

# 机床误差对圆弧齿线圆柱齿轮齿面误差影响规律的理论研究\*

吴阳<sup>1</sup> 侯力<sup>1</sup> 罗岚<sup>1</sup> 马登秋<sup>2</sup> 魏永峭<sup>3</sup> 易宗礼<sup>1</sup>

(1. 四川大学机械工程学院 成都 610065;

2. 遵义师范学院工学院 遵义 593006;

3. 兰州理工大学机械工程学院 兰州 730050)

**摘要：**机床误差是导致圆弧齿线圆柱齿轮齿面误差的主要原因，研究机床误差与齿面误差之间的关系将为机床加工参数反求、齿面误差修正等提供理论依据。基于圆弧齿线圆柱齿轮成型原理建立了齿轮机床结构模型，建立了机床坐标系体系。通过齿坯和刀盘位置误差、刀具形状误差对机床整体误差进行描述，基于啮合原理推导了不包含机床误差和包含机床误差的齿面方程。研究了齿轮误差曲面计算方法，采用二阶近似曲面和齿面平均误差影响系数分析不同机床误差下误差曲面，研究机床误差对齿面误差的影响规律。通过实例分析了被加工齿轮几何参数不变时和变化时，机床误差对圆弧齿线圆柱齿轮凹齿面误差影响规律。

**关键词：**机床误差；圆弧齿线圆柱齿轮；齿面方程；齿面误差；影响规律

**中图分类号：**TH132

## Research on the Effect Law of Machine Tool Errors on Tooth Surface Errors of Curvilinear Gear

WU Yang<sup>1</sup> HOU Li<sup>1</sup> LUO Lan<sup>1</sup> MA Dengqiu<sup>2</sup> WEI Yongqiao<sup>3</sup> YI Zongli<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065;

2. College of Engineering and Technology, Zunyi Normal College, Zunyi 563006;

3. School of Mechatronics Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050)

**Abstract:** The machine tool errors are the main causes of tooth surface errors of curvilinear gear. The research on the relationship between machine tool errors and tooth surface errors will provide theoretical basis for the reverse calculation of machining parameters and the error correction of tooth surface. Based on the forming principle of curvilinear gear, the structure model and the coordinate system of curvilinear gear machine tool are established. The overall errors of curvilinear gear machine tool are described by the position errors between gear blank and cutter head, and the shape errors of cutter. Based on the meshing principle, the tooth surface equation is derived when machine tool is with or without errors. The calculation method of error surface for curvilinear gear is studied. The error surfaces under different machine errors are analyzed by using the second-order approximate surface and the average error influence coefficient of tooth surface. And the influence law of machine tool errors on tooth surface errors is studied. The influences of machine tool errors on errors of gear concave tooth surface are analyzed by examples when the geometric parameters of the gear are constant and changing.

**Key words:** machine tool error; curvilinear gear; tooth surface equation; tooth surface errors; influence law

## 0 前言

变双曲圆弧齿线圆柱齿轮是一种新型平行轴齿

轮传动，由于其齿线为圆弧形且为凹凸齿面相互啮合，相比于传统直齿圆柱齿轮和斜齿圆柱齿轮，具有更优良的接触特性、润滑特性和弯曲强度，并且对安装误差敏感度低，无轴向力<sup>[1]</sup>。因此从 19 世纪

\* 国家自然科学基金资助项目(51375320, 5187052280)。20191230 收到初稿，20200405 收到修改稿

40 年代长谷川吉三郎首次提出将圆弧齿线应用到圆柱齿轮上以来,国内外众多学者围绕圆弧齿线圆柱齿轮的加工方法、数学模型、啮合特性和强度等进行了大量研究。TSENG 等<sup>[2]</sup>提出用双面刀盘加工圆弧齿线圆柱齿轮,推导了该齿轮的数学模型,讨论了该齿轮的根切条件,并在此基础上分析了该齿轮副的接触特性。ANDREI 等<sup>[3]</sup>依据含刀倾角的单刃刀盘铣削圆弧齿线圆柱齿轮的加工原理,得到了齿轮齿面的数学模型。TSENG<sup>[4]</sup>、戴玉堂<sup>[5]</sup>等先后提出了用齿轮滚刀滚切圆弧齿线圆柱齿轮的加工方法,研究了该齿轮的滚切机理,实现了连续切齿,推导了该齿轮的数学模型。WU 等<sup>[6]</sup>提出了采用两互补齿形刀具加工出了圆弧齿线圆柱齿轮,获得了轮齿齿面数学模型并分析了其接触特性。马振群等<sup>[7-8]</sup>提出了含刀倾角的双面刀盘展成法加工圆弧齿线圆柱齿轮,并实现了该齿轮全修形齿面的 CNC 修形加工。赵斐等<sup>[9]</sup>以旋转刀盘法双刃铣削圆弧齿线圆柱齿轮为研究对象,推导了含过渡齿面的圆弧齿线圆柱齿轮全齿面方程,提出一种全齿面参数范围的计算方法。ANDREI 等<sup>[10]</sup>通过有限元法分析了含倾角的单刃刀盘加工的圆弧齿线圆柱齿轮的应力分布情况,通过与同参数的人字齿对比发现该齿轮副具有更好的抗弯强度。FUENTES 等<sup>[11]</sup>建立了单、双刃刀盘加工的圆弧齿线圆柱齿轮模型,结合有限元分析了刀盘匹配关系对其接触特性的影响。CHEN 等<sup>[12]</sup>对圆弧齿线圆柱齿轮进行了修形,并通过有限元法分析了其接触应力和传动误差。孙志军等<sup>[13]</sup>基于赫兹接触理论针对线接触圆弧齿线圆柱齿轮副,引入了接触线长度系数,建立了该齿轮的接触应力计算模型,为圆弧齿线圆柱齿轮接触应力的计算提供了参考。

但目前并未见研究变双曲圆弧齿线圆柱齿轮加工误差相关文献,而齿轮加工误差将导致齿面误差,进而影响齿轮接触质量,进而影响齿轮的接触强度、弯曲强度和疲劳寿命。LITIVN 等<sup>[14-15]</sup>分析了机床调整参数误差对齿面接触区位置、齿轮传动性能的影响。GOSSELIN<sup>[16]</sup>研究了机床调整参数变化引起的螺旋锥齿轮接触点应力和传递误差变化。QIN 等<sup>[17]</sup>研究了机床加工误差和安装误差对蜗杆传动接触特性的影响,表面机床误差和安装误差将引起蜗轮传动副传动误差突变和边缘接触。唐进元等<sup>[18]</sup>研究了有误差的螺旋锥齿轮传动接触分析,表明机床运动误差和安装误差对螺旋锥齿轮的齿面接触质量有较大影响。因此研究机床误差对圆弧齿线圆柱齿面误差的影响是十分必要的,齿面误差随机床误差的变化规律将为圆弧齿线圆柱齿轮齿面设计、齿轮机床

