

基于Mooney-Rivlin和Yeoh模型的超弹性橡胶材料有限元分析

黄建龙¹, 解广娟¹, 刘正伟²

(1. 兰州理工大学机械电子工程学院, 甘肃 兰州 730050;

2. 中海油田服务股份有限公司, 北京 101149)

摘要: 通过介绍橡胶材料两种常见的应变能密度模型——Mooney-Rivlin模型和Yeoh模型, 解析求得材料常数, 并结合ansys有限元分析软件, 比较两种模型的位移、应力云图, 验证了它们的适用范围, 对超弹性材料的有限元分析模型选用的总结, 为这类材料的有限元分析和应用起到了指导作用。

关键词: 超弹性; 橡胶材料; 应变能密度函数模型; 有限元分析

中图分类号: TQ330.1

文献标识码: B

文章编号: 1009-797X(2008)12-0022-05

0 引言

橡胶材料早在19世纪就被广泛应用。由于它良好弹性特性被广泛应用于承载结构轴承、密封件、吸收震动的衬垫、连接器、轮胎等, 可见橡胶材料作为一种高分子非线性超弹性材料已成为现代工业重要组成部分。橡胶属于高分子材料, 它是由 C_5H_8 连续结合而成的链状高分子聚合物, 在其加入硫或者其他无机物之后, 链便相互搭桥形成网状结构, 从而成为具有超弹性、体积几乎不发生变化(即不可压缩)、大变形的非线性固体材料。材料的非线性、几何的非线性也给橡胶材料的研究带来了很大的困难。

几十年来, 研究学者对橡胶材料做了大量的研究工作, 主要有: 罚有限元、混合元、杂交元等。文献[1]、[2]、[3]均以Piola-Kirchhoff应力和Cauchy-Green应变建立Lagrange虚功方程, 将非线性方程线性化, 并利用现阶段最流行且广泛应用的应变能密度函数模型——Mooney-Rivlin模型进行有限元分析, 做了如何确定选择适当的罚因子工作。文献[4]采用罚函数和Lagrange乘子法同时引入静水压力, 同样应用的应变能密度函数模型——Mooney-Rivlin模型对橡胶材料进行有限元分

析, 通过实验和解析解确定算法的有效性。文献[5]、[6]采用实验的方法结合有限元方法对如何确定Mooney-Rivlin常数做了研究。文献[7]以Piola-Kirchhoff应力和Cauchy-Green应变理论, 采用Yeoh模型对橡胶材料进行有限元分析, 从而确定此类材料的有限元模型。然而, 应变能密度函数的模型理论可谓是越来越多, 应用研究的范围也越来越广, 但是如何对具体工况选择合适的应变能密度函数模型, 给研究工作者增添了很大的困难。

本文根据有限元分析软件ansys提供的超弹性不可压缩材料的材料特性描述, 阐述了橡胶类材料的有限元分析模型Mooney-Rivlin模型和Yeoh模型, 并基于这两种典型模型用实例证明了选用此模型的有效可行性, 从而为有限元分析打下了理论基础和指导作用。

1 橡胶材料增量形式的应力应变关系和本构关系

(1) 假设橡胶材料在小范围内是线性的,

作者简介: 黄建龙(1951-), 男, 教授, 博导, 毕业于北京理工大学机械工程专业, 现主要从事机械装备及其自动化方面的研究, 已发表论文近百篇。

收稿日期: 2007-12-14

所以可以用增量形式建立其应力应变关系,如下:

$$d\epsilon_1 = \frac{1}{E}[d\sigma_1 - \mu(d\sigma_2 + d\sigma_3)]$$

$$d\epsilon_2 = \frac{1}{E}[d\sigma_2 - \mu(d\sigma_1 + d\sigma_3)]$$

$$d\epsilon_3 = \frac{1}{E}[d\sigma_3 - \mu(d\sigma_1 + d\sigma_2)]$$

但是式中的弹性模量 E 是变形过程函数,给实验测定和实际应用带来了很大困难,所以此公式很少使用。

(2) 假设橡胶材料各向同性和不可压缩性 ($I_3=1$), 基于应力应变关系以唯象理论建立橡胶材料的本构关系, 使用应变能密度函数表示, 如下:

