

多需求层不可靠生产系统的近似最优控制

刘 军^{1,2}, 李 平¹, 宋执环¹

(1. 浙江大学 工业过程控制研究所, 浙江 杭州 310027; 2. 兰州理工大学 机电学院, 甘肃 兰州 730050)

摘 要: 针对具有固定最大生产率和不确定需求层的不可靠生产系统, 提出了一种最优双界点控制策略, 即一个表示库存目标的正界点和一个表示订货需求的负界点. 当订货需求低于负界点时, 必须给系统追加额外的生产能力. 纠正了关于最优界点大小顺序的相关结论, 利用分解问题的方法得到了正、负界点的解析表达式, 同时给出了一个更简明、更容易理解的关于最优及时控制的必要条件和充分必要条件. 仿真结果表明, 该方法符合理论依据, 且需求层变化越慢, 结果越接近最优解.

关键词: 混杂系统; 最优界点控制策略; 马尔可夫过程; 生产控制

中图分类号: TP 273.1

文献标识码: A

文章编号: 1008-973X(2005)11-1730-05

Near optimal production control of failure prone systems with demand uncertainty

LIU Jun^{1,2}, LI Ping¹, SONG Zhi huan¹

(1. Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

2. School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Ligong University, Lanzhou 730050, China)

Abstract: For failure prone production systems with a fixed maximum production rate and uncertain demand, an optimal double hedging point control policy was proposed: a positive hedging point representing inventory object and a negative hedging point representing backlog demand. Extra production capacity should be purchased when the backlog level is below the negative hedging point. After improving the results as to the order of the hedging points in some literatures, the analytical expressions of the positive and negative hedging points were obtained respectively by a decomposition method. Meanwhile, a more straightforward and comprehensible necessary condition and a necessary and sufficient condition for the optimality of the just in time control policy were presented respectively. Numerical comparisons show that the results obtained by the method accord with the theoretical results, and that the more slowly the demand rate changes, the more accurate are the results obtained by this method.

Key words: hybrid system; optimal hedging point control policy; Markov process; production control

生产系统一般来说都是混杂系统, 在系统中一般都广泛存在着连续过程和离散事件, 同时, 不确定性以及随机扰动或事件, 例如订单的到达、设备的损坏等事件, 都是不可避免的. 对生产的管理者来说, 可以采用两种主要策略来应对所有不确定性事件对生产的影响: 或者依靠建立库存, 或者通过雇用临时

工人以及外购产品等追加生产能力的办法来抵御需求大于生产能力情况的出现.

在无限或者有限时域上, 许多学者研究了由不可靠的单设备组成的生产系统的调度和控制问题^[1]. 本文所讨论的最优控制策略是一种最优界点控制策略^[2,3], 大多数学者在研究这个问题时没有

考虑系统外购生产能力的可能性. Huang 等人^[4]提出了一个标准,当低于这个标准时,系统应该立即追加或外购生产能力.基于这种思想,本文针对一个只生产单一产品、由不可靠的单设备组成的生产系统,主要研究需求的变化对生产的影响.假定设备的损坏和维修时间是服从指数分布的自由变量,系统的需求率是不确定的,具有多个需求层.在生产的一个阶段,系统的需求率有可能小于系统的最高生产率,而在另一个阶段却有可能大于系统的最高生产率.考虑到生产的即时控制以及为生产管理者提供一个管理标准,提出了一种最优双界点(层)控制策略:一个表示库存(Inventory)目标的正界点和一个表示订货需求(Backlog)的负界点.当订货需求低于负界点时,必须给系统追加额外的生产能力.本文利用一种分解问题的方法,避开了由于考虑追加生产能力所带来的更大的计算复杂度,研究了最优界点的排序、求解以及最优及时控制策略的有关问题.