精度设计、齿面误差分析与补偿等提供理论依据。

本文通过圆弧齿线圆柱齿轮的成形原理建立了齿轮机床结构模型和坐标系体系,分析了机床误差,通过刀盘位置误差、齿坯位置误差和刀具形状误差等 8 个误差分量描述机床整体误差。推导了理想情况下圆弧齿线圆柱齿轮齿面方程和有机床误差的齿面方程,研究了齿面法向误差和齿轮误差曲面计算方法,通过二阶近似曲面和齿面平均误差影响系数对误差曲面进行定性和定量的分析,研究了机床误差对齿面误差影响规律。最后通过实例分析了机床误差对齿轮凹齿面齿面误差的影响规律。

## 1 圆弧齿线圆柱齿轮机床结构模型

### 1.1 圆弧齿线圆柱齿轮成形原理

圆弧齿线圆柱齿轮采用旋转刀盘双刃铣削加工而成,其成形原理如图 1 所示,图中  $R_G$  为齿坯半径,  $w_T$  为刀盘转速,  $w_G$  为齿坯转速,  $o_T x_T y_T z_T$  为刀盘定坐标系,  $o_W x_W y_W z_W$  为齿坯定坐标系,  $o_G x_G y_G z_G$  为与齿坯固联动坐标系,  $o_T$  位于刀盘几何中心,  $z_T$  轴垂直于刀盘底面,  $o_G$  位于齿坯几何中心,  $o_W$  位于平面内  $o_T x_T y_T$ ,  $z_W$  轴与平行于  $y_T$ ,  $x_W$  轴平行于  $x_T$  轴,齿坯位于初始加工位置时  $o_G x_G y_G z_G$  和重合  $o_W x_W y_W z_W$ 。加工圆弧齿线圆柱齿轮的旋转刀盘安装在机床主轴上并绕自身轴线  $o_T z_T$  转动,铣刀固定在刀盘上并随刀盘一起转动。切削加工时工件一方面绕自身轴线  $o_G z_G$  转动,一方面沿  $x_W$  轴往复移动,与刀具间形成紧密的展成运动,加工过程中刀具同时切出轮齿的凹凸齿面,加工完一对齿面需进行分度再加工下一对齿面,直至完成整个齿轮的加工<sup>[1]</sup>。通常采用双直刃刀具加工,刀具参数和直齿条刀具相同,刀具截面如图 2 所示,图中  $R_T$  为名义刀盘半径,  $\alpha$  为刀具展角,  $m$  为待加工齿轮模数,  $u$  为刀具沿母线方向到节点的距离。

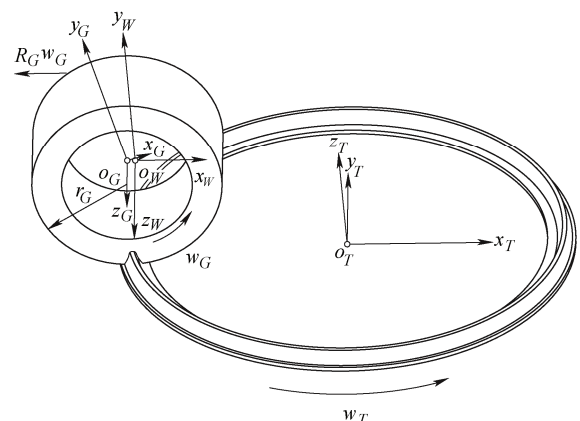


图 1 圆弧齿线圆柱齿轮成形原理

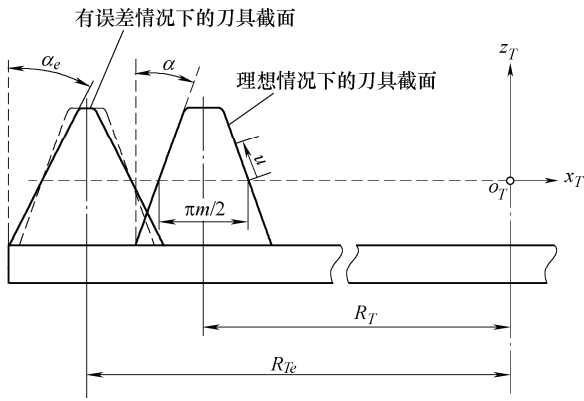


图2 刀具结构示意图

### 1.2 圆弧齿线圆柱齿轮机床结构模型

根据圆弧齿线圆柱齿轮成形原理进行齿轮机床结构设计, 其结构模型如图3所示。

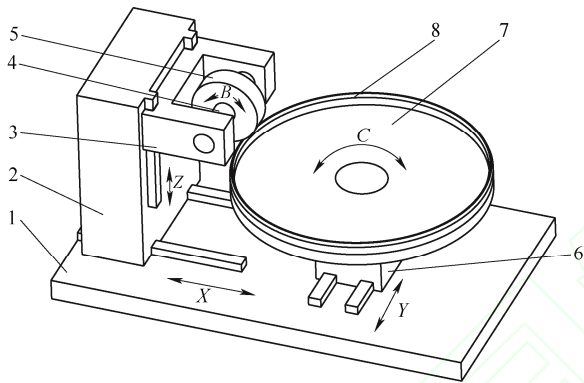


图3 圆弧齿线圆柱齿轮机床结构模型

- 1. 床身 2. X轴部件 3. Z轴部件 4. B轴部件 5. 齿坯
- 6. 刀盘底座 7. 刀盘 8. 刀具

根据图3中机床结构模型建立机床系统坐标系, 如图4所示。图中 $o_1x_1y_1z_1$ 为床身坐标系,  $o_2x_2y_2z_2$ 为x轴部件坐标系,  $o_3x_3y_3z_3$ 为z轴部件坐标系,  $o_{4m}x_{4m}y_{4m}z_{4m}$ 为B轴部件参考坐标系,  $o_4x_4y_4z_4$ 为B轴部件坐标系(即 $o_Gx_Gy_Gz_G$ ),  $o_6x_6y_6z_6$ 为刀座坐标系,  $o_7x_7y_7z_7$ 为刀盘坐标系(即 $o_Tx_Ty_Tz_T$ ),  $o_8x_8y_8z_8$ 为刀具坐标系,  $x$ 为加工齿轮时沿 $x_1$ 位移量,  $\varphi$ 为齿坯转角,  $\theta$ 为刀具转角。

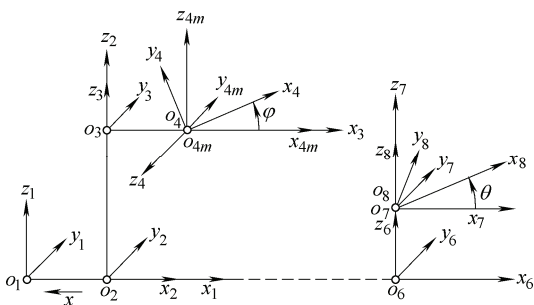


图4 圆弧齿线圆柱齿轮机床坐标系

## 2 圆弧齿线圆柱齿线机床误差分析

由于机床各部件制造误差和安装误差, 以及机床在实际运行中各部件受力变形、受热变形等因素, 刀具、齿坯的位置将偏离理想位置, 造成机床误差。在加工过程中机床任何部件偏离理论位置都可能引起机床误差, 因此建立包含各部件误差的机床误差模型与齿面误差关系是相当复杂的, 也并不适用于在实践中指导齿轮加工。而任何机床误差最终都是通过刀具作用于齿坯之上, 因此可以通过研究刀盘和齿坯位置误差和刀具形状误差对齿面加工误差的影响规律来探讨圆弧齿线圆柱齿轮机床整体加工误差。

