 分别表示无量纲温度、位移、应力的分布规律.在此情形中,分数阶参数 $\alpha = 0.6$ 和非局部效应参数 $ea = 0.03$, 而表征温度相关性的参数 ϑ 分别取 1, 1.5 和 2. 从图 1a~1c 可以看出, 材料特性与温度相关性参数对各物理量的分布影响显著. 由 $\vartheta = 1/(1 - \zeta T_0)$, $f(\theta) \approx 1 - \zeta T_0$ 及式(11)可知, ϑ 取值越小, 材料特性参数就越大. 由图 1a 可知, 无量纲温度随特性参数增大而增大; 由图 1b 可知, 无量纲位移最大值随特性参数增大而减小; 由图 1c 可知, 无量纲应力的幅值随特性参数增大而增大. 对广义热

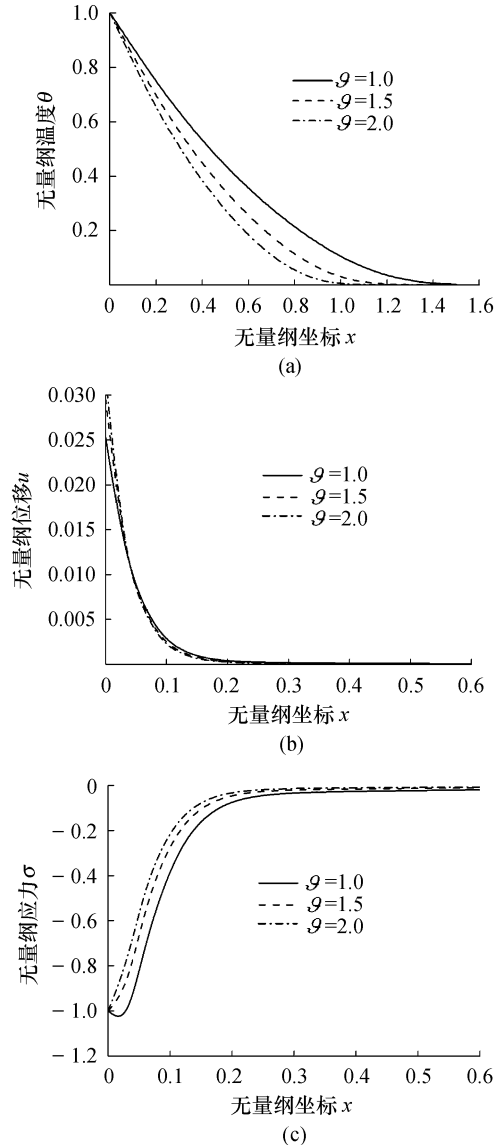


图 1 无量纲温度 θ 、位移 u 及应力 σ 在 $\alpha = 0.6$ 和 $ea = 0.03$ 时的变化规律

Fig.1 Variation rule of dimensionless temperature θ , displacement u and stress σ at $\alpha = 0.6$ and $ea = 0.03$

弹问题的研究,考虑材料特性参数与温度的相关性,能够更准确反映其动态响应.

图 2 分别表示无量纲温度、位移、应力的分布规律.在此情形中,材料特性与温度相关性参数 $\vartheta = 2$ 和非局部效应参数 $ea = 0.03$, 分数阶参数 α 分别取 0.6, 0.8 和 1. 从图 2a 可以看出, 无量纲温度随着分

