

引用格式: Fan Jianling, Ma Liansheng, Su Houde. Nonlinear Bending Action Analysis of Foam Circular Plate[J]. Journal of Gansu Sciences, 2018, 30(5): 80-84. [樊建领, 马连生, 苏厚德. 泡沫材料圆板的非线性弯曲行为分析[J]. 甘肃科学学报, 2018, 30(5): 80-84.]
doi: 10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2018.05.016.

泡沫材料圆板的非线性弯曲行为分析

樊建领^{1,2}, 马连生², 苏厚德³

(1. 兰州理工大学土木工程工程学院防灾减灾重点实验室, 甘肃 兰州 730050;

2. 兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050; 3. 甘肃蓝科石化高新装备股份有限公司, 甘肃 兰州 730070)

摘要 研究了梯度泡沫材料圆板的非线性弯曲行为, 基于 von Kaman 经典板理论, 建立了梯度泡沫圆板在机械载荷作用下的几何非线性动力学控制方程。假设泡沫梯度的密度沿厚度方向按照幂函数连续变化, 并用数值方法(打靶法)求解了周边加紧和简支泡沫材料圆板在均布载荷作用下的数值解, 并给出了泡沫梯度指数与结构的弯曲变形之间的关系曲线。结果表明梯度指数、厚径比、外载荷均对圆板的弯曲变形影响明显。大量数值结果为后期的振动分析和工程应用提供了数据参考。

关键词 梯度泡沫材料; 圆板; 打靶法; 弯曲变形

中图分类号: TB383.4

文献标志码: A

文章编号: 1004-0366(2018)05-0080-05

泡沫金属结构由于其空隙的存在而具有良好的吸能、吸声、缓冲、传热(开孔泡沫)、隔热(闭孔泡沫)等优越于传统致密材料的功能, 其结构一体化和功能性的复合特性, 使其极具发展潜力, 是极有应用前景的新型结构, 被广泛应用于汽车、建筑、国防军工等领域^[1-3]。其力学性能研究一直备受国内外学者关注, 形成了实验研究、理论解析和数值模拟 3 种主要手段^[4]。

Liu 等^[5]研究了密度梯度金属泡沫圆柱壳结构的爆炸冲击响应和能量吸收能力, 优化设计夹芯密度分布以提高结构的抗冲击性能; Storm 等^[6]基于 Kelvin 泡沫模型, 针对局部泡沫的几何特性(支柱和结点)对材料有效弹性性能的影响问题进行了研究。张健等^[7-8]对泡沫金属在冲击载荷下的能量吸收特性、压缩性能等方面做了较多细致的工作。

根据文献调研, 已有的关于梯度泡沫材料的分析中, 多数研究倾向于具体泡沫材料的实验和模拟研究, 这主要是缺少一种考虑密度变化影响的泡沫材料力学本构模型^[9], 而且对于机械载荷作用下圆板的研究文献非常少。研究考虑泡沫材料密度沿厚

度方向指数变化的本构模型^[1-2], 基于 von Kaman 经典板理论, 建立了梯度泡沫圆板在机械载荷作用下的几何非线性动力学控制方程, 并用打靶法求解了周边加紧和简支圆板在均布载荷作用下的数值解^[10-19], 为后期的振动分析和工程应用提供了数据参考。

1 数学模型

考虑一半径为 b 、厚度为 h 的梯度泡沫材料圆板, 利用文献^[1-2]中描述的 Type1 模型, 即上下表面板相对密度相同的对称板。采用柱坐标 (r, θ, z) 建立数学关系式, 其中圆板几何中面的圆心为坐标原点, z 轴正方向垂直板平面向上, 其杨式模量描述为

$$\frac{E_f}{E_s} = \alpha \left(\frac{\rho_f}{\rho_s} \right)^m, \quad (1)$$

其中: E_f 为梯度泡沫金属的弹性模量(一般是材料内部各点位置的函数); E_s 为孔壁材料的弹性模量(相应实体材料的弹性模量); ρ_f 为梯度泡沫金属密度(一般是材料内部各点位置的函数); ρ_s 为孔壁材料密度(相应实体材料的密度); α 为包含所有的几何比例常数。