理论上, 以坐标系 $o_1x_1y_1z_1$ 为基准, 刀盘和齿坯均有6个位置误差分量(3个平移误差分量和3个角度误差分量), 但刀盘的3个平移误差分量和绕 $x_1$ 轴的角度误差分量对齿面的影响与齿坯的3个平移误差分量和绕 $x_1$ 轴的角度误差分量对齿面的影响相同, 本文不探讨机床运动误差对齿面的影响, 故忽略齿坯转动误差和主轴转动误差。因此, 刀盘和齿坯的12个位置误差分量中只有6个是相互独立的, 分别为刀盘或齿坯的3个位移误差分量和绕 $x_1$ 轴的角度误差分量、刀盘绕 $y_1$ 轴的角度误差分量和齿坯绕 $z_1$ 轴的角度误差分量。为简化计算, 将3个位移误差分量均分配给刀盘, 最终的位置误差分量为: 刀盘绕 $x_1$ 轴的角度误差分量A, 刀盘绕 $y_1$ 轴的角度误差分量B, 刀盘3个位移误差分量 $\Delta X$ 、 $\Delta Y$ 、 $\Delta Z$ , 齿坯绕 $z_1$ 轴的角度误差分量C, 如图5所示, 图中 $o_{4e}x_{4e}y_{4e}z_{4e}$ 为存在误差时B轴参考坐标系,  $o_{7e}x_{7e}y_{7e}z_{7e}$ 为存在误差时刀盘坐标系。

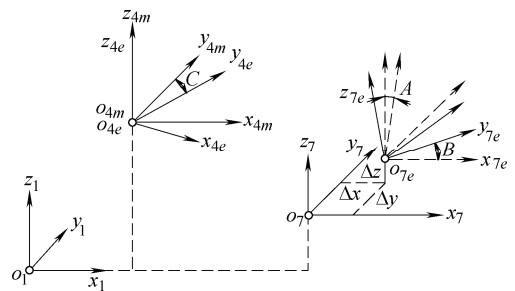


图5 刀盘和齿坯位置误差示意图

刀具的形状误差主要包括刀具展角误差 $\Delta\alpha$ 和刀盘名义半径误差 $\Delta R_T$ , 如图2所示, 图中 $\alpha_e$ 为包含误差刀具展角,  $R_{Te}$ 为包含误差刀具名义半径

$$\alpha_e = \alpha + \Delta\alpha \tag{1}$$

$$R_{Te} = R_T + \Delta R_T \tag{2}$$

### 3 圆弧齿线圆柱齿轮齿面方程推导

#### 3.1 理想情况下的齿面方程

由图 2 可知刀具截面表达式为

$$\mathbf{r}_{ts} = \begin{bmatrix} -(R_T \mp \frac{\pi}{4} m \pm u \sin \alpha) \\ 0 \\ u \cos \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中,“±”分别表示刀具内外刃,内刃统一取上部分符号,外刃统一取下部分符号。

刀具截面绕  $z_7$  轴回转形成刀具回转面,回转面在刀盘坐标系  $o_7x_7y_7z_7$  表达式为

$$\mathbf{r}_t^{(7)} = \begin{bmatrix} -(R_T \mp \frac{\pi}{4} m \pm u \sin \alpha) \cos \theta \\ -(R_T \mp \frac{\pi}{4} m \pm u \sin \alpha) \sin \theta \\ u \cos \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

刀具回转面单位法矢量在  $o_7x_7y_7z_7$  中表示式为

$$\mathbf{n}_t^{(7)} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \alpha \\ \sin \theta \cos \alpha \\ \pm \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

根据齿轮啮合原理,齿面上与刀具回转面上相切触的点在固定坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  下具有相同的位置矢量,同时齿面和刀具回转面在切触点处的相对速度和刀具回转面切削点法线相互垂直<sup>[19]</sup>。

将刀具回转面表示在坐标系  $o_4x_4y_4z_4$  中

$$\mathbf{r}_t^{(4)}(\varphi, \theta) = \mathbf{M}_{14}^{-1} \mathbf{M}_{17} \mathbf{r}_t^{(7)} \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{M}_{14}$  为坐标系  $o_4x_4y_4z_4$  向坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  的变换矩阵;  $\mathbf{M}_{17}$  为坐标系  $o_7x_7y_7z_7$  向坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  的变换矩阵

$$\mathbf{M}_{14} = \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{23} \mathbf{M}_{34m} \mathbf{M}_{4m4} \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{M}_{12}$  为坐标系  $o_2x_2y_2z_2$  向坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  的变换矩阵;  $\mathbf{M}_{23}$  为坐标系  $o_3x_3y_3z_3$  向坐标系  $o_2x_2y_2z_2$  的变换矩阵;  $\mathbf{M}_{34m}$  为坐标系  $o_{4m}x_{4m}y_{4m}z_{4m}$  向坐标系  $o_3x_3y_3z_3$  的变换矩阵;  $\mathbf{M}_{4m4}$  为坐标系  $o_4x_4y_4z_4$  向坐标系  $o_{4m}x_{4m}y_{4m}z_{4m}$  的变换矩阵

$$\mathbf{M}_{17} = \mathbf{M}_{16} \mathbf{M}_{67} \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{M}_{16}$  为坐标系  $o_6x_6y_6z_6$  向坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  的变换矩阵;  $\mathbf{M}_{67}$  为坐标系  $o_7x_7y_7z_7$  向坐标系  $o_6x_6y_6z_6$  的变换矩阵。

刀具回转面上切削点在固定坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  中速度为

$$\mathbf{v}_t^{(1)} = \dot{\mathbf{M}}_{17} \mathbf{r}_t^{(7)} \quad (9)$$

齿坯上被切削点在固定坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  中速度为

$$\mathbf{v}_g^{(1)} = \dot{\mathbf{M}}_{14} \mathbf{r}_t^{(4)} \quad (10)$$

刀具回转面上切削点法矢量表示在固定坐标系  $o_1x_1y_1z_1$

$$\mathbf{n}_t^{(1)} = \mathbf{M}_{17} \mathbf{n}_t^{(7)} \quad (11)$$

理想情况下,齿面切削啮合方程为

$$f(\varphi, \theta) = \mathbf{n}_t^{(1)} (\mathbf{v}_g^{(1)} - \mathbf{v}_t^{(1)}) = 0 \quad (12)$$

由于  $\dot{\mathbf{M}}_{17} = 0$ , 啮合方程简化为

$$f(\varphi, \theta) = \mathbf{n}_t^{(1)} \mathbf{v}_g^{(1)} = 0 \quad (13)$$

结合式(6)、(13)可得理想情况下的圆弧齿线圆柱齿线齿面方程。

#### 3.2 有误差情况下的齿面方程

由图 2 可知有误差情况下刀具截面表达式为

$${}^{(e)}\mathbf{r}_{ts} = \begin{bmatrix} -(R_{Te} \mp \frac{\pi}{4} m \pm u \sin \alpha_e) \\ 0 \\ u \cos \alpha_e \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