$$W=W(I_1, I_2, I_3) \quad (1)$$

其中

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \quad (3)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \quad (4)$$

$$\lambda_i = 1 + \gamma_i \quad (5)$$

式中, I_1 、 I_2 、 I_3 为变形张量不变量, λ_1 、 λ_2 、 λ_3 为主伸长比, γ_i 为主轴方向应变, d_k 为材料常数。

2 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型

2.1 两种模型应变能密度形式

(1) Mooney-Rivlin 模型

Mooney-Rivlin 是一个比较经典的模型。用它几乎可以来模拟所有橡胶材料的力学行为。适合于中、小变形, 一般适用于应变大约为 100% (拉) 和 30% (压) 的情况。但是 Mooney-Rivlin 不能模拟多轴向数据, 由某种试验得来的数据不能用来预测其他的变形行为。ANSYS 有限元分析软件根据其不同的需要, 将其展开为二项三阶展开式, 三项三阶展开式, 五项三阶展开式和九项三阶展开式等。其应变能密度函数模型如下:

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k} (I_3 - 1)^{2k}$$

典型的二项三阶展开式为:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2$$

式中 C_{10} 、 C_{01} 、 d 为 Mooney 常数, 由材料实验所确定, 对于不要压缩橡胶材料 $J=1$ 。

(2) Yeoh 模型

Yeoh 模型比较适合模拟炭黑填料天然橡胶的大变形行为, 并且可以用简单的单向拉伸试验的数据去模拟其他变形的力学行为, 但是其不能很好的解释双轴试验数据, 当材料发生较大变形时, 计算结果就会不精确。ANSYS 有限元分析软件中也将其分为一、二、三、四、五等多项参数形式, 其应变能密度函数模型如下:

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0} (I_1 - 3)^i + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k}$$

典型的二参数形式为:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)^2$$

式中 N 、 C_{i0} 、 d_k 为材料常数, 由材料实验所确定, 初始的剪切模量 $\mu = 2C_{10}$, 同样对于不可压缩材料 $J=1$ 。

2.2 Piola-Kirchhoff 应力 t_{ij} 和 Cauchy-Green 应变 γ_{ij} 关系及主应力 t_i 和主伸长比 λ_i 关系

应力应变关系表征材料主要特性。橡胶材料的应力应变关系可以由应变能密度函数 W 对其主伸长比 γ_{ij} 求偏导表示, 此应力应变形式由 Piola-Kirchhoff 和 Cauchy-Green 定义, 所以也称为 Piola-Kirchhoff 应力和 Cauchy-Green 应变, 其形式如下:

$$t_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}} \quad (6)$$

由(1)~(6)得主轴力 t_i 和主伸长比 λ_i 之间关系:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 2\lambda_1 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + (\lambda_2^2 \lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_3} \right] \\ t_2 &= 2\lambda_2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + (\lambda_3^2 \lambda_1^2) \frac{\partial W}{\partial I_3} \right] \\ t_3 &= 2\lambda_3 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} + (\lambda_1^2 \lambda_2^2) \frac{\partial W}{\partial I_3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 t_1 、 t_2 、 t_3 为三个主应力, λ_1 、 λ_2 、 λ_3 为主伸长比。

3 基于 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型参数计算

通过单向轴拉伸实验确定材料常数, 并取

二参数 Mooney-Rivlin 模型和二参数 Yeoh 模型作为计算准则, 使用 ansys 有限元分析软件分析比较 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型。

(1) 单轴向拉伸实验简化

对于单轴向拉伸, 有 $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$ 。

$$\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \frac{1}{\lambda_1} \quad (8)$$

对于绝对不可压缩材料

$$I_3 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 = 1 \quad (9)$$

结合 (7) ~ (9) 推出绝对不可压缩橡胶材料的主应力 t_i 与主应变 λ_i 和主伸长比与不变量的关系分别为:

$$t_1 = \frac{2}{\lambda_1} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} \quad (10)$$

(2) 求二参数 Mooney-Rivlin 模型常数 C_{10} 、 C_{01}

二参数 Mooney-Rivlin 模型应变能密度函数为 $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$, 并结合 (8)、(10) 求得:

$$\frac{t_1}{2(\lambda_1 - 1/\lambda_1^2)} = C_{10} + \frac{1}{\lambda_1} C_{01}$$