收稿日期: 2018-06-04; 修回日期: 2018-07-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(11472123)

作者简介: 樊建领(1979-), 女, 甘肃平凉人, 博士研究生, 研究方向为特殊材料的力学行为。E-mail: fanjl@126.com

通信作者: 苏厚德, E-mail: suboude@lanpec.com

考虑到工程实际中最为常见的是材料物性参数按一个方向变化的梯度泡沫材料,为了简化计算过程,令 $\alpha = 1, m = 2$, 且认为泊松比保持不变, Type1 表示的密度分布模式^[1-2, 17-18] 为

$$\frac{\rho_f}{\rho_s} = ns^2 - \frac{n}{12} + \frac{1}{2}, \quad (2)$$

其中: n 表示密度梯度指标; $s = z/h$ 表示坐标。

1.1 几何方程

根据 von Karman 经典板理论, 梯度泡沫材料圆板在柱坐标系 (r, θ, z) 中轴对称变形的非线性几何方程^[11] 为

$$\{\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta}\}^T = \{\epsilon_r^0, \epsilon_\theta^0, 0\}^T + z\{\kappa_r, \kappa_\theta, \kappa_{r\theta}\}^T, \quad (3)$$

$$\{\epsilon_r^0, \epsilon_\theta^0\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \frac{u}{r} \right\}^T, \quad (4)$$

$$\{\kappa_r, \kappa_\theta, \kappa_{r\theta}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, 0 \right\}^T, \quad (5)$$

其中: $u(r), w(r)$ 分别为几何中面的径向和横向位移; $\epsilon_r^0, \epsilon_\theta^0$ 为中面处的应变; κ_r, κ_θ 为变形后中面的曲率。式(4)中 Von Karman 项 $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2$ 是由横向变形而产生的非线性应变。

1.2 物理方程

考虑到材料为线弹性的, 本构方程^[10-11] 如下:

$$\{\sigma_r(z), \sigma_\theta(z), \tau_{r\theta}(z)\}^T = [Q] \{\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta}\}^T, \quad (6)$$

其中: $[Q]$ 为刚度矩阵, 具体公式为

$$[Q] = \frac{E(z)}{1 - [\nu(z)]^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中: $E(z)$ 和 $\nu(z)$ 分别为厚度方向 z 处的等效弹

$$\begin{cases} A_{11} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} - \frac{\nu - 1}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} \right) - B_{11} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = 0, \\ D_{11} \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) = A_{11} \left[\frac{du}{dr} + \frac{\nu u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] \frac{d^2 w}{dr^2} + A_{11} \left[\nu \frac{du}{dr} + \frac{\nu u}{r} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - p \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + B_{11} \left(\frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^3} u \right) + B_{11} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{2 - 3\nu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \frac{dw}{dr} + q. \end{cases} \quad (13)$$

2.2 无量纲化的控制方程

为使研究的问题变为弱非线性问题, 这里引入无量纲量:

$$x = \frac{r}{b}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{u} = \frac{ub}{h^2}, \quad D_s = \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu^2)},$$

$$(1 - F_1 F_3) \left(\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + \frac{2}{x} \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} - \frac{1}{x^2} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{1}{x^3} \frac{d\bar{w}}{dx} \right) = F_2 \left[\frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{\nu \bar{u}}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + F_2 \left[\nu \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{\bar{u}}{x} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 \right] \frac{1}{x} \frac{d\bar{w}}{dx} + F_1 \left[\frac{2\nu}{x} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \frac{d\bar{w}}{dx} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{d\bar{w}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right)^2 \right] + \frac{Q}{f(n)}, \quad (14)$$

性模量、泊松比。当梯度泡沫材料的泊松比随板厚变化不大时^[1], 可在式(7)中将 $\nu(z)$ 看作常数。将式(2)沿板的厚度进行积分可分别得到板内的径向薄膜力和弯矩^[11]:

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = A(\epsilon_r^0 + \nu \epsilon_\theta^0) + B(\kappa_r + \nu \kappa_\theta), \quad (8)$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = A(\epsilon_\theta^0 + \nu \epsilon_r^0) + B(\kappa_\theta + \nu \kappa_r), \quad (9)$$

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_r dz = B(\epsilon_r^0 + \nu \epsilon_\theta^0) + D(\kappa_r + \nu \kappa_\theta), \quad (10)$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_\theta dz = B(\epsilon_\theta^0 + \nu \epsilon_r^0) + D(\kappa_\theta + \nu \kappa_r), \quad (11)$$

其中: A, B 和 D 为刚度系数, 定义为

$$(A, B, D) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1 - \nu^2} (1, z, z^2) dz.$$

2 控制方程

2.1 位移函数形式的控制方程

假设圆板表面承受 z 方向均布载荷 q , 边界沿径向承受压力 p , 利用能量变分原理可以得到梯度泡沫圆板的平衡方程和边界条件。为便于比较, 这里假设圆板位移函数为

$$\begin{cases} U_r(r, z) = u(r) + z\varphi(r), \\ U_z(r, z) = w(r), \end{cases} \quad (12)$$

其中: w, u, φ 分别表示板中面上任意一点的横向和径向位移以及原中面法线的转角。当研究圆板的弯曲问题时, 忽略径向压力 p , 令式(12)中 $\varphi = -w_{,r}$, 经典板理论下的位移形式的控制方程为

$$F_1 = \frac{B_{11}}{D_{11}} h, \quad F_2 = \frac{A_{11}}{D_{11}} h^2, \quad F_3 = \frac{B_{11}}{h A_{11}},$$

$$Q = \frac{12qb^4}{D_s h}, \quad f(n) = f_3(n) - \frac{f_2(n)^2}{f_1(n)}.$$

将问题转化为无量纲下的控制方程:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} + \frac{d\tau}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1-\nu}{2x} \left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2 = F_3 \left(\frac{d^3 \tau}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 \tau}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{d\tau}{dx}\right) \quad (15)$$

2.3 边界条件

周边固支为

$$\begin{cases} x=1: w=u=0, \frac{d\tau}{dx}=0, \\ x=0: w=A, u=0, \frac{d\tau}{dx}=0. \end{cases} \quad (16)$$

周边不可移简支为

$$\begin{cases} x=1: w=u=0, M_x=0, \\ \Rightarrow F1 \left[\frac{du}{dx} + \frac{\nu}{x} u + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2 \right] - \left(\frac{d^2 \tau}{dx^2} + \frac{\nu}{x} \frac{d\tau}{dx}\right) = 0, \\ x=0: w=A, u=0, \frac{d\tau}{dx}=0. \end{cases} \quad (17)$$

3 梯度泡沫圆板非线性弯曲数值结果及讨论

为验证数值结果的正确性,把方程(13)向均质材料线性弯曲控制方程进行退化,首先忽略非线性项和横向剪切变形,退化到均匀材料加紧圆板时,则式(13)的理论解可以求得

$$w(r) = \frac{q}{64D} (r^2 - b^2)^2.$$

这是我们熟知的板壳理论中圆板的位移结果。可见关于梯度泡沫圆板的非线性控制方程(13)是可信的。

算例 考虑 Type1 模型的梯度泡沫铝材圆板,常温 20 °C 下的弹性模量 $E_s = 69 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu = 0.3$,研究其不同厚径比下轴对称非线性弯曲问题。

固支和简支条件下,圆板中心挠度与梯度指数的关系曲线分别如图 1、图 2 所示。由图 1、图 2 可以看出,梯度指数 n 对板的变形影响明显,周边固支条件下圆板中心挠度随梯度指数的增大而呈非线性减小,这是因为随着梯度指数的增大,材料的“泡沫”性减弱,趋于均匀固体材料“刚性”增强的原因。周边简支条件有类似的趋势。同时,随着厚径比 h/n 的增大,其中心挠度减小,且在 $h/n < 0.3$ 之前的变化趋势明显大于 $h/n > 0.3$,这是圆板典型“薄板”的优势减弱导致的现象。我们发现在 $n=0$ 的附近其非线性的特点明显,在 $n < -1$ 和 $n > 1$ 的区间材料的线性增强。