1 问题描述

本文研究一个生产单一产品的、由一个不可靠设备组成的生产系统. $s(t) \in \{0, 1\}$ 为一个表示设备状态的连续时间马尔可夫过程,1 表示设备处于正常工作状态(up),0 表示设备处于维修状态(down).假定设备的 up 和 down 时间是分别服从均值为 $1/p_u$ 和 $1/p_r$ 的指数分布. $\theta(t) \in \{1, 2, \dots, m\}$ 表示系统在时间 t 时的状态, x, u, d_θ 分别表示库存/订货需求、生产率以及产品需求率.假定 θ 为一个不受生产控制策略影响的时间均布的不可复归的马尔可夫链. $0 \leq u(t) \leq r$ 表示生产约束条件, r 为系统最大生产率. $v(t, \theta)$ 表示在时间 t 时的外购生产率. $C = [0, \bar{r}]$ 表示可供购买的生产率集, \bar{r} 为可供购买的最大生产率.不等式 $\bar{r} + r > d_\theta$ 始终是成立的,也就是说只要需要,需求总是可以满足的. $(x, \theta) = \{(x(t), \theta(t)), t \geq 0\}$ 表示系统的状态过程.系统模型为

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} u(t) + v(t) - d_\theta, & s(t) = 1; \\ v(t) - d_\theta, & s(t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

定义损失函数为

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T (g(x) + h(v)) dt \mid x(0), \theta(0) \right], \quad (2)$$

$$g(x) = c^+ x^+ + c^- x^-.$$

式中: E 表示求均值; x^+ 和 x^- 分别表示由库存 x^+ 或订货需求 x^- 引起的单位时间、单位产品的损失;

$x^+ = \max(x, 0), x^- = \max(-x, 0); h(v) = c_v v$ 表示以速率 v 购买生产率的单位时间的损失; c_v 则表示外购生产率的单位损失.目标函数是使损失函数 J 最小.

2 最优双界点控制策略

针对这个不可靠生产系统的控制问题,在最优单界点控制策略的基础上,提出如下最优双界点控制策略:

$$(u^*, v^*) = \begin{cases} (0, 0), & x > z^*; \\ (\min(r, d_\theta), 0), & x = z^*; \\ (r, 0), & \bar{z}^* < x < z^*; \\ (r, \max(d_\theta - r, 0)), & x = \bar{z}^*; \\ (r, \bar{r}), & x < \bar{z}^*. \end{cases} \quad (3)$$

一般情况下, z^* 为一个非负标量, \bar{z}^* 为一个负标量.这种控制策略表示,如果系统的库存高于 z^* 就停止生产,让库存消耗至 z^* 并尽量保持这种状态;如果库存低于 z^* 就以系统的最大生产率进行生产;如果库存达到 \bar{z}^* ,就外购相应的生产率来维持生产;如果低于 \bar{z}^* ,就以系统的最大生产率并且外购最大的生产力进行生产.

Hu 等人^[5]得出了对于一个扩展折旧的有关库存/订货需求的生产损失函数,有且只有当设备的故障率是生产率的线性函数时,系统的最优控制策略是一个单界点控制策略.Liberopoulos 等人^[6]则补充说明:当且仅当故障率是生产率的凹函数或线性函数时,单界点控制策略为最优控制策略.考虑到生产的实际过程,在上述结论的基础上,可以认为上述双界点控制策略也是最优的.实际上, Huang 等人^[7]已经证明了这一结论.本文只研究这种策略.

3 最优界点的排序

根据文献[4],假定 $d_m > d_{m-1} > \dots > d_2 > d_1$, 同时 $d_l \leq r, d_{l+1} > r. Q = [q_{ij}]$ 表示 θ 的转移矩阵.假定 $\bar{z}_m^*, \bar{z}_{m-1}^*, \dots, \bar{z}_{l+1}^*$ 分别代表当需求状态为 $d_m, d_{m-1}, \dots, d_{l+1}$ 时的最优界点, $z_l^*, z_{l-1}^*, \dots, z_1^*$ 则代表当需求状态为 d_l, d_{l-1}, \dots, d_1 时的最优界点.在式(3)的控制策略下,用定理 1 来说明这些最优界点的大小顺序问题.

定理 1 如果 $d_m > d_{m-1} > \dots > d_2 > d_1$ 并且 $d_l \leq r, d_{l+1} > r$ 成立,则分别有 $\bar{z}_{l+1}^* \leq \bar{z}_{l+2}^* \leq \dots \leq \bar{z}_m^*$ 和 $z_1^* \leq z_2^* \leq \dots \leq z_l^*$ 成立.

证明: 首先介绍文献[4]的结论:

引理 1 假定 i 表示可行状态, 即 $r_i > d_i$, 则 $z_i^* \leq \max \{z_j^* : j \neq i; q_{ij} \neq 0\}$.

引理 2 假定 i 表示不可行状态, 即 $r_i < d_i$, 则 $\min \{z_j^* : j \neq i; q_{ij} \neq 0\} \leq z_i^*$.