根据试验测试不同拉伸比 λ_1 下的应力值 t_1 , 然后以 $\frac{1}{\lambda_1}$ 为横坐标, 以 $\frac{t_1}{2(\lambda_1 - 1/\lambda_1^2)}$ 为纵坐标, 把试验点表述在相应坐标系中, 并把这些试验点回归成一条直线, C_{10} 为这条直线的截距, C_{01} 为这条直线的斜率。

(3) 求二参数 Yeoh 模型常数 C_{10} 、 C_{20}

二参数 Yeoh 模型应变能密度函数为 $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_2 - 3)^2$, 同 3、(2) 方法, 求得:

$$\frac{t_1}{2(\lambda_1 - 1/\lambda_1^2)} = C_{10} - 6C_{20} + 2C_{20}(\lambda_1^2 + 2/\lambda_1)$$

最后求得 C_{10} 、 C_{20} 。

(4) 基于数值分析和 matlab 求解 C_{10} 、 C_{01} 和 C_{10} 、 C_{20}

本文选用某公司生产的轨道减震器产品, 做单轴拉伸实验所得到的应力应变图, 如图 1, 通过将选取不同的点进行描点, 并线性回归为直线 (如图 2、3), Mooney-Rivlin 模型拟合的直线方程为: $y = -0.35x + 1.2$, Yeoh 模型拟合的直线方程为: $y = -0.019x + 0.71$, 根据对应斜

率和截距关系求的材料常数如表 1 所示。

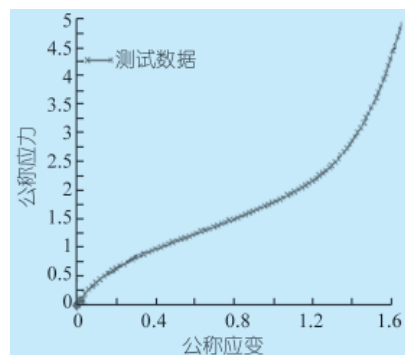


图 1 应力应变图

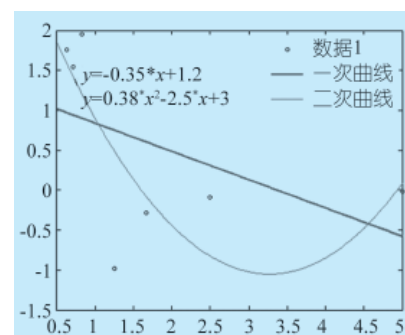


图 2 Mooney-Rivlin 模型拟合线图

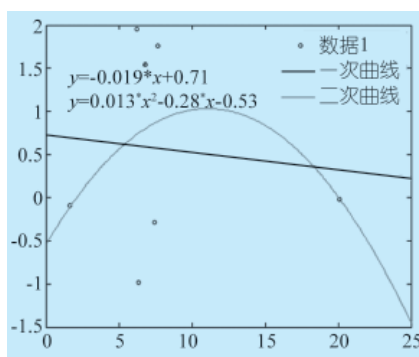


图 3 Yeoh 模型拟合线图

表 1 材料常数

Mooney-Rivlin 模型	$C_{10} = 1.20$	$C_{01} = -0.35$
Yeoh 模型	$C_{10} = 0.596$	$C_{20} = -0.019$