有误差情况下,刀具截面绕  $z_{7e}$  轴回转,刀具回转面在  $o_{7e}x_{7e}y_{7e}z_{7e}$  表达式为

$${}^{(e)}\mathbf{r}_t^{(7e)} = \begin{bmatrix} -(R_{Te} \mp \frac{\pi}{4} m \pm u \sin \alpha_e) \cos \theta \\ -(R_{Te} \mp \frac{\pi}{4} m \pm u \sin \alpha_e) \sin \theta \\ u \cos \alpha_e \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

刀具回转面在  $o_{7e}x_{7e}y_{7e}z_{7e}$  中单位法矢量为

$${}^{(e)}\mathbf{n}_t^{(7e)} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \alpha_e \\ \sin \theta \cos \alpha_e \\ \pm \sin \alpha_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

将刀具回转面表示在坐标系  $o_4x_4y_4z_4$  中

$${}^{(e)}\mathbf{r}_t^{(4)}(\varphi, \theta, \mathbf{A}) = ({}^{(e)}\mathbf{M}_{14})^{-1} ({}^{(e)}\mathbf{M}_{17e}) ({}^{(e)}\mathbf{r}_t^{(7e)}) \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{A} = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, A, B, C, \Delta \alpha, \Delta R_T)$ ,  ${}^{(e)}\mathbf{M}_{14}$  为存在齿坯位置误差时,坐标系  $o_4x_4y_4z_4$  向坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  的变换矩阵;  ${}^{(e)}\mathbf{M}_{17e}$  为坐标系  $o_{7e}x_{7e}y_{7e}z_{7e}$  向坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  的变换矩阵。

$${}^{(e)}\mathbf{M}_{14} = \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{23} \mathbf{M}_{34m} \mathbf{M}_{4m4e} \mathbf{M}_{4e4} \quad (18)$$



式中， $M_{4m4e}$  为坐标系  $o_{4e}x_{4e}y_{4e}z_{4e}$  向坐标系  $o_{4m}x_{4m}y_{4m}z_{4m}$  的变换矩阵， $M_{4e4}$  为坐标系  $o_4x_4y_4z_4$  向坐标系  $o_{4e}x_{4e}y_{4e}z_{4e}$  的变换矩阵。

$${}^{(e)}M_{17e} = M_{16}M_{67}M_{77e} \quad (19)$$

式中， $M_{77e}$  为坐标系  $o_{7e}x_{7e}y_{7e}z_{7e}$  向坐标系  $o_7x_7y_7z_7$  的变换矩阵。

齿坯上被切削点在固定坐标系  $o_1x_1y_1z_1$  中的速度为

$${}^{(e)}\mathbf{v}_g^{(1)} = \left( {}^{(e)}M_{14} \right) \left( {}^{(e)}\mathbf{r}_t^{(4)} \right) \quad (20)$$

刀具回转面上切削点法矢量表示在固定坐标系  $o_1x_1y_1z_1$

$${}^{(e)}\mathbf{n}_t^{(1)} = \left( {}^{(e)}M_{17e} \right) \left( {}^{(e)}\mathbf{n}_t^{(7e)} \right) \quad (21)$$

存在机床误差时，啮合方程为

$$f(\varphi, \theta, \Delta) = \left( {}^{(e)}\mathbf{n}_t^{(1)} \right) \left( {}^{(e)}\mathbf{v}_g^{(1)} \right) = 0 \quad (22)$$

结合式(17)、(22)可得存在机床误差时的圆弧齿线圆柱齿面方程。

### 4 圆弧齿线圆柱齿轮误差曲面分析

将误差齿面减去理论齿面并向理论齿面法矢量投影可以得到表示齿面法向误差的误差曲面，法向误差计算采用式(23)，通过研究误差曲面可以得到各机床误差对齿面误差的影响规律

$$F(\varphi, \theta, \Delta) = \left( {}^{(e)}\mathbf{r}_g - \mathbf{r}_g \right) \mathbf{n}_g \quad (23)$$

式中， $\mathbf{r}_g$  为理想齿面， ${}^{(e)}\mathbf{r}_g$  为有加工误差齿面， $\mathbf{n}_g$  为理想齿面单位法矢量。

#### 4.1 圆弧齿线圆柱齿轮误差曲面建立

齿轮误差曲面较为复杂，很难直接对其进行研究，因此本文将通过对离散化误差曲面研究探讨机床误差对齿面误差的影响。参考 GLEASON 的方法<sup>[20]</sup>进行误差齿面离散，即按照齿宽和齿高方向取  $9 \times 5$  有序点的原则，在齿轮齿面旋转投影面上取 45 点。考虑到齿轮在齿顶和端面倒角以及根切等，离散化的误差曲面范围小于实际齿面，具体如图 6 所示。

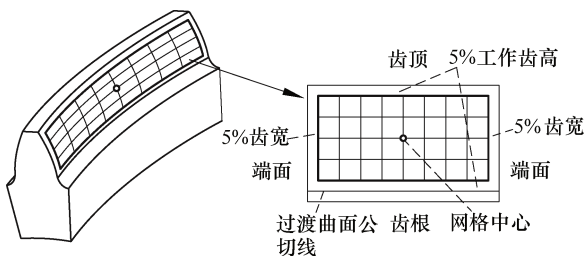


图 6 误差曲面网格规划

误差曲面的在齿面旋转投影面  $ozr$  上网格划分如图 7 所示，图中  $r_1 = \frac{m(z_g - 2)}{2} + 0.1m$ ，

$r_2 = \frac{m(z_g + 2.5)}{2} - 0.1m$ ，其中  $z_g$  为齿数。

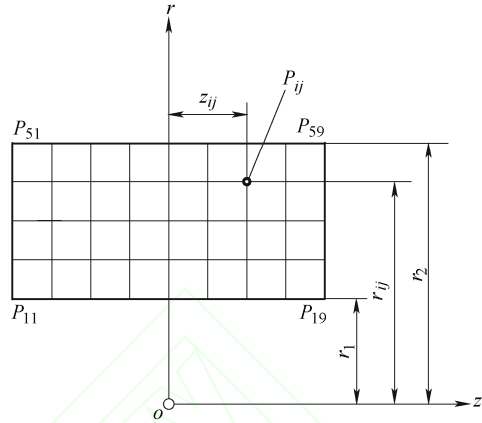


图 7 误差曲面网格划分

由图 7 可得，在  $ozr$  平面内网格节点上任一点  $P_{ij}$  坐标

$$\begin{cases} r_{ij} = r_1 + (i-1) \frac{(r_2 - r_1)}{4} \\ z_{ij} = -0.4b + \frac{(j-1)b}{10} \\ i = 1, 2, \dots, 5 \quad j = 1, 2, \dots, 9 \end{cases} \quad (24)$$

