文章编号：1673-5196(2007)06-0126-02

$\mathscr{K}$-弱补模

王永铎，吴德军
（兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州 730050）

摘要：作为弱补模的真推广，引入$\mathscr{K}$弱补模的概念并给出$\mathscr{K}$弱补模的基本性质．证明$\mathscr{K}$弱补模的任意直和项是$\mathscr{K}$弱补模．设$M=\oplus_{i=1}^{n} M_i$，$M_i(i=1,2,\cdots,n)$是M的完全不变子模．若$M_i(i=1,2,\cdots,n)$是$\mathscr{K}$弱补模，则M是$\mathscr{K}$弱补模．设R是环．若$J(R)=0$，则$_RR$是$\mathscr{K}$弱补模当且仅当R是左PP-环．

关键词：弱补模；$\mathscr{K}$弱补模；完全不变子模
中图分类号：O153.3　　**文献标识码**：A

$\mathscr{K}$-weakly supplemented modules

WANG Yong-duo, WU De-jun
(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: As a proper generalization of weakly supplemented modules, the concept of $\mathscr{K}$weakly supplemented modules was introduced and their basic properties were given. It was proved that any direct summand of a $\mathscr{K}$weakly supplemented module was $\mathscr{K}$weakly supplemented. Let $M=\oplus_{i=1}^{n} M_i$ be a direct sum of fully invariant submodules $M_i(i=1,2,\cdots,n)$. If M_i was $\mathscr{K}$weakly supplemented, then M was $\mathscr{K}$weakly supplemented. Let R be a ring with $J(R)=0$. Then $_RR$ was a $\mathscr{K}$weakly supplemented module if and only if R was a left PP-ring.

Key words: weakly supplemented modules; $\mathscr{K}$weakly supplemented modules; fully invariant submodules

本文中的环均指有单位元的结合环，模指左R-模．$A\leqslant B$表示A是B的子模，$A\ll B$表示A是B的小子模，$A|B$表示A是B的直和项．

补模是一种很重要的模类，特别对提升模的研究起着重要作用．近年来，补模得到广泛的研究并且有各种形式的推广[1~7]．设$N,L\leqslant M$，称N是L在M中的补，如果$M=N+L$且$N\cap L\ll N$．设$N,L\leqslant M$，称N是L在M中的弱补，如果$M=N+L$且$N\cap L\ll M$．称M是补模，如果M的任意子模在M中有补．称M是弱补模，如果M的任意子模在M中有弱补．弱补模是对补模的一种重要推广．作为弱补模的真推广，本文引入$\mathscr{K}$弱补模的概念，讨论$\mathscr{K}$弱补模的直和项，有限个$\mathscr{K}$弱补模的直和是否仍然是$\mathscr{K}$弱补模，并且列举一些$\mathscr{K}$弱补模的例子．

定义1　设R是环，M是左R-模．

设$N\leqslant M$．称N是M的完全不变子模，如果对任意$\lambda\in \mathrm{End}_R(M)$，$\lambda(N)\subseteq N$．

定义2　设$N\leqslant M$．称N是M的$\mathscr{K}$子模，如果存在$f\in \mathrm{End}_R(M)$使得$N=\mathrm{Ker}\, f$．

定义3　称M是$\mathscr{K}$弱补模，如果对M的任意$\mathscr{K}$子模A，存在$B\leqslant M$使得$M=A+B$且$A\cap B\ll M$．

显然，若M是弱补模，则M是$\mathscr{K}$弱补模．反之不对（见例1和例2）．

例1　设$\mathbb{Z}$表示全体整数的集合．则$\mathbb{Z}$-模$_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$是$\mathscr{K}$弱补模，但不是弱补模．

证明　设$f\in \mathrm{End}(_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})$，则要么$f=0$，要么$f$是单同态．从而$\mathbb{Z}$-模$_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$是$\mathscr{K}$弱补模，但不是弱补模．

例2　设R是冯·诺依曼正则环但不是半单环，则R_R是$\mathscr{K}$弱补模，但不是弱补模．

命题1　设M是循环的挠自由模，则M是$\mathscr{K}$弱补模．

证明　设$M=Rx$，$f:M\rightarrow M$是M的任意自同态．如果$f=0$，那么$\mathrm{Ker}\, f$显然有弱补．设$f\neq 0$，下证$\mathrm{Ker}\, f=0$．$\forall m\in \mathrm{Ker}\, f$，$\exists r\in R$，使得$m=rx$，$f(m)=f(rx)=rf(x)=0$．因为$M$是挠自由模且$f(x)\neq 0$，所以$r=0$，从而$m=0$，$\mathrm{Ker}\, f=0$．故$M$是

收稿日期：2007-04-17
作者简介：王永铎(1974-)，男，甘肃靖远人，博士，副教授．

$\mathscr{K}$弱补模.