2 种边界条件下梯度泡沫圆板弯曲路径分别如图 3、图 4 所示。从图 3、图 4 中可以看出,随着外载

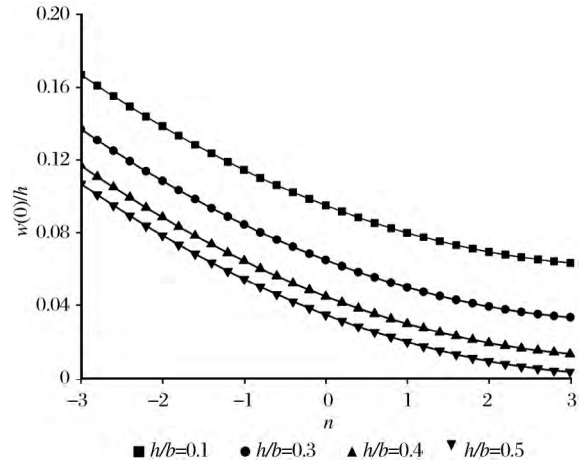


图 1 固支圆板中心挠度随梯度指数 n 的变化曲线 ($q=200$)
Fig.1 Change curve of clamp supported circular plate center deflection with gradient index n

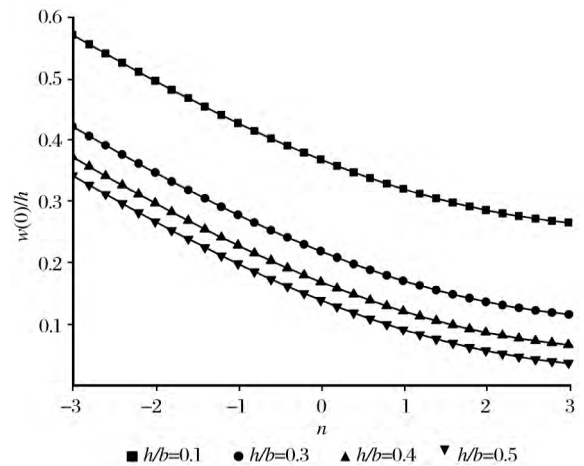


图 2 简支圆板中心挠度随梯度指数 n 的变化曲线 ($q=200$)
Fig.2 Change curve of simply supported circular plate center deflection with gradient index n

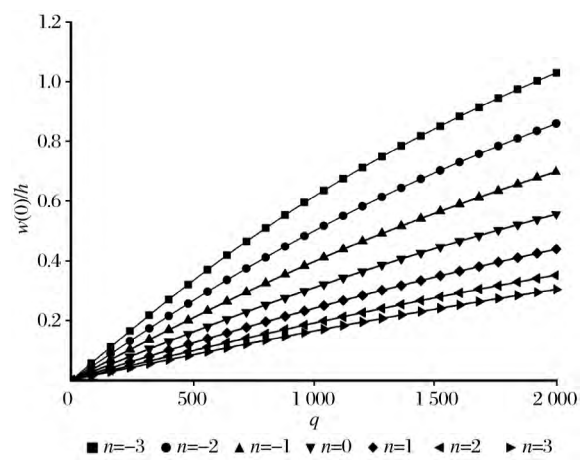


图 3 固支圆板中心挠度随外载荷 q 的变化曲线 ($h/b=0.1$)
Fig.3 Change curve of clamp supported circular plate center deflection with external load q