这两个引理的证明见文献[4]. 仔细研究上述引理, 发现文献[4]中研究 m 个相似的不可靠设备时的情况和这里研究的问题在本质上是一致的. 在这个问题中, 如果用 r 和 z_i^* 分别代替文献[4]中的 r_i 和 z_i^* , 则上述结论依然是成立的. 首先考虑最大可行状态, 也就是需求率为 d_1 的状态. 根据引理有 $z_1^* \leq \max \{z_2^*\} = z_2^*$; 接着考虑需求率为 d_2 的状态, 同样有 $z_2^* \geq \max \{z_1^*, z_3^*\} = z_3^*$; 依此类推, 对 $r \geq d_0$ 的状态, 可以得到 $z_1^* \leq z_2^* \leq \dots \leq z_l^*$. 如果 $z_l^* = 0$, 就称此时的控制为及时(JIT)控制. 上述证明主要利用了引理 1. 考虑需求率大于生产率的不可行状态, 即 $r < d_0$ 的状态. 首先考虑当需求率最大时的状态, 即需求率为 d_m 时的状态, 利用引理 2, 有 $z_m^* \geq \min \{z_{m-1}^*\}$; 接着考虑状态 d_{m-1} , $z_{m-1}^* \geq \min \{z_m^*, z_{m-2}^*\} = z_{m-2}^*$ 成立; 依此类推, 可以得到 $z_m^* \geq z_{m-1}^* \geq \dots \geq z_1^*$. 命题得证.

本文认为文献[4]中得出的类似结论: $z_{i+1}^* \leq z_{i+2}^* \leq \dots \leq z_m^* \leq 0 \leq z_1^* \leq z_2^* \leq \dots \leq z_l^*$ 是片面的, 没有考虑生产能力不足的情况. 因为如果需求率足够大, 即使此时的存货层是正的, 也应该追加足够的生产率, 这样才符合实际生产情况. 在本文的数字仿真中, 这一点也得到了验证.

4 近似最优界点

采用本文的目标函数, 很难得到最优界点的解析表达式. 用 J^* 表示最小损失, V_i^* 表示当处于 $\theta = i$ 的需求状态时的最优价值函数, 可以得到如下汉密尔顿-雅可比方程:

$$\min_{u,v} \left\{ \frac{dV_i^*(x)}{dx} (u + v - d_0) + h(v) - \sum_j q_{ij} V_j^*(x) - g(x) + J^* \right\} = 0 \quad (4)$$

由方程(4)出发, 文献[4]中给出了一些关于库存的平稳状态概率分布的等式, 并且描述了一个得到最优界点解析表达式的步骤, 也就是最终是求取一个非线性的最优化问题. 实际上这个非线性最优问题依然是很难求解的. 本文利用一种问题分解的办法, 提供了一种得到近似最优界点解析表达式的简单方法.

4.1 当 $r \geq d_0$ 时的近似最优界点

在以下方法中主要考虑生产是否能够满足需

求, 因此 $r \geq d_0$ 意味着 $r p_r / (p_d + p_r) \geq d_0$, 也就是说生产是满足需求的; $r < d_0$ 意味着 $r p_r / (p_d + p_r) < d_0$, 即生产是不能满足需求的. 在 $r \geq d_0$ 的条件下, 即在生产总是可以满足需求的情况下, 外购生产力是不需要的. 在这个阶段, 损失函数就可以用函数

$$J_{01} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T g(x) dt \right]$$

来代替. 这看起来像用一个无限时域问题取代了一个有限时域问题. 实际上, 考虑到在无限时域上生产的连续性和需求状态的可重复性, 对某一个需求状态, 这种替代是可行的. 在这种情况下的最优界点问题已经在不同程度上被加以研究, 利用相关的结果, 可以很容易地得到在这种情况下最优界点 z_i^* 的解析式:

$$z_i^* = \frac{1}{\lambda} \ln \left[(1 + \frac{c^-}{c^+}) (1 - \sigma) \right]; i = 1, 2, \dots, l. \quad (5)$$

式中:

$$\lambda = \frac{p_r - d_0(p_r + p_d)}{d_0(r - d_0)}, \quad \sigma = \frac{p_r - d_0(p_r + p_d)}{(r - d_0)(p_r + p_d)}$$

对于上述情况, 很明显 $z_i^* \geq 0; i = 1, 2, \dots, l$ 是成立的. 为了更深入理解 $r p_r / (p_d + p_r) \geq d_0$ 的意义, 下面以两个定理来说明关于最优JIT控制策略的问题.

