

基于抗差最小二乘配置法的 GPS 高程拟合

魏玉明^{1,2}, 张永志¹

(1. 长安大学 地质与测绘学院, 西安 710064; 2. 兰州理工大学 土木工程学院, 兰州 730050)

摘要: 介绍了最小二乘配置的基本原理和抗差协方差函数的拟合原理, 给出抗差最小二乘配置的求解过程, 并通过实例讨论抗差最小二乘配置在 GPS 高程拟合中的有效性和解决最小二乘配置不具有抗差性的不足。

关键词: 最小二乘配置; 抗差协方差; 等价权; 高程异常拟合; 精度

中图分类号: O241.5

文献标识码: A

Robust least squares collocation method for GPS height fitting

Wei Yuming^{1,2}, Zhang Yongzhi¹

(1. School of Geological Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710064, China;

2. School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: The basic principles of the least squares collocation and fitting by robust covariance function are expounded, and the data processes of the robust solution of the least-squares collocation is given. Finally, we show the effectiveness of the robust least-square collocation by a real example of the GPS elevation fitting.

Key words: least square collocation; robust covariance; equivalent weight; fitting of height anomaly; accuracy

0 引言

随着 GPS 测量技术在工程测量领域的广泛应用, 平面位置相对精度可以达到 $10^{-7} \sim 10^{-9}$, 而要获得较高精度的正常高, 一直是广大测量工作者努力的方向。目前^[3-5]主要通过 GPS 网中用水准测量的方法施测一定数量的水准点, 然后计算 GPS 和水准重合点的高程异常值, 并据此利用各种插值的方法获得测区内其它 GPS 点的高程异常和正常高。其中最小二乘配置法同时考虑测量误差和选取的模型与实际似大地水准面的差异, 而备受大家的关注。最小二乘配置法是根据已测点信号、协方差以及待估算点的协方差关系, 获得待估点的无偏最优估计, 是平差、推估和滤波的综合体; 此模型应用的成败主要取决于合理确定信号的方差—协方差阵^[2-6]以及信号与噪声方差之间的权比。许多专家、学者从方差—协方差函数的选择、点的区域分布等因素分析了对 GPS 高程拟合的精度影响。无论选择何种方差—协方差函数、重合点的区域分布如何, 若已知水准点含有粗差 (GPS 测量、水准测量), 都必然影响拟合函数, 从而影响内插点高程的精度。从以前的研究发现, 最小二乘配置不具备

抗干扰性。为了解决这一缺陷, 本文引进抗差估计, 通过一实例说明抗差最小二乘配置在 GPS 高程拟合中的有效性以及解决最小二乘配置不具有抗差性的不足。

1 最小二乘配置模型

最小二乘配置的一般模型可以写成^[1,3,4]:

$$L = X + GY + \Delta \quad (1)$$

式 (1) 中, L 为观测向量, Δ 为观测噪声, Y 为非随机参数, X 为随机参数 (包括滤波和推估部分), GY 为观测中倾向部分, 多采用二次多项式函数表示。

依据变分原理, 即:

$$(X, X) + \Delta^T C_{\Delta\Delta}^{-1} \Delta = \text{最小} \quad (2)$$

式 (2) 中, (X, X) 表示信号范数的平方, $C_{\Delta\Delta}$ 表示噪声的协方差矩阵。

收稿日期: 2016-03-03; 修订日期: 2016-06-26

基金项目: 国家自然科学基金项目 (41374028, 40674001); 甘肃省科技计划资助项目 (1508RJZA094); 建工七七基金。

作者简介: 魏玉明 (1974 -), 男 (汉族), 甘肃渭源人, 博士生, 讲师。

利用拉格朗日乘数法解算方程 (1) 得到:

$$\hat{Y} = \{ G^T (C_{XX} + C_{\Delta\Delta})^{-1} G \}^{-1} G^T (C_{XX} + C_{\Delta\Delta})^{-1} L \quad (3)$$

$$\hat{X} = C_{XX} (C_{XX} + C_{\Delta\Delta})^{-1} (L - G\hat{Y}) \quad (4)$$

$$\hat{X}' = C_{XX'} (C_{XX} + C_{\Delta\Delta})^{-1} (L - G\hat{Y}) \quad (5)$$

式 (3) ~ 式 (5) 中, C_{XX} 表示已测点信号方差—协方差, $C_{XX'}$ 表示已测点和未测点之间信号方差—协方差, \hat{X} 表示已测点信号, \hat{X}' 表示未测点信号。

相应的, 高程异常观测值的滤波 L 和推估 L' 结果为:

$$\hat{L} = G\hat{Y} + \hat{X} \quad (6)$$

$$L' = G\hat{Y} + \hat{X}' \quad (7)$$

2 先验方差—协方差的估计

常用的协方差函数有^[3-5]:

(1) 高斯函数: $C(d) = C(0) \exp(-k^2 d^2)$ (8)

(2) 希尔沃宁: $C(d) = \frac{C(0)}{1 + k^2 d^2}$ (9)

(3) 似高斯函数: $C(d) = C(0) \exp(-kd)$ (10)

式 (8) ~ 式 (10) 中, $C(0)$ 表示信号的方差 k 为待定参数 d 为两点间的距离。其中 C 的先验值的计算采用式 (11):

$$C(X_i, X_j) = \frac{[X_i \cdot X_j]}{n_d} \quad (11)$$

式 (11) 中: n_d 为相距为 d 的对点数; i, j 为对点的点号, C 是任意两个相距为 d 的数据点之间的先验协方差, $[\]$ 表示求和, X_i 为异常位的信号值。本文中, 采取限定距离区间, 如点之间最大距离和最小距离之差为 D , 则将此间距以数据变化情况分为 M 段, 那么每段间距应为 D/M , 这样就可以把整个测区按距离分为 M 段, 第一区间应该为 $[d_{\min}, d_{\min} + D/M]$, 第二区间 $(d_{\min} + D/M, d_{\min} + 2 * D/M]$, 依次有, 第 n 区间 $(d_{\min} + D/M, d_{\min} + n * D/M]$, 然后 d 值分别取各区间距离平均值。这样所有的点都参与了协方差的计算, 而且在确定经验协方差参数时, 距离值更科学, 也便于编程。

3 抗差协方差函数的估计^[9]

如果观测值的先验信息未知, 那么我们总是假设观测向量是等精度的, 即先假设观测值的权阵为单位阵:

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

然后经过后面的迭代过程再最后确定观测值的权阵。观测值中数一般是最小二乘法计算的:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{n} \quad (13)$$

式 (13) 中: ε_i 表示高程异常; n 为观测值个数; $\bar{\varepsilon}$ 为观测值中数。

众所周知, 算术中数法的崩溃污染率为 0, 这就是说它不具备抗差能力, 而中位数法的抗差性能最好, 其崩污染率为 1/2, 所以这一步采用中位数法来代替算术中数法, 从而得到初始观测值中数, 即:

$$\hat{\varepsilon} = \text{med}(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \quad (14)$$

中位数虽然具有抗差性, 但这种方法没有考虑到效率问题, 所以有必要进行迭代计算。在求取初始观测值中数初始值后, 对观测值进行“中心化”, 即求取偏离量:

$$\delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - \hat{\varepsilon} \quad (15)$$

初始方差因子为:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |\delta\varepsilon_i|^2}{n}} \quad (16)$$

但是, 式 (16) 的结果容易受观测粗差的影响。所以采用式 (17) 来计算方差因子, 即:

$$\hat{\sigma}_0 = \text{med}(|\delta\varepsilon_i|) / 0.6745 \quad (17)$$

采用 IGG 方案进行观测值的抗差中数计算, 其降权函数为^[8]:

$$\bar{p}_i = \begin{cases} p_i & |\delta\varepsilon_i / \hat{\sigma}_0| \leq k_0 \\ p_i \cdot \frac{k_0}{|\delta\varepsilon_i / \hat{\sigma}_0|} & |\delta\varepsilon_i / \hat{\sigma}_0| > k_0 \end{cases} \quad (18)$$

式 (18) 中: k_0 通常取 1.5 ~ 2.5。

最后, 用式 (18) 所得到的等价权来计算观测值的加权平均值:

$$\bar{\varepsilon}^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{p}_i^{(k-1)} \cdot \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n \bar{p}_i^{(k-1)}} \quad (19)$$

通过式 (15)、(17)、(18)、(19) 过程的迭代计算, 由式 (19) 得到了具有较高崩溃污染率的观测

值中数,同时由式(18)得到了等价权 \bar{P} :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{P}_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

观测值与中数的偏离值(视为“残差”):

$$\delta\varepsilon = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon} \quad (21)$$

从最后一次迭代所得到的式(16)和式(20),就可以得到观测误差的方差:

$$C_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 \bar{P}^{-1} \quad (22)$$

4 算例分析

为了验证抗差最小二乘配置法在工程异常拟合中的有效性,选取黑河流域某一滑坡GPS和一等几何水准测量数据进行工程异常拟合计算。点位分布见图1,计算中非随机部分,采用二次多项式函数。协方差函数选取高斯函数。计算中分别用不含粗差和含有粗差的高程异常数据作为拟合数据,各利用观测值中数计算观测值方差(方案一)、中位数计算观测值方差(方案二)、抗差中数计算观测值方差(方案三)和抗差中位数计算观测值方差(方案四)四种方案。