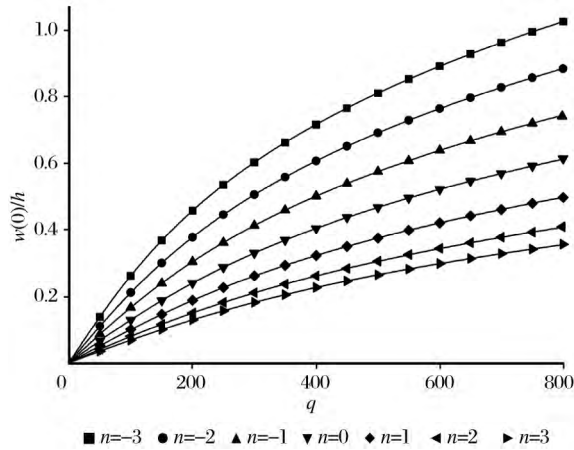


图 4 简支圆板中心挠度随外载荷 q 的变化曲线($h/b=0.1$)

Fig.4 Change curve of simply supported circular plate center deflection with external load q

荷 q 的均匀增大,圆板挠度呈现出非线性增加。同时,随着材料梯度 n 的增大,圆板挠度减小;2 种边界条件下, $n < 0$ 时圆板的挠度变化趋势明显大于 $n > 0$ 时的变化趋势。当 $n = 3$ 时,其弯曲构形已经接近于匀质材料的弯曲构形。

4 结论

研究在假设泡沫材料密度沿厚度方向指数变化的本构模型基础上,基于 von Kaman 经典板理论,建立了梯度泡沫圆板在机械载荷作用下的几何非线性动力学控制方程,并利用打靶法进行了数值求解。从数值结果中可以得到如下结论:

(1) 梯度指数 n 对板的变形影响明显,周边固支条件下圆板中心挠度随梯度指数的增大而呈非线性减小,周边简支条件有类似的趋势;(2) 随着厚径比 h/n 的增大,其中心挠度减小;(3) 随着外载荷 q 的均匀增大,圆板挠度呈现出非线性增加,同时,随着材料梯度 n 的增大,圆板挠度减小;(4) 2 种边界条件下, $n < 0$ 时圆板的挠度变化趋势明显大于 $n > 0$ 的变化趋势。

参考文献:

[1] Gibson L J, Ashby M F. Cellular Solids: Structure and Properties[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
[2] Barbier C, Michaud P M, Baillis D, et al. New Laws for the Tension/Compression Properties of Voronoi Closed-

Cell Polymer Foams in Relation to Their Microstructure[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2014, 45: 110-122.
[3] 卢子兴,黄纪翔,袁泽帅. 支柱弯曲对开孔泡沫铝力学性能影响的理论分析与数值模拟[J]. 复合材料学报, 2017, 34(1): 198-202.
[4] 王巍,安子军,彭春彦,等. 闭孔泡沫材料 3-D 几何建模及力学性能分析[J]. 塑性工程学报, 2017, 24(4): 194-200.
[5] Liu X R, Tian X G, Lu T J, et al. Blast Resistance of Sandwich-walled Hollow Cylinders with Graded Metallic Foam Cores[J]. Composite Structures, 2012, 94(8): 2485-2493.
[6] Storm J, Abendroth M, Kuna M. Influence of Curved Struts, Anisotropic Pores and Strut Cavities on the Effective Elastic Properties of Open-Cell Foams[J]. Mechanics of Materials, 2015, (86): 1-10.
[7] 张健,赵桂平,卢天健. 泡沫金属在冲击载荷下的能量吸收特性[J]. 西安交通大学学报, 2013, 47(11): 105-112.
[8] 张健,赵桂平,卢天健. 泡沫金属在冲击载荷下的动态压缩行为[J]. 爆炸与冲击, 2014, 34(3): 278-284.
[9] 吕振华,孙靖譔. 轴向变密度铝泡沫件的动态和静态压缩实验与有限元模拟分析[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2017, 57(7): 753-762.
[10] Li Shirong, Su Houde, Cheng Changjun. Free Vibration of Functionally Graded Material Beams with Surface-Bonded Piezoelectric Layers in Thermal Environment[J]. Applied Mathematics and Mechanics: English Edition, 2009, 30(8): 969-982.
[11] Li Shirong, Batra Romesh C, Ma Liansheng. Free Vibration of Orthotropic Circular Plates with Thermal Post-buckled Deformation[J]. Journal of Thermal Stresses, 2007, 30(1): 43-57.
[12] 张勇,林福泳. 铝泡沫填充薄壁结构耐撞可靠性优化设计[J]. 机械工程学报, 2011, 47(22): 93-99.
[13] Li Z, Zhang J, Fan J, et al. On Crushing Response of the Three-dimensional Closed-cell Foam Based on Voronoi Model[J]. Mechanics of Materials, 2014, 68(1): 85-94.
[14] 敬霖,王志华,赵隆茂. 多孔金属及其夹芯结构力学性能的研究进展[J]. 力学与实践, 2015, 37(1): 1-24, 48.
[15] Jing L, Wang Z H, Zhao L M. Response of Metallic Cylindrical Sandwich Shells Subjected to Projectile Impact-Experimental Investigations[J]. Composite Structures, 2014, 107: 36-47.
[16] 王鹏飞,徐松林,李志斌,等. 高温下轻质泡沫铝动态力学性能实验[J]. 爆炸与冲击, 2014, 34(4): 433-438.
[17] 刘培生. 泡沫金属双向承载的力学模型[J]. 中国有色金属学报, 2006, 16(4): 567-574.
[18] 刘培生. 多孔材料在压缩载荷作用下的过屈曲失效模式分析[J]. 物理学报, 2010, 59(12): 8801-8806.
[19] 王巍,安子军,彭春彦,等. 闭孔泡沫材料 3-D 几何建模及力学性能分析[J]. 塑性工程学报, 2017, 24(4): 194-200.