式中， $b$  为齿宽。

理论齿面上任意一点坐标  $(x_g, y_g, z_g)$  应满足

$$\begin{cases} \sqrt{x_g^2 + y_g^2} = r \\ z_g = z \end{cases} \quad (25)$$

式(25)是包含两个未知量  $\varphi, \theta$  的非线性方程组，方程数量等于未知数数量，可以通过数值方法迭代求解。结合式(24)、(25)，可以求解得到各网格节点对应的齿面参数  $(\varphi_{ij}, \theta_{ij})$ 。将  $(\varphi_{ij}, \theta_{ij})$  和机床误差代入式(23)即可得到离散化的齿轮误差曲面。

#### 4.2 圆弧齿线圆柱齿轮误差曲面分析

通过离散化齿面误差绝对值的均值和机床误差的比值来评估机床误差对齿面误差的整体影响程度，定义该比值为齿面平均误差影响系数

$$W_k = \frac{\sum |{}^{(A)}F_{ij}| / 45}{\Delta_k} \quad (26)$$

式中， $\Delta_k$  为第  $k$  项机床误差， ${}^{(A)}F_{ij}$  为由  $\Delta_k$  引起的  $P_{ij}$  处齿面法向误差。

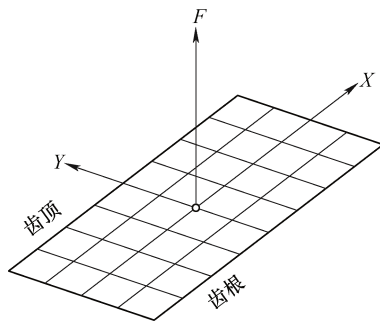


图 8 误差曲面二次近似曲面坐标系

采用二阶曲面对误差曲面进行近似表达,借助于二次曲面系数分析机床误差对齿面误差的影响趋势和影响程度,二次曲面坐标系如图 8 所示,坐标原点位于  $P_{35}$ ,二次曲面表达式见式(27)<sup>[20]</sup>

$$F = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3X^2 + a_4Y^2 + a_5XY \quad (27)$$

式中,  $a_0$  为 0 阶系数,会引起齿面偏离误差;  $a_1$  为齿线方向一阶系数,会引起螺旋角误差;  $a_2$  为齿高方向一阶系数,会引起压力角误差;  $a_3$  为齿长方向二阶系数,会引起齿线鼓形误差;  $a_4$  为齿高方向二阶系数,会引起齿廓鼓形误差;  $a_5$  为齿长和齿高方向综合一阶系数,会引起齿面的对角误差。

## 5 实例分析

由于圆弧齿线圆柱齿轮的凹齿面和凸齿面是同时被加工的,因此机床误差对凹凸齿面误差的影响是近似,因此本文仅分析机床误差对于凹齿面误差影响规律。参考文献[21],本文在研究过程中采用人为设定机床误差值的方法进行分析研究,设其中位移误差均为+0.01 mm,角度误差均为+0.1°。

算例 1,齿轮加工参数不变时,机床误差对齿面误差的影响。

表 1 圆弧齿线圆柱齿轮加工参数

参数	数值
模数 $m/\text{mm}$	3
齿数 $z_g$	23
齿宽 $b/\text{mm}$	30
压力角 $\alpha(^{\circ})$	20
名义刀盘半径 $R_f/\text{mm}$	30

齿轮的加工参数如表 1 所示,将齿轮加工参数代入式(24)、(25)可以解得无加工误差时的凹齿面网格节点齿面参数,将齿面参数和各项机床误差代入式(23)可以解得各网格节点法向齿面误差,进而得到各机床误差对应的离散化误差曲面,如图 9~16 所示。基于离散化的误差曲面和式(26)、(27)可以得到各机床误差对应的齿面平均误差影响系数和二次

曲面各阶系数,如表 2 和表 3 所示。

分析图 9~16,表 2、3,可得以下结果。

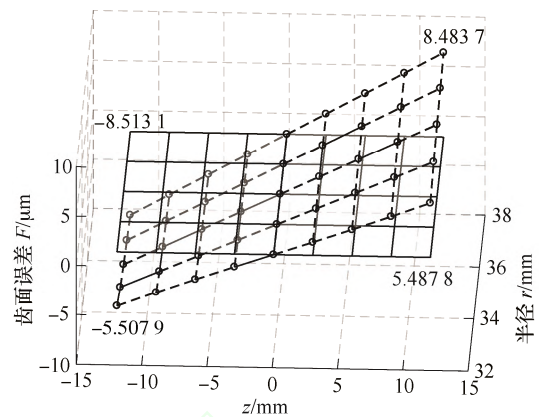


图 9 A 对齿面误差的影响

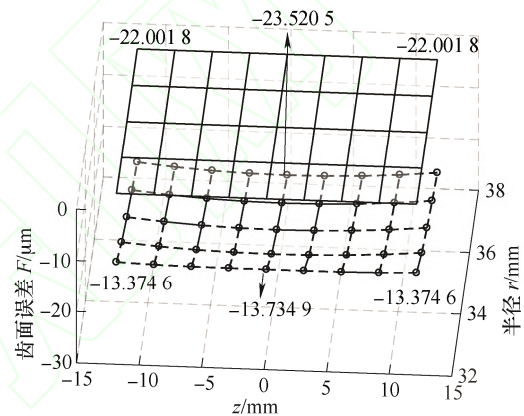


图 10 B 对齿面误差的影响

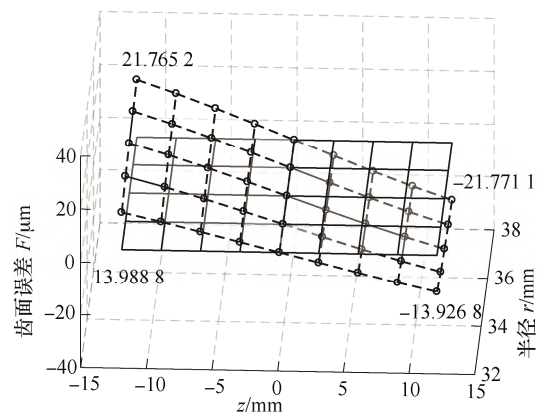


图 11 C 对齿面误差的影响

(1) 造成齿面偏离误差的机床误差项包括:刀盘的角度误差分量  $A$  和  $B$ ,刀盘位移误差分量  $\Delta X$  和  $\Delta Z$ ,齿坯角度误差  $C$ ,刀盘半径误差  $\Delta R_f$  和刀具展角误差  $\Delta \alpha$ ;按照影响程度排序为  $B \rightarrow \Delta X \rightarrow \Delta R_f \rightarrow \Delta Z \rightarrow \Delta \alpha \rightarrow C \rightarrow A$ ,其中  $A$  和  $C$  的影响较小,可以忽略。造成螺旋角误差的机床误差项有:刀盘角度误差分量  $A$  和位移误差分量  $\Delta Y$ 、