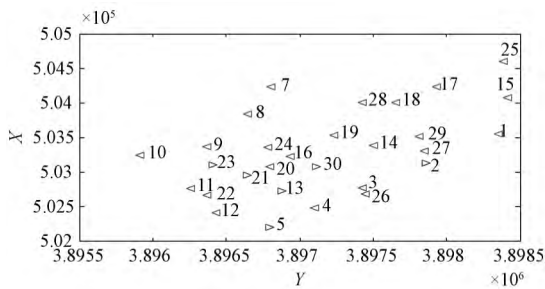


图1 点位分布图

Fig.1 Point distribution

4.1 不含粗差高程异常数据各种方案拟合计算

首先根据式(8)、式(11)计算高斯函数的参数 $k^2 = 0.00000047514$,信号方差 $C(0) = 0.0058m^2$ 。根据拟合得到的协方差函数,计算拟合点信号协方差阵 C_{XX} ,拟合点与检核点的方差—协方差阵 C_{XY} ,再计算观测值方差(四种不同方案)然后利用最小二乘配置理论重新计算倾向参数 Y 和信号的估值 \hat{X} 和 \hat{X}' 。根据拟合方程计算拟合点的高程异常,并与理论的高程异常比较,得到的拟合点和检核点的拟合残差见图2、3。

内、外符合精度均采用中误差计算公式:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad (23)$$

式(23)中: v 为拟合残差 n 为拟合点个数或者检核点拟合个数。内符合精度主要说明模型选取的合理性,而外符合精度说明预测的准确性。表1给出了四种配置方案的内、外精度。

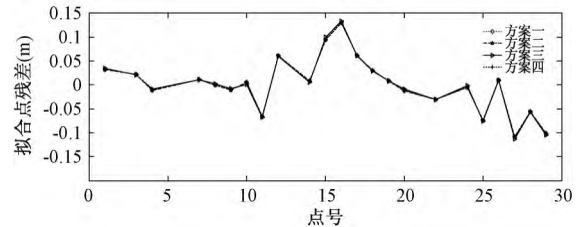


图2 拟合点拟合残差

Fig.2 Fitting errors of fitting points

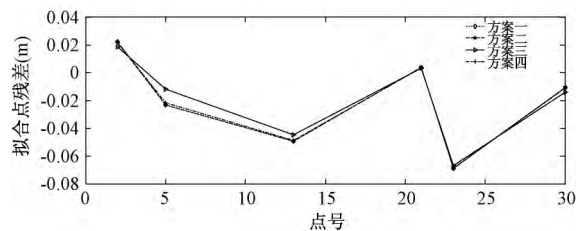


图3 检核点拟合残差

Fig.3 Fitting errors of check points

表1 内、外符合精度比较表(单位: m)

Table 1 Comparison of inner and outer accuracies

	方案一	方案二	方案三	方案四
内符合精度	0.0574	0.0574	0.0588	0.0576
外符合精度	0.0409	0.0408	0.0378	0.0404

从图2可以看出,当拟合数据不含粗差时,无论采用何种方法计算观测值的方差,拟合点的拟合结果一致。从图3可以看到,检核点拟合结果一致,抗差结果略优于一般配置计算。从表1看出,内符合精度在数值上一致,外符合精度抗差估计略优于一般配置计算。

4.2 含粗差高程异常数据各种方案拟合计算

给计算高程异常数据中计入一些粗差,然后按四种不同方案进行拟合计算。粗差的计入是按照上述计算中误差的2~3倍,人为地给其中10号点、19号点分别加入12cm粗差。根据拟合方程计算拟合点的高程异常,并与理论的高程异常比较,得到的拟合点和检核点的拟合残差见图4、5,中误差见表2。

从图4可以看出,四种方案拟合结果趋于一致。从图5可以看到,抗差配置的结果明显优于一般的配置拟合,这一结论从表2看得更为明显。外

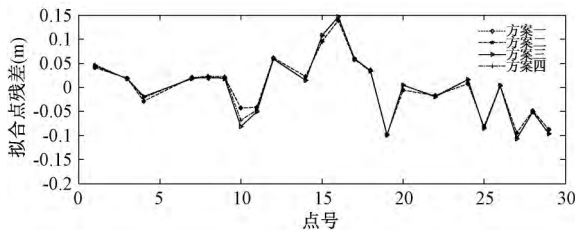


图 4 拟合点拟合残差

Fig. 4 Fitting errors of fitting points

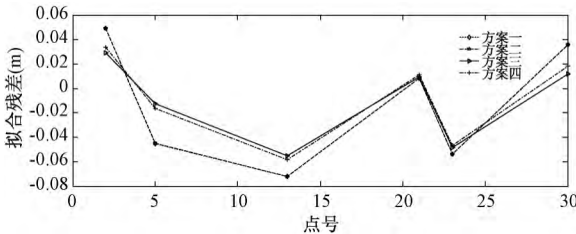


图 5 检核点拟合残差

Fig. 5 Fitting errors of check points

表 2 内、外符合精度比较表 (单位: m)