Nonlinear Bending Action Analysis of Foam Circular Plate

Fan Jianling^{1,2}, Ma Liansheng², Su Houde³

(1. Key Laboratory of Disaster Prevention and Mitigation in Civil Engineering of Gansu Province, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;
2. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;
3. Lanpec Technologies Limited, Lanzhou 730070, China)

Abstract This paper studies nonlinear bending action of the gradient foam circular plate, and establishes the geometric nonlinear dynamic control equation of the gradient foam circular plate under the mechanical load based on the von Kaman classical plate theory. It is assumed that the density of the foam gradient varies continuously in the thickness direction according to the power function. The numerical method (shooting method) is used to solve the numerical solution of the surrounding intensified and simply supported foam circular plate under the uniform load, and the relation curve between the foam gradient index and the structure bending deformation is given. The results show that, the gradient index is the gradient index, thickness-diameter ratio and external load have obvious effects on the bending deformation of the circular plate. Many numerical results provide a data reference for later vibration analysis and engineering application.

Key words Gradient foam; Circular plate; Shooting method; Bending deformation

.....
(上接第 46 页)

Blind Source Separation Model Based on EMD Decomposition and Its Application in Multipath Weakening

Yang Guoqing, Yue Dongjie, Chen Hao

(School of Earth Science and Engineering, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract This paper expounds the related theories of EMD and generalized eigenvalue blind source separation respectively, deduces the related formulas rigorously, and analyze the advantages of the two methods systematically. On this basis, a generalized eigenvalue blind source separation algorithm based on EMD decomposition is proposed to obtain the multipath error model, which can effectively reduce the multipath effect error. The experimental results show that the standard deviation of the new algorithm is minimized, which is reduced by about 80%, 90% and 77%, respectively compared to the standard deviation of the original coordinate sequence. Compared with the EMD method, the standard deviation in N direction, E direction and U direction is reduced by 33.3%, 59.2% and 30.8%, respectively. Compared with the wavelet method, the standard deviation in N direction, E direction and U direction is reduced by 6.8%, 16.3% and 10.7%, respectively. The new model weakens the multipath error in BDS coordinate sequence more effectively, and provides strong technical support for GNSS deformation monitoring.

Key words Beidou; Multipath effect; Blind source separation; Health monitoring