4 Ansys 分析结果

本文使用 ansys10.0 有限元分析软件对此种材料进行分析, 分析结果如图 4~7 所示。

从两种模型位移云图和 Von Mises 应力云图可得到如表 2 和表 3 (单位 mm), 我们可以看出两种模型应力云图对应等值线的值

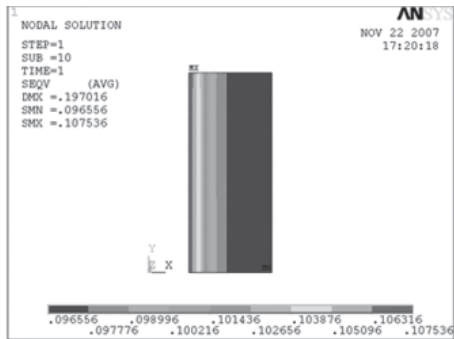


图 4 Mooney-Rivlin 模型应力云图

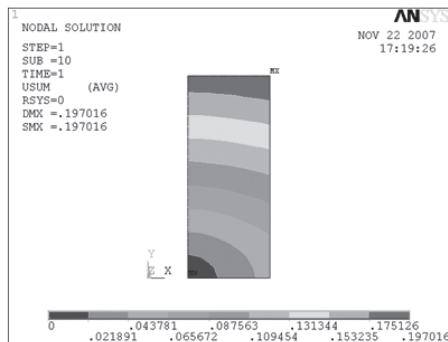


图 5 Mooney-Rivlin 模型位移云图

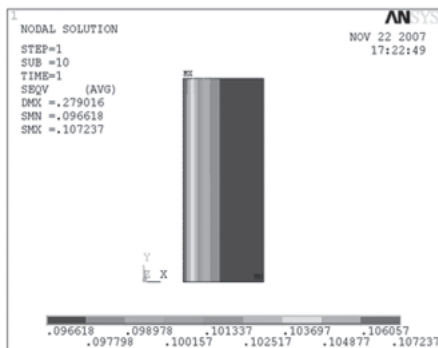


图 6 Yeoh 模型应力云图

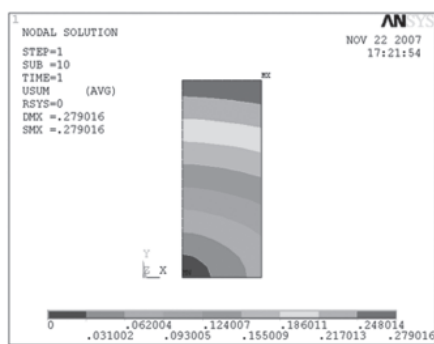


图 7 Yeoh 模型位移云图

相差几乎为零，但很明显是，位移的差值却是

表 2 两模型位移表

mooney 模型位移	yeoh 模型位移	差值	百分数	备注	
0.021 891	0.031 002	0.009 111	0.9%	差值不能逐渐在增大	
0.043 781	0.062 004	0.018 223	1.8%		
0.065 672	0.093 005	0.027 333	2.7%		
0.087 563	0.124 007	0.036 444	3.6%		
0.109 454	0.155 009	0.045 555	4.6%		
0.131 344	0.186 011	0.054 667	5.47%		
0.153 235	0.217 013	0.063 778	6.38%		
0.175 126	0.248 014	0.072 888	7.29%		
0.197 016	0.279 016	0.082 000	8.2%		最大位移

表 3 两模型应力表

mooney 模型应力	yeoh 模型应力	差值	百分比	备注
0.096 556	0.096 618	0.000 062	0.0062%	差值几乎为 0
0.097 776	0.097 798	0.000 022	0.0022%	
0.098 996	0.098 978	-0.000 018	0.0018%	
0.100 216	0.100 157	-0.000 059	0.0059%	
0.101 436	0.101 337	-0.000 099	0.0099%	
0.102 656	0.102 517	-0.000 139	0.0139%	
0.103 876	0.103 697	-0.000 179	0.0179%	
0.105 096	0.104 877	-0.000 219	0.0219%	
0.106 316	0.106 057	-0.000 259	0.0259%	
0.107 536	0.107 237	-0.000 299	0.0299%	

很大，并逐渐增加，最小差值为 0.9%，最大可达到 8.2%。Mooney-Rivlin 模型的最大位移值为 0.197 016，Yeoh 模型最大位移值为 0.279 016，相差 8.2%，从而我们可以验证：Mooney-Rivlin 模型适合中、小型变形行为；Yeoh 模型比较适合模拟炭黑填料天然橡胶的大变形行为。

5 结束语

本文主要总结了现阶段两种常用的超弹性材料的应变能密度函数模型，并分析比较其适用性，并具体给出了如何求解 Mooney-Rivlin 模型和 Yeoh 模型的材料参数，使用现阶段比较流行的 ansys 有限元分析软件，针对较常见且使用广泛的两种形式进行有限元分析，比较两种分析结果云图和对应等值线数值，进一步证明了两种模型的适用性，即 Mooney-Rivlin 模型适合中、小型变形行为；Yeoh 模型比较适合模拟炭黑填料天然橡胶的大变形行为。使用 ansys 有限元分析软件进行分析，为超弹性橡胶材料选用和分析打下了理论基础。