定理 2 如果最优控制策略是JIT控制策略, 那么必定存在着

$$\frac{p_r - p_d}{p_r + p_d} \geq \frac{d_0}{r}$$

定理 3 最优控制策略是JIT控制策略的充分必要条件为

$$r \left[\frac{p_r}{p_r + p_d} c^+ + \frac{p_d}{p_r + p_d} c^- \right] \geq d e^+.$$

先证明定理 3, 则定理 2 的证明就相当简单了.

证明: 在文献[8]研究的基础上, 可以得到关于库存(订货需求)的概率密度函数. 对其进行积分运算, 得到分布函数为

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} (1 - \sigma) e^{-\lambda(c^-x)}, & x < z; \\ 1.0, & x \geq z. \end{cases} \quad (6)$$

研究式(6)和控制策略式(3), 库存层在最优界点 z 的概率为 σ , 即 $P(x = z) = \sigma$. 如果定义 $\gamma = P(x = z)$, 根据文献[9]得出了最优JIT控制的充分必要条件为 $\gamma \geq c^- / (c^- + c^+)$. 利用这个结果可以得到

$$\frac{p_r - d_0(p_r + p_d)}{(r - d_0)(p_r + p_d)} \geq \frac{c^-}{c^- + c^+},$$

即 $c^+ r p_r - c^- r p_d \geq d e^+ (p_r + p_d)$ 成立. 重新整理上述不等式, 得到定理 3. 注意 $r p_r / (p_r + p_d)$ 是平均生产率, 可以称 $r p_d / (p_r + p_d)$ 为平均损失生产率, 那

么 $c^+ r p_r / (p_r + p_d)$ 可以理解为平均生产率引起的库存损失,而 $c^- r p_d / (p_r + p_d)$ 可以理解为平均损失生产率引起的缺货损失. 这样关于最优 JIT 控制策略的充分必要条件又可以表述为:平均生产率引起的库存损失与平均损失生产率引起的缺货损失之差应该不小于按需求率大小生产而引起的库存损失.

定理 2 的证明相对就简单了. 根据定理 3, 可以得到

$$r \left[\frac{p_r}{p_r + p_d} c^+ - \frac{p_d}{p_r + p_d} c^- \right] \geq d e^+.$$

考虑到生产的实际意义,产品的库存损失不应该大于产品的缺货损失,也就是说 $c^+ \leq c^-$ 成立. 因此

$$r c^+ \left[\frac{p_r}{p_r + p_d} - \frac{p_d}{p_r + p_d} \right] \geq r \left[\frac{p_r}{p_r + p_d} c^+ - \frac{p_d}{p_r + p_d} c^- \right],$$

定理 2 自然成立. 作为必要条件的定理 2 说明当最优控制策略是 JIT 控制策略时,平均生产率与平均损失生产率之差应该小于需求率.

4.2 当 $r < d_0$ 时的近似最优界点

与前文一样,因为这里是考虑生产不能满足需求的状况,所以暂且用 $r < d_0$ 表示生产是不满足需求的,即 $r p_r / (p_d + p_r) < d_0$. 如果在有限时域上考虑一个确定的需求状态,很明显库存(订货需求)层的轨迹基本上保持在状态空间 $x \leq 0$ 上. 换句话说,在 $[0, z_i]$; $i = 1, 2, \dots, l$ 上的轨迹是短暂和有限的. 考虑到生产的实际情况,当库存低于某个层面时,必须追加生产力. 在这种情况下,损失函数可以用函数

$$J_{\text{a}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T (c^- x^- + c_v v) dt \right]$$

来近似代替. 利用反向思维,这个系统可以转化为一个具有固定连续生产率 d_0 和不确定需求率 r_s 的生产系统. 注意:如果 $s = 1$,则有 $r_s = r$; 如果 $s = 0$,则有 $r_s = 0$. 在式(3)控制策略下, J_{a} 可以转换为

$$J_{\text{a}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T (c^- x^+ + c_v r^- x^-) dt \right].$$

这是因为在此控制策略下,库存层在空间 $[-\infty, z^*]$ 和 $[z^*, \infty]$ 内的轨迹是短暂和有限到达的. 在正常生产条件下,不鼓励追加生产力的行为. 很明显,对这个问题又存在一个最优界点控制策略. 和前文有所不同的是,在这里生产率是固定的而需要率则是不确定的.