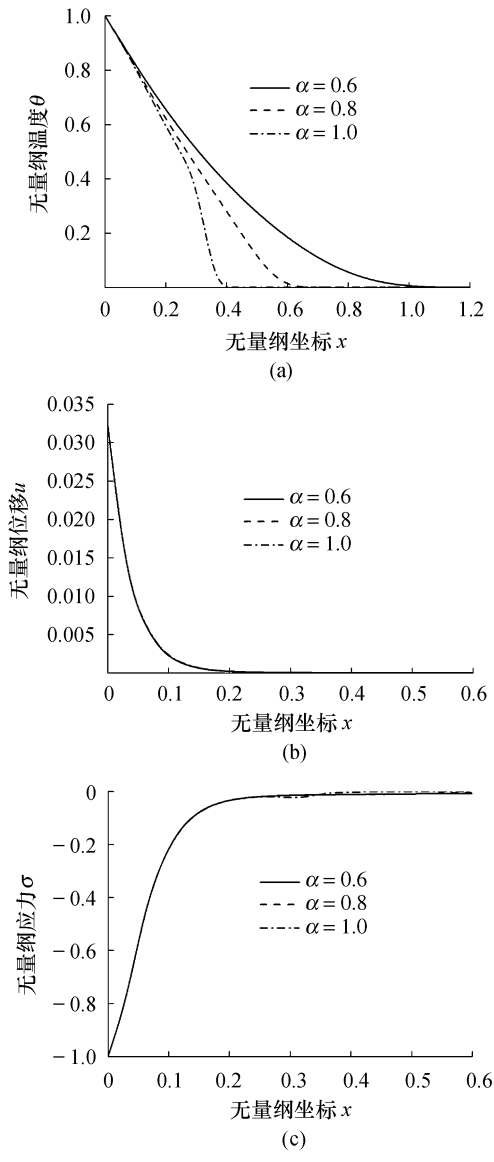


图 2 无量纲温度 θ , 位移 u 和应力 σ 在 $\vartheta=2$ 和 $ea=0.03$ 时的变化规律

Fig.2 Variation rule of dimensionless temperature θ , displacement u and stress σ at $\vartheta=2$ and $ea=0.03$

数阶参数增大而减小,且当 α 较小时,无量纲温度曲线趋于平缓.而从图 2b、2c 可看出,分数阶参数对无量纲位移及应力几乎没有影响.

图 3a~3c 分别表示无量纲温度、位移、应力的分布规律.在此情形中,材料特性与温度相关性参数 $\vartheta=2$ 和分数阶参数 $\alpha=0.6$,非局部效应参数 ea 分别取 0,0.03,0.06 和 0.08.从图 3a 可看出,非局部效应参数取不同值,无量纲温度没有变化.而从图 3b、3c 可看出,非局部效应对无量纲位移和应力有影响,非局部效应参数取值越大,无量纲位移和应力对应的曲线越平缓,分别在 $x=0.05$ 和 $x=0.075$ 之前,考虑非局部效应后无量纲位移和应力比不考虑该效应时要小.可见,非局部弹性效应的影响程度随

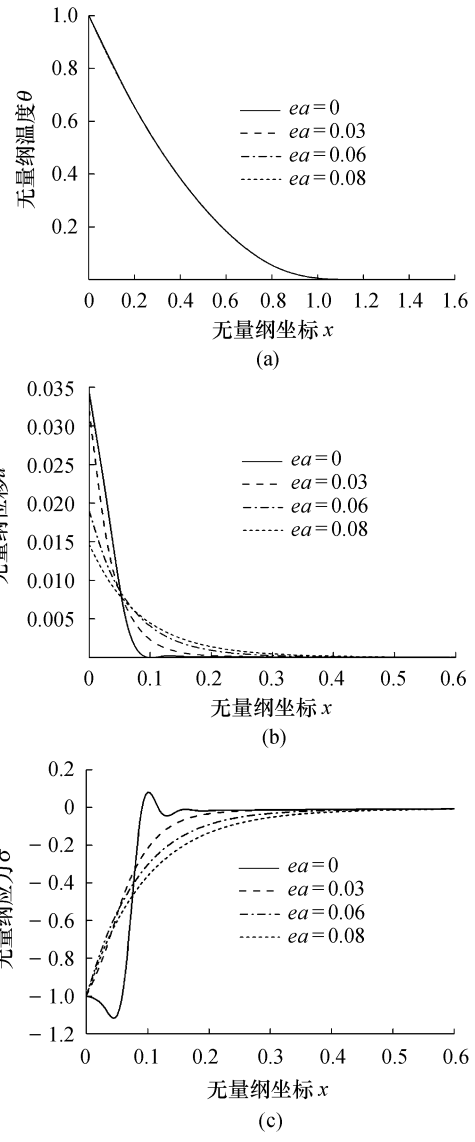


图 3 无量纲温度 θ , 位移 u 和应力 σ 在 $\vartheta=2$ 和 $\alpha=0.6$ 时的变化规律

Fig.3 Variation rule of dimensionless temperature θ , displacement u , and stress σ at $\vartheta=2$ and $\alpha=0.6$

着结构尺寸的减小而逐渐变大,尤其是在微纳米尺度下,其影响不能再予以忽略.