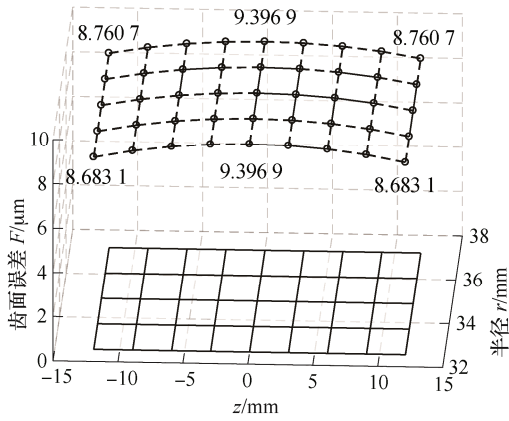


图 12  $\Delta X$  对齿面误差的影响

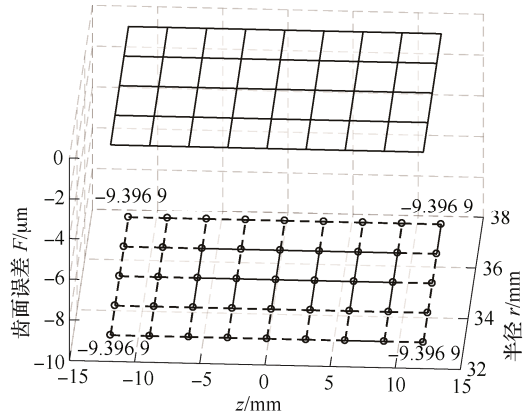


图 16  $\Delta R_T$  对齿面误差的影响

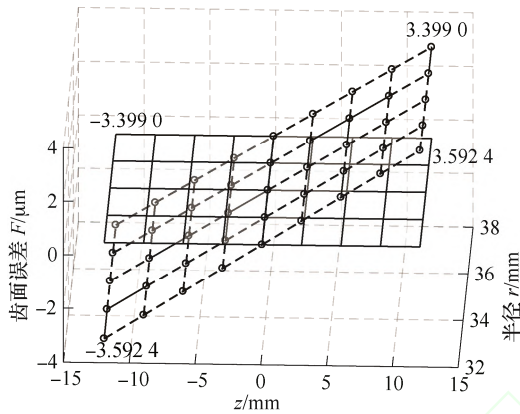


图 13  $\Delta Y$  对齿面误差的影响

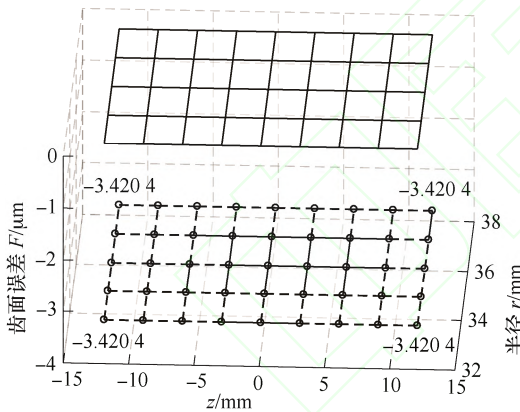


图 14  $\Delta Z$  对齿面误差的影响

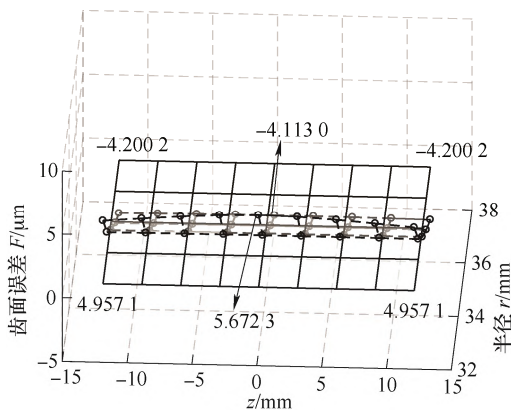


图 15  $\Delta\alpha$  对齿面误差的影响

齿坯角度误差分量  $C$ ；影响程度由大到小排序为  $C \rightarrow A \rightarrow \Delta Y$ 。造成压力角误差的机床误差项有：刀盘的角度误差分量  $A$  和  $B$ ，齿坯角度误差  $C$ ，刀盘位移误差分量  $\Delta X$ ，刀具展角误差  $\Delta\alpha$ ；影响程度由大到小排序为  $\Delta\alpha \rightarrow B \rightarrow \Delta X \rightarrow C \rightarrow A$ ，而  $\Delta X$ 、 $C$  和  $A$  的影响均较小，可以忽略。造成齿线鼓形误差的机床误差项有：刀盘的角度误差分量  $B$ ，刀盘位移误差分量  $\Delta X$ ，刀具展角误差  $\Delta\alpha$ ；影响程度由大到小排序为  $B \rightarrow \Delta X \rightarrow \Delta\alpha$ 。造成齿廓鼓形误差的机床误差项有：刀盘的角度误差分量  $B$ ，齿坯角度误差  $C$ ，刀盘位移误差分量  $\Delta X$ ，刀具展角误差  $\Delta\alpha$ ，影响程度由大到小排序为： $\Delta\alpha \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \Delta X$ ，其中  $C$  和  $\Delta X$  的影响较小，可以忽略。造成齿面对角误差的机床误差项有：刀盘角度误差分量  $A$  和位移误差分量  $\Delta Y$ ，齿坯角度误差  $C$ ；影响程度由大到小排序为  $C \rightarrow A \rightarrow \Delta Y$ ，其中  $\Delta Y$  影响较小，可以忽略。总的来说，机床各误差项主要造成齿面的偏移误差、螺旋角误差、压力角误差和齿面对角误差，而引起的齿面齿线鼓形误差和齿廓鼓形误差较小。

表 2 齿面平均误差影响系数

误差项	齿面平均误差影响系数
$A$	3.988 7
$B$	18.912 8
$C$	10.477 6
$\Delta X$	9.120 5
$\Delta Y$	1.935 6
$\Delta Z$	3.420 2
$\Delta\alpha$	2.862 3
$\Delta R_T$	9.396 9

(2) 刀盘的角度误差分量  $B$  对齿面整体误差影响最大，齿面平均误差系数为 18.912 8  $\mu\text{m}$ ；齿坯角度误差  $C$ 、刀盘半径误差  $\Delta R_T$  和刀盘位移误

差分量  $\Delta X$  对齿面整体误差影响较大, 齿面平均误差系数分别为  $10.477\ 6\ \mu\text{m}$ 、 $9.396\ 9\ \mu\text{m}$  和  $9.120\ 5\ \mu\text{m}$ ; 刀盘的角度误差分量  $A$ 、刀盘位移误差分量  $\Delta Z$ 、刀具展角误差  $\Delta\alpha$  和刀盘位移误差分

量  $\Delta Y$  对齿面整体误差影响较小, 齿面平均误差系数分别为  $3.988\ 7\ \mu\text{m}$ 、 $3.420\ 2\ \mu\text{m}$ 、 $2.862\ 3\ \mu\text{m}$  和  $1.935\ 6\ \mu\text{m}$ 。