引理 1 设 $A\leqslant B\leqslant M$, $B\mid M$. 则 $A\ll M$ 当且仅当 $A\ll B$.

命题 2 设 M 是 $\mathscr{K}$弱补模且 K 是 M 的直和项,则 K 是 $\mathscr{K}$弱补模.

证明 设 M 是 $\mathscr{K}$弱补模, K 是 M 的直和项且 $f\in \mathrm{End}(K)$. 则存在 $K'\mid M$ 使得 $M=K\oplus K'$. 令 $g=f\oplus 1_{K'}$, 则 $g\in\mathrm{End}(M)$ 且 $\mathrm{Ker}\ g=\mathrm{Ker}\ f$. 因为 M 是 $\mathscr{K}$弱补模,所以存在 $N\leqslant M$ 使得 $\mathrm{Ker}\ g+N=M$ 且 $\mathrm{Ker}\ g\cap N\ll M$. 从而 $K=\mathrm{Ker}\ f+(N\cap K)$ 且 $\mathrm{Ker}\ f\cap N\cap K=\mathrm{Ker}\ f\cap N\ll M$. 由引理 1, $\mathrm{Ker}\ f\cap N\ll K$. 因此, $N\cap K$ 是 $\mathrm{Ker}\ f$ 在 K 中的弱补. 故 K 是 $\mathscr{K}$弱补模.

引理 2 设 $M=M_1\oplus M_2$. 若 $N_1\ll M_1$, $N_2\ll M_2$, 则 $N_1\oplus N_2\ll M_1\oplus M_2$.

定理 1 设 $M=M_1\oplus M_2$, M_1, M_2 是 M 的完全不变子模. 若 M_1, M_2 是 $\mathscr{K}$弱补模,则 M 是 $\mathscr{K}$弱补模.

证明 设 $f\in\mathrm{End}(M)$. 令 $f_1=f|_{M_1}: M_1\to M_1$, $f_2=f|_{M_2}: M_2\to M_2$. 则 $f=f_1\oplus f_2$ 且 $\mathrm{Ker}\ f=\mathrm{Ker}\ f_1\oplus\mathrm{Ker}\ f_2$. 因为 M_1, M_2 是 $\mathscr{K}$弱补模,所以存在 $L_1, L_2\leqslant M$ 使得 $\mathrm{Ker}\ f_1+L_1=M_1$ 且 $\mathrm{Ker}\ f_1\cap L_1\ll M_1$, $\mathrm{Ker}\ f_2+L_2=M_2$ 且 $\mathrm{Ker}\ f_2\cap L_2\ll M_2$. 显然 $(\mathrm{Ker}\ f_1\oplus\mathrm{Ker}\ f_2)+(L_1\oplus L_2)=M_1\oplus M_2=M$. 因为 $(\mathrm{Ker}\ f_1\oplus\mathrm{Ker}\ f_2)\cap(L_1\oplus L_2)=(\mathrm{Ker}\ f_1\cap L_1)\oplus(\mathrm{Ker}\ f_2\cap L_2)$, 所以由引理 2, $(\mathrm{Ker}\ f_1\oplus\mathrm{Ker}\ f_2)\cap(L_1\oplus L_2)\ll M_1\oplus M_2=M$. 从而 $L_1\oplus L_2$ 是 $\mathrm{Ker}\ f$ 在 M 中的弱补. 因此 M 是弱补模.

定义 4 称 M 是阿贝尔模,如果 $\mathrm{End}(M)$ 是阿贝尔环.

若 M 是阿贝尔模,则 M 的任意直和项是完全不变子模. 从而有以下推论:

推论 1 设 $M=M_1\oplus M_2$ 是阿贝尔模. 若 M_1, M_2 是 $\mathscr{K}$弱补模,则 M 是 $\mathscr{K}$弱补模.