6 结论

根据微观小尺度效应,结合非局部弹性理论和 G-L 广义热弹性理论,应用非局部弹性模型,对一半无限体同时受激光脉冲加热和均布载荷力时,材料特性参数与温度相关的一维非局部热弹问题的动态响应进行了分析与讨论.结果表明:

- 1) 无量纲温度、无量纲应力的幅值随特性参数增大而增大;无量纲位移最大值随特性参数增大而减小.

2) 无量纲温度的幅值随分数阶参数的增大而增大,且其幅值的变化由平缓变得陡峭,但对无量纲位移和应力几乎没有影响。

3) 量纲位移和应力的幅值分别在 $x = 0.05$ 和 $x = 0.075$ 之前,随着非局部效应参数的增加而减小,且其变化由陡峭变得平缓,但对无量纲温度没有影响。

参考文献:

- [1] PESHKOV V. Second sound in helium II [J]. *Journal of Physics*, 1944, 8: 381-386.
- [2] LORD H W, SHULMAN Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity [J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1967, 15: 299-309.
- [3] GREEN A E, LINDSAY K A. Thermoelasticity [J]. *Journal of Elasticity*, 1972, 2: 1-7.
- [4] 田晓耕, 沈亚鹏. 广义热弹性问题研究进展 [J]. *力学进展* 2012, 42(1): 18-28.
- [5] 何天虎, 关明智. 无限长旋转圆柱体的广义热弹耦合问题 [J]. *兰州理工大学学报*, 2009, 35(1): 168-172.
- [6] 何天虎, 李林. 分数阶热弹性理论下的广义电磁热弹问题 [J]. *兰州理工大学学报*, 2016, 42(2): 167-172.
- [7] 陈文, 孙洪广, 李西成, 等. 力学与工程问题的分数阶导数建模 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [8] YOUSSEF H M. Theory of fractional order generalized thermoelasticity [J]. *ASME Journal of Heat Transfer*, 2010, 132: 1-7.
- [9] YOUSSEF H M. Variational principle of fractional order generalized thermoelasticity [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2010, 23: 1183-1187.
- [10] SHERIEF H H, EL-SAYED A, EL-LATIEF A. Fractional order theory of thermoelasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(2): 269-275.
- [11] YU Y J, TIAN X G, LU T J. Fractional order generalized electro-magneto-thermo-elasticity [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2013, 42: 188-202.
- [12] ERINGEN A C. *Nonlocal Continuum Field Theories* [M]. Berlin: Springer, 2002.
- [13] AIFANTIS E C. Strain gradient interpretation of size effect [J]. *International Journal of Fracture*, 1999, 95: 299-314.
- [14] AIFANTIS E C. Gradient deformation models at nano micro and macro scales [J]. *ASME Journal of Engineering Material Technology*, 1999, 121: 189-202.
- [15] YANG J F C, LAKES R S. Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending [J]. *Journal of Biomechanics*, 1982, 15: 91-98.
- [16] YU Y J, TIAN X G, LIU X R. Size-dependent generalized thermoelasticity using Eringen's nonlocal model [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2015, 51: 96-106.
- [17] EZZAT M A, EL-KARAMANY A S, SAMAAAN A A. The dependence of the modulus of elasticity on reference temperature in generalized thermoelasticity with thermal relaxation [J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2004, 147(1): 169-189.
- [18] YOUSSEF H M, ABBAS I A. Thermal shock problem of generalized thermo-elasticity for an infinitely long annular cylinder with variable thermal conductivity [J]. *Computational Methods in Science & Technology*, 2007, 13(2): 95-100.
- [19] RISHIN V V, LYASHENKO B A, AKININ K G, *et al.* Temperature dependence of adhesion strength and elasticity of some heat-resistant coatings [J]. *Strength Mater*, 1973, 5: 123-126.
- [20] TZOUD D. *Macro-to-microscale heat transfer* [M]. Washington D C: Taylor and Francis, 1997.