定义 $e_1 = p_r / (p_d + p_r)$ 和 $E_1 = e_{1r}$. 在这种情况下, E_1 代表了平均需求率. 需求的渐进方差 $V(t)$ 可以由文献[10]推出:

$$V = \frac{2}{p_r} (1 - e_1) e_{1r}^2.$$

需求方差的平方系数项可以定义为

$$c v^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V}{E_1^2} = \frac{2}{p_r} (1 - e_1). \tag{7}$$

引入文献[11]中的一个结论:

$$z_i^* = \begin{cases} \max \left\{ 0, -c v^{\frac{1}{2}} \frac{e_2}{1 - e_2} \frac{(u_2 - E_1) E_1}{E_1 - E_2} \times \right. \\ \left. \ln \left[\left(\frac{c^+}{c^+ + c^-} \right) \frac{E_1}{E_2} \right] \right\}, & E_1 \leq u_2; \\ 0, & E_1 > u_2. \end{cases}$$

其具体意义可以参见文献[11].

不失一般性,在这种情况下,即当生产率固定而需求不定时的最优界点 $\bar{\eta}^*$ 可以通过分析上述文献[11]的结论而推导出来,即

$$\bar{\eta}^* = c v^2 \frac{e_1}{1 - e_1} \frac{(d_0 - r) d_0}{d_0 - E_1} \ln \left[\left(\frac{c^-}{c^- + c_v r^-} \right) \frac{d_0}{E_1} \right]. \tag{8}$$

再考虑当 $r < d_0$ 时生产的实际意义. 对于实际生产系统,当库存低于某个界点时就需要追加生产率的近似最优界点为

$$z_i^* = c v^2 \frac{e_1}{1 - e_1} \frac{(r - d_0) d_0}{d_0 - E_1} \ln \left[\left(\frac{c^-}{c^- + c_v r^-} \right) \frac{d_0}{E_1} \right]; \tag{9}$$

$i = l + 1, \dots, m.$

这种方法实际上是在整个时域上扩展每一个需求状态并加以研究. 而且,在式(3)的控制策略下,这种近似主要是考虑到在 $[-\infty, z^*]$ 和 $[z^*, \infty]$ 上的状态轨迹是短暂和有限的. 如果在一个有限时间内考虑这个问题,这种近似当然也是不准确的. 因此上述结论对本文的目标函数而言,并不是准确的解析表达式,只是一种近似. 但是这种方法避免了求解复杂的非线性最优问题,通过简单的计算就可以得到适宜的参考值. 另外,在整个生产过程中,甚至可以只使用一个确定的界点策略(即上、下界点是固定的). 这两个界点可以利用平均需求率,通过式(5)和(9)计算得到,也可以直接利用 z_i^* 和 \bar{z}_m^* .

5 仿真比较

文献[7]也推荐了一种分解问题的近似方法. 用 J_1^* 表示库存损失, J_2^* 表示缺货损失, J_3^* 表示外购生产力的损失. 文献[7]通过近似的方法得到了总的生产损失,然后近似处理,对其进行偏导数计算,整理后近似得到

$$f_1(z_1^*) = c^+ e^{-\lambda_1 z_1^*} + c^- e^{-\lambda_1 (c^- + z_1^*) / c^-} - \frac{r_1}{d} p_1 (c^+ + c^-) = 0, \tag{10}$$

$$f_2(z_2^*) = c^+ e^{-\lambda_2 (c^- - z_2^*) / c^-} + c^- e^{-\lambda_2 z_2^*} - \frac{r_2}{d} p_2 (c^+ + c^-) = 0. \tag{11}$$

式中 z_1^* 表示最优正界点, z_2^* 表示最优负界点, 其他符号的意义请参见文献[7].

取 $r = 6, \bar{r} = 3, p_r = 0.3, p_d = 0.1, c^+ = 0.2, c^- = 0.8, c_v = 4.0$. 图 1 是采用本文方法和文献[7]的方法得到的需求率和相应界点的关系图.