由数学归纳法显然有

推论 2 设 $M=\oplus_{i=1}^{n}M_i$, $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 M 的完全不变子模. 若 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathscr{K}$弱补模,则 M 是 $\mathscr{K}$弱补模.

定理 2 设 $0\neq N\ll M$, 使得 $\theta(N)+\theta^{-1}(N\setminus\{0\})\subseteq N$. 若 M/N 是 $\mathscr{K}$弱补模,则 M 是 $\mathscr{K}$弱补模.

证明 设 $f: M\to M$ 是 M 的任意自同态,则 f 可诱导 M/N 的自同态 $g=\bar{f}: M/N\to M/N$, $m+N\mapsto f(m)+N$. 则 $\mathrm{Ker}\ g=(\mathrm{Ker}\ f+N)/N$. 因为 M/N 是 $\mathscr{K}$弱补模,所以存在 $L/N\leqslant M/N$ 使得 $(\mathrm{Ker}\ f+N)/N+L/N=M/N$ 且 $(\mathrm{Ker}\ f+N)/N\cap(L/N)\ll M/N$. 从而 $\mathrm{Ker}\ f+L=M$ 且 $(\mathrm{Ker}\ f\cap L+N)/N\ll M/N$. 令 $\pi: M\to M/N$ 是自然满同态,则 $\mathrm{Ker}\ f\cap L\ll M$, 因此 L 是 $\mathrm{Ker}\ f$ 在 M 中的弱补. 故 M 是 $\mathscr{K}$弱补模.

定义 5 称 R 是 V-环,若任意单 R-模是内射模.

命题 3 设 R 是 V-环. 则 ${}_RM$ 是 $\mathscr{K}$弱补模当且仅当 M 的任意 $\mathscr{K}$子模是直和项.

证明 R 是 V-环当且仅当对任意 R-模 M, $\mathrm{Rad}(M)=0$.

必要性) 设 N 是 M 的 $\mathscr{K}$子模,则存在 $L\leqslant M$ 使得 $M=N+L$ 且 $N\cap L\ll M$. 由 $\mathrm{Rad}(M)=0$ 可得 $N\cap L=0$, 从而 N 是 M 的直和项.

充分性) 设 N 是 M 的 $\mathscr{K}$子模,则存在 $N'\leqslant M$ 使得 $M=N\oplus N'$, 从而 M 是 $\mathscr{K}$弱补模.

定义 6 称 R 是左 PP-环,如果 R 中的元素的左零化子可由幂等元生成.

命题 4 设 R 是环. 若 $J(R)=0$, 则 ${}_RR$ 是 $\mathscr{K}$弱补模当且仅当 R 是左 PP-环.

证明 必要性) 取 $a\in R$. 令 $f: {}_RR\to{}_RR$, $r\mapsto ar$, 则 $\mathrm{Ker}\ f=r_R(a)$. 因为 ${}_RR$ 是 $\mathscr{K}$弱补模,所以存在 $I\leqslant R$ 使得 $r_R(a)+I=R$ 且 $r_R(a)\cap I\ll R$. 由 $J(R)=0$ 可得 $r_R(a)$ 是 R 的直和项,故 R 是左 PP-环.

充分性) 设 I 是 ${}_RR$ 的 $\mathscr{K}$子模. 因为 R 是左 PP-环,所以 I 是 R 的直和项,从而 ${}_RR$ 是 $\mathscr{K}$弱补模.

参考文献:

[1] ALIZADE R, BILHAN G, SMITH P F. Modules whose maximal submodules have supplements [J]. Comm Algebra, 2001, 29(6): 2 389-2 405.

[2] ALIZADE R, BUYUKASIK E. Cofinitely weak supplemented modules [J]. Comm Algebra, 2003, 31(11): 5 377-5 390.

[3] WANG Yongduo, DING Nanqing. Generalized supplemented modules [J]. Taiwanese J Math, 2006, 10(6): 1 589-1 601.

[4] AMASYA H C, SAMSUN A P. ⊕-cofinitely supplemented modules [J]. Czechoslovak J Math, 2004, 54(4): 1 083-1 088.

[5] KESKIN D. Characterizations of right perfect rings by ⊕-supplemented modules [J]. Contemporary Math. 2000, 259: 313-318.

[6] 吴德军. χ-提升模 [J]. 兰州理工大学学报, 2005, 31(6): 141-143.

[7] 吴德军. 提升模的推广 [J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(1): 142-145.