Table 2 Comparison of inner and outer accuracies

	方案一	方案二	方案三	方案四
内符合精度	0.0605	0.0606	0.0660	0.0652
外符合精度	0.0527	0.0526	0.0364	0.0385

符合精度从方案一的 0.0527m 提高到方案三的 0.0364m, 从方案二的 0.0526m 提高到方案四的 0.0385m, 抗差配置以后精度提高了 26.8%。

5 结语

最小二乘配置法是根据已测点信号、协方差以及待估算点的协方差关系, 获得待估点的无偏最优估计, 是平差、推估和滤波的综合体, 该模型在 高程异常拟合中, 通过把模型误差当作具有先验性质的信号处理, 同时考虑信号与噪声之间的权重对拟合结果的影响, 取得了很好的结果, 但是当高程异常中含有粗差时, 拟合结果会受到歪曲。通过本文的抗差最小二乘配置拟合计算, 得出以下结论: ①拟合区域一定时, 利用观测值中数计算观测值方差和中位数计算观测值方差, 经最小二乘配置拟合计算的内、外符合精度基本一致。②无论拟合数据是否含有粗差, 四种配置内符合精度保持高度一致。③当拟合数据含有粗差时, 抗差最小二乘配置外符合精度明显优于普通最小二乘配置。④无论是否含有粗差, 外符合精度均高于内符合精度, 这也正是我们想得到的。⑤抗差最小二乘配置在 GPS 高程拟合中是有效的, 在将来的拟合计算中应给予考虑。

拟合计算中, 经验协方差函数选取了高斯函数, 并没有考察其它协方差函数, 抗差估计仅考虑了 IGG 方案, 对于其它协方差函数及抗差方案选择对抗差最小二乘配置的拟合的影响, 有待于进一步研究。

参 考 文 献

[1] [奥] 莫罩兹著, 宁津生、管泽霖等译, 陈俊勇校. 等物理大地测量学 [M]. 北京: 测绘出版社, 1984. Moritz H book, Ning jinsheng, Guan zelin et al translation, Chen junyong correction. Advanced physical geodesy [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1984. (in Chinese)

[2] 刘念, 胡荣明. 拟合推估在 GPS 高程解算中的应用 [J]. 测绘通报, 2001, (7): 29~31. Liu Nian, Hu Rongming. Application of collocation to adjustment of GPS heights [J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2001, (7): 29~31. (in Chinese)

[3] 沙月进. 最小二乘配置法在 GPS 高程拟合中的应用 [J]. 测绘信息与工程, 2000, (3): 3~5. Sha Yuejin. Application of the least square collocation in GPS height fitting [J]. Journal of Geomatics, 2000, (3): 3~5. (in Chinese)

[4] 孙正明, 高井祥, 王坚等. 最小二乘配置法在 GPS 高程异常推估中的应用 [J]. 测绘科学, 2007, 32 (6): 102~103. Sun Zhengming, Gao Jingxiang, Wang Jian et al. Application of the least squares collocation to prediction of GPS abnormal height [J]. Science of Surveying and Mapping, 2007, 32 (6): 102~103. (in Chinese)

[5] 李成仁, 岳东杰, 金保平. 协方差函数的选择对 GPS 高程拟合精度的影响 [J]. 大地测量与地球动力学, 2012, 32 (2): 82~85. Li Chengren, Yue Dongjie, Jin Baoping. Study on effect of choice of covariance [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2012, 32 (2): 82~85. (in Chinese)

[6] 张勤, 张菊清, 岳东杰. 近代测量数据处理与应用 [M]. 北京: 测绘出版社, 2011. Zhang Qin, Zhang Juqing, Yue Dongjie. Modern measured data processing and application [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2011. (in Chinese)

[7] 姚道荣等. 最小二乘配置与普通 Kriging 法的比较 [J]. 大地测量与地球动力学, 2008, (3): 77~82. Yao Daorong et al. Comparison between least squares collocation and ordinary Kriging [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2008, (3): 77~82. (in Chinese)

[8] 周江文, 黄幼才, 杨元喜等. 抗差最小二乘法 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1997. Zhou Jiangwen, Huang Youcai, Yang Yuanxi et al. Robustified least squares method [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1997. (in Chinese)

[9] 刘念. 协方差函数的抗差估计 [J]. 测绘科学, 2001, (3): 25~28. Liu Nian. Robust estimation of covariance function [J]. Science of Surveying and Mapping, 2001, (3): 25~28. (in Chinese)