首先, 当需求率远远大于生产率时, 两者都反映了最优界点随需求率变化的规律. 当需求率小于系统的平均生产率时, 随着需求率的增大, 相应的最优界点也增大; 当需求率大于系统的平均生产率时, 随着需求率的增大, 相应最优界点的绝对值却减少. 这就是定理 1 反映的内容. 可以看出, 本文的结果更完美地反映了这种规律.

其次, 图 1(a) 中得到的最优界点的绝对值比图 1(b) 的最优界点的绝对值大. 这是因为本文将特定的需求状态在整个时域上扩展而单独加以研究的结果. 如果需求层变化很快, 本文的结果就比文献[7]的结果有更大的误差; 而如果需求层变化很慢, 本文的结果就比较完美.

再次, 当需求率大约为 6 时, 用这两种方法得到的最优界点都大于 0. 在某种程度上这是因为这两种方法都是近似的方法. 然而实际上它却反映了在生产中如果需求率足够大, 即使此时的库存是正值, 也应该外购生产率的事实.

应该指出, 连续生产过程中, 如何解决好控制策略的转换是个问题. 同时利用本文的方法做不同的试验研究, 可以发现条件 $c_v > c^+ / p_d$ 和 $c_v > c^- / p_r$ 对正、负最优界点的存在有特殊的意义. 当这两个条件满足时, 可以得到理想的结果; 如果不满足这两个条件, 所得到的结果也是不符合理论结论的. 这在一定程度上验证了文献[7]中关于最优正、负界点存在的充分必要条件.

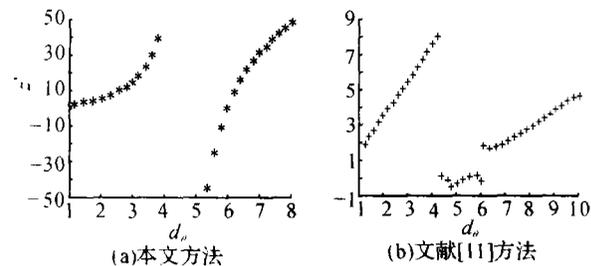


图 1 采用不同方法的最优界点随需求率的变化关系
Fig. 1 Relationship of optimal hedging point versus demand rate by different methods

6 结 语

本文研究了一个不可靠生产系统, 提出了一个

最优双界点控制策略. 这个策略实际上表明当库存低于某个确定值时, 系统必须追加生产能力. 利用一种问题分解的办法, 得到了相应最优界点的解析表达式. 应该指出, 在考虑本策略的同时, 如果再综合考虑其他影响生产的因素, 比如资源、设备等, 本文的结果将具有更强的指导意义.

参考文献(References):

- [1] GERSHWIN S B. Hierarchical flow control: A framework for scheduling and planning discrete events in manufacturing systems [A]. *Proceedings of the IEEE* [C]. [s.l.]: IEEE, 1989, 77(1): 195-209.
- [2] GERSHWIN S B. *Manufacturing systems engineering* [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1994.
- [3] AKELLA R, KUMAR P R. Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system [J]. *IEEE Transactions Automatic Control*, 1986, AC-31: 116-126.
- [4] HUANG L, HU J Q, VAKILI P. Optimal control of a multi-state manufacturing system: Control of production rate and temporary increase in capacity [A]. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on CDC* [C]. [s.l.]: IEEE, 1998: 2155-2159.
- [5] HU J Q, VAKILI P, YU Y G. Optimality of hedging point policies in the production control of failure prone manufacturing systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1875-1880.
- [6] LIBEROPOULOS G, CARAMANIS M. Production control of manufacturing systems with production rate-dependent failure rates [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(4): 889-895.
- [7] HUANG L, HU J Q, VAKILI P. Optimal control of failure prone production system with the possibility of using extra capacity. *Recent advance in manufacturing engineering* [M]. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [8] BIELECKI K, KUMAR P R. Optimality of zero inventory policies for unreliable manufacturing systems [J]. *Operational Research*, 1988, 36(4): 532-541.
- [9] PERKINS J R, SRIKANT R. Hedging policies for failure prone manufacturing systems: Optimality of JIT and bounds on buffer level [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(7): 953-957.
- [10] TAN B. Variance of the throughput of an N -station production line with no intermediate buffers and time dependent failure [J]. *Operational Research*, 1997, 101(3): 560-576.
- [11] TAN B. Production control of a pull system with production and demand uncertainty [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 779-783.