表 3 二次曲面各阶系数

误差项	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$A$	-0.000 1	0.598 8	-0.000 4	0	0	0.0533 5
$B$	-20.070 0	0	-1.945 0	0.008 5	0.239 3	0
$C$	-0.002 7	-1.560 0	-0.008 0	0	0.001 0	-0.14
$\Delta X$	9.402 0	0	0.006 7	-0.004 6	-0.000 9	0
$\Delta Y$	0	0.290 3	0	0	0	-0.003 4
$\Delta Z$	-3.420 2	0	0	0	0	0
$\Delta\alpha$	-0.671 2	0	-1.989	-0.001 2	0.244 5	0
$\Delta R_T$	-9.396 9	0	0	0	0	0

(3)  $A$  主要造成齿面螺旋角误差和对角误差: 齿面误差在中截面处为 0, 当  $r$  固定时, 齿面误差随着  $z$  的增大由负值逐渐变为正值, 当  $z$  固定时, 齿面误差随着  $r$  的增大而增大; 齿面误差在左端面齿顶附近取得负向最大值为  $-8.513\ 1\ \mu\text{m}$ , 在右端面齿顶附近取得正向最大值为  $8.483\ 7\ \mu\text{m}$ 。 $B$  主要造成齿面偏离误差、压力角误差和轻微的齿廓、齿线鼓形误差: 齿面误差关于中截面对称, 在中截面齿根附近和齿顶附近分别取得正向最大值  $-13.734\ 9\ \mu\text{m}$  和负向最大值  $-23.520\ 5\ \mu\text{m}$ ; 当  $z$  固定, 齿面误差随着  $r$  的增大逐渐增大。 $C$  主要造成齿面螺旋线误差、对角误差和轻微的齿线鼓形误差: 齿面误差在中截面处为 0, 当  $r$  固定时, 齿面误差随着  $z$  的增大由正值逐渐变为负值, 当  $z$  固定时, 齿面误差随着  $r$  的增大而增大; 齿面误差在右端面齿顶附近取得负向最大值  $-21.771\ 1\ \mu\text{m}$ , 在右端面齿顶附近取得正向最大值为  $21.765\ 2\ \mu\text{m}$ 。 $\Delta X$  主要造成齿面偏离误差和齿线鼓形误差: 误差曲面是关于中截面对称的二次曲面, 在中截面齿根附近和齿顶附近取得最大值  $9.396\ 9\ \mu\text{m}$ , 在左右端面根附近取得最小值为  $8.683\ 1\ \mu\text{m}$ 。 $\Delta Y$  主要造成齿面螺旋线误差和轻微的对角误差: 齿面误差在中截面处为 0, 齿面误差正向最大值出现在右端面齿根附近为  $3.592\ 4\ \mu\text{m}$ , 齿面误差负向最大值在左端面齿根附近为  $-3.592\ 4\ \mu\text{m}$ 。 $\Delta Z$  和  $\Delta R_T$  均只造成齿面偏离误差, 偏离量分别为  $-3.420\ 2\ \mu\text{m}$  和  $-9.396\ 9\ \mu\text{m}$ 。 $\Delta\alpha$  主要造成齿面压力角误差、齿廓鼓形误差、轻微齿面偏离误差和轻微的齿线鼓形误差: 齿面误差关于中截面对称; 当  $z$  固定时, 齿面误差随着  $r$  的增大由负值逐渐变化为正值, 齿线鼓形误差从齿根到齿顶逐渐减小; 齿面误差在中截面齿根附近取得正向最大值  $5.672\ 3\ \mu\text{m}$ , 在中截面齿顶附近取得负向最大值  $-4.113\ 0\ \mu\text{m}$ 。

算例 2, 齿轮加工参数变化时, 机床误差对齿面误差的影响。

齿轮其他加工参数与表 1 相同,  $m$  分别取 3 mm、5 mm、8 mm、12 mm 和 16 mm 时, 计算得到齿面平均误差影响系数如图 17a 所示。齿轮其他加工参数与表 1 相同,  $z_g$  分别取 23、33、43、53、70 时, 计算得到齿面平均误差影响系数如图 17b 所示。齿轮其他加工参数与表 1 相同,  $\alpha$  分别取  $15^\circ$ 、 $17.5^\circ$ 、 $20^\circ$ 、 $22.5^\circ$  和  $25^\circ$  时, 计算得到齿面平均误差影响系数如图 17c 所示。齿轮其他加工参数与表 1 相同,  $R_T$  分别取 30 mm、50 mm、70 mm、90 mm 和 200 mm 时, 计算得到齿面平均误差影响系数如图 17d 所示。

由图 17a 可知,  $B$  和  $\Delta\alpha$  对应的齿面平均误差影响系数随着被加工齿轮模数增大呈线性比例增大, 主要原因是齿轮模数增大, 加工齿轮的刀具齿高也相应增大, 相同的  $B$  和  $\Delta\alpha$  将造成刀具齿廓在齿顶和齿根附近出现更大的偏离, 进而导致被加工齿轮的齿顶和齿根附近出现更大齿面误差, 而其他误差项对应的齿面平均误差影响系数几乎保持不变, 原因是被加工齿轮模数增大, 刀具和齿坯的相对位置误差并未改变。由图 17b 可知, 当被加工齿轮齿数增大时, 各机床误差对应的齿面平均误差影响系数并不会发生明显变化。由图 17c 可知, 随着被加工齿轮压力角增大,  $B$  对应的齿面平均误差影响系数具有较大的线性增长趋势, 原因是对于相同的  $B$  被加工齿轮压力角越大, 实际刀具轮廓相对于理论刀具轮廓的偏移量越大, 齿面整体误差也就越大;  $A$  和  $\Delta Z$  对应的齿面平均误差影响系数具有较小的线性增长趋势, 原因是相同  $A$  和  $\Delta Z$  下, 齿面误差在大压力角齿轮齿面法向量投影量更大, 其他参数对应的齿面平均误差影响系数几乎保持不变。由图 17d 可知, 随着刀盘半径增大,  $B$  对应的齿



面平均误差影响系数具有较大的线性增长趋势，原因是对应相同的  $B$ ，越大的刀盘半径将导致刀具齿廓出现更大的线性偏移，其他参数对应的齿面平均误差影响系数几乎保持不变。