参考文献：

- [1] 史守峡, 白若阳. 非线性不可压缩橡胶柱体的大变形有限元分析. 世界地震工程, 1998, 14 (1), 51~57.
- [2] 史守峡. 平面应力不可压缩橡胶薄片的非线性有限元分析. 哈尔滨工程大学, 1998, 19 (3): 11~15.
- [3] 于建华, 魏永涛. 不可压缩超弹性材料的有限元应力分析. 西南交通大学, 1998, 33 (1): 41~45.
- [4] 魏永涛, 于建华. 橡胶有限元分析之研究. 四川联合大学学报, 1997, 1 (5): 78~83.
- [5] 郑明军, 谢基龙. 压缩状态下橡胶大变形有限元分析. 北方交通大学学报, 2001, 25 (1): 76~79.
- [6] 郑明军, 王文静, 等. 橡胶 Mooney-Rivlin 橡胶力学性能常数的确定. 橡胶工业, 2003, 462~465.
- [7] 危银涛, 杨挺青, 杜星文. 橡胶类材料大变形本构关系及其有限元方法. 固体力学学报, 1999, 20 (4): 282~289.
- [8] 安世亚太. Ansys 结构分析指南 (中)
- [9] 杨晓翔. 非线性橡胶材料的有限单元法. 北京: 石油工业出版社, 1999, 4.

Finite element analysis of super-elastic rubber materials based on the Mooney-Rivlin and Yeoh model

Huang Jianlong¹, Xie Guangjuan¹, Liu Zhengwei²

(1. Mechanical and electronic engineering college of Lanzhou university, Gansu 730050, Lanzhou China; 2. Zhonghai oilfield services co., Ltd., Beijing 101149, China)

Abstract: Through introduced the two common strain energy density model of rubber material - Mooney-Rivlin and Yeoh model, found the material constant, compared with the displacement and stress cloud of the two models by combining with Ansys finite element analysis software to verify their scope of application. The summary of selected method of finite element analysis model for super-elastic material played a guiding role for the analysis and application.

Key words: super-elastic; rubber material; strain energy density model; finite element analysis

(XS-04)

北欧化工 PP 薄膜具有优异的 光学性能

北欧化工公司于 2008 年 10 月 8 日宣布, 新开发的 Borclear RE936CF PP 产品是新等级的无定形共聚丙烯 (PP), 它可生产有高度透明性的吹塑和铸模薄膜, 制造的薄膜具有优异的光学性能。

应用目标是食品包装和医药市场, 它可提供优异的光彩和良好的包装美学感。与其他的透明薄膜不同, 它在杀菌消毒处理后仍能保持透明, 模糊不清概率仅为 2%。

据称, Borclear RE936CF 产品尤其适用于生产精制食品的便利包装。

这种透明的、可供杀菌消毒的新等级聚丙烯为上述市场提供了创新的解决方案。

对加工商重要的是, 由这种新等级产品生产的薄膜能保持其光学特性, 而不受生产线生产速度的影响, 据称, 其生产速度可比常规的生产线高出 15%。

北欧化工公司采用自有的北星 PP2G 第二代催化剂技术用于生产 Borclear RE936CF 产品。

采用该技术除了可使每吨产品的能耗下降 5%~10%, 并生产高纯度聚合物外, 还可达到 PP 的分子定制, 使可加工性能与机械强度之间达到最优的平衡。

钱伯章供稿

(XS-02)

再生胶与胶粉新标准启用

废橡胶利用行业的两个重要国家标准——GB/T13460—2008《再生橡胶》和 GB/T19208—2008《硫化橡胶粉》10月1日正式生效。

与 2003 版标准相比, 新修订的标准首次引入了对再利用产品中有毒有害的测定方法, 其含量将作为重要的参考指标。通过新标准中有毒有害项目测定的产品, 基本能满足 RoHS (《限制在电子电气设备中使用某些有害物质》) 标准对产品中重金属、多溴联苯和多溴二苯醚的限定要求。

摘编自《中国化工报》, 2008-10-10

(XS-03)