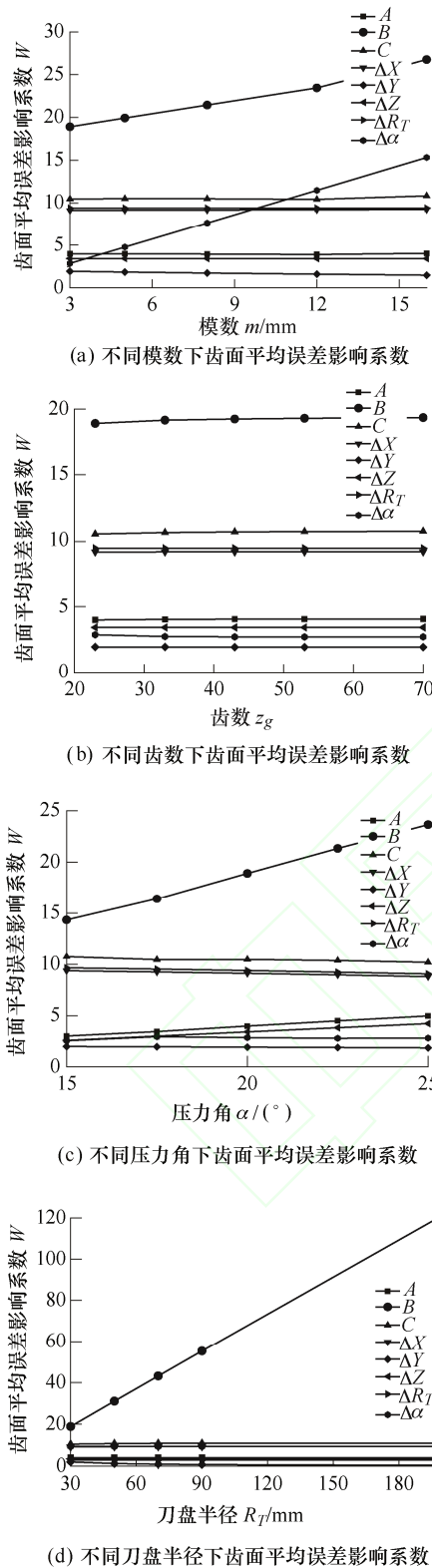


图 17 不同加工加工参数下齿面平均误差影响系数

根据图 17 可知， $B$  对应的齿面平均误差影响系数随模数、压力角和刀盘半径等三个被加工齿轮参

数的增大而成线性比例增大， $\Delta\alpha$  对应的齿面平均误差影响系数随被加工齿轮模数增大呈线性比例增大，而其他机床误差分量对应的齿面平均误差影响系数对被加工齿轮的参数变化并不敏感。

## 6 结论

(1) 基于齿轮成形原理建立了机床结构模型和坐标系体系，对机床误差进行了分析，提出通过刀盘位置误差、齿坯位置误差和刀具形状误差来描述机床整体误差。

(2) 基于圆弧齿线圆柱机床坐标系体系和齿轮啮合原理，推导了圆弧齿线圆柱齿轮理想齿面方程和包含机床误差的齿面方程。提出了圆弧齿线圆柱齿轮误差曲面计算方法。采用二阶近似曲面和齿面平均误差影响系数描述圆弧齿线圆柱齿轮误差曲面，研究机床误差对齿面误差的影响规律。

(3) 研究表明：机床各误差项主要造成齿面的偏移误差、螺旋角误差、压力角误差和齿面对角误差，而引起的齿面齿线鼓形误差和齿廓鼓形误差较小。刀盘的角度误差分量  $B$  对齿面整体误差影响最大，齿坯角度误差  $C$ 、刀盘半径误差  $\Delta R_f$  和刀盘位移误差分量  $\Delta X$  对齿面整体误差影响较大，刀盘的角度误差分量  $A$ 、刀盘位移误差分量  $\Delta Z$ 、刀具展角误差  $\Delta\alpha$  和刀盘位移误差分量  $\Delta Y$  对齿面整体误差影响较小。刀盘的角度误差分量  $B$  对应的齿面平均误差影响系数随被加工齿轮模数、压力角和刀盘半径的增大而呈线性比例增大， $\Delta\alpha$  对应的齿面平均误差影响系数随被加工齿轮模数增大呈线性比例增大，而其他机床误差分量对应的齿面平均误差影响系数对被加工齿轮的参数变化并不敏感。

## 参 考 文 献

- [1] 赵斐. 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮成形理论研究及啮合特性分析[D]. 成都：四川大学，2018.  
ZHAO Fei. Research on forming theory and meshing characteristics of variable-hyperbolic-circular-arc-tooth cylindrical gear[D]. Chengdu: Sichuan University, 2018.
- [2] TSENG R T, TSAY C B. Mathematical model and undercutting of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(11-12): 1189-1202.
- [3] ANDREI L, ANDREI G, EPUREANU A, et al. Numerical simulation and generation of curved face width gears[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2002, 42(1): 1-6.

- [4] TSENG J T, TSAY C B. Mathematical model and surface deviation of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth cut by a hob cutter[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 127(5): 271-277.
- [5] 戴玉堂, 有贺幸则, 姜德生. 圆弧齿线圆柱齿轮的数控滚切机理与试验研究[J]. *中国机械工程*, 2006, 17(7): 706-709.  
DAI Yutang, ARIGA Y, JIANG Desheng. Hobbing mechanism of cylindrical gear with arcuate tooth traces and experimental investigation[J]. *China Mechanical Engineering*, 2006, 17(7): 706-709.
- [6] WU Y C, CHEN K Y, TSAY C B, et al. Contact characteristics of circular-arc curvilinear tooth gear drives[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2009, 131(8): 81003-81010.
- [7] 马振群, 邓承毅. 弧齿线圆柱齿轮全修形齿面的 CNC 修形加工方法[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(5): 165-171.  
MA Zhenqun, DENG Chengyi. CNC machining method of whole modified surface of cylindrical gears with arcuate tooth trace[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(5): 165-171.
- [8] MA Zhengqun, GONG Yanjue, WANG Xiaochun. Symmetric arcuate tooth trace cylindrical gearing[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 19(Suppl.): 94-97.
- [9] 赵斐, 侯力, 段阳, 等. 旋转刀盘圆弧齿轮成形理论分析及数字化建模研究[J]. *四川大学学报*, 2016, 48(6): 119-125.  
ZHAO Fei, HOU Li, DUAN Yang, et al. Research on the forming theory analysis and digital model of circular arc gear shaped by rotary cutter[J]. *Journal of Sichuan University*, 2016, 48(6): 119-125.
- [10] ANDREI L, ANDREI G. Analysis of gear quality criteria and performance of curved face width spur gears[C]// *The Annals of University "DUNĂREA DE JOS" of Galati Fascicle VIII Tribology*. Galati: Arthra, 2008: 30-34.
- [11] FUENTES A, RUIZ-ORZAEZ R, GONZALEZ-PEREZ I. Computerized design, simulation of meshing, and finite element analysis of two types of geometry of curvilinear cylindrical gears[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, 272(2): 321-339.
- [12] CHEN Y C, LO C C. Contact stress and transmission errors under load of a modified curvilinear gear set based on finite element analysis[J]. *ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science 1989-1996 (vols 203-210)*, 2015, 229(2): 191-204.
- [13] SUN Z, HOU L, WANG J, et al. Contact strength analysis of circular-arc-tooth-trace cylindrical gear[J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences & Engineering*, 2016, 38(3): 999-1005.
- [14] LITVIN F L. Generated spiral bevel gears : Optimal machine-tool settings and tooth contact analysis[J]. *NASA Technical Memorandum*, 1985, 11(12): 1-24.
- [15] VILMOS S. Computer simulation of tooth contact analysis of mismatched spiral bevel gears[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, 42 (3): 365-381.
- [16] GOSSELIN C. Effects of the machine settings on the transmission error of spiral bevel gears cut by the gleason method[J]. *American Society of Mechanical Engineers*, 1989, 60(2): 705-712.
- [17] QIN Datong, ZHANG Guanghui. Study on tooth modification of hourglass worm gearing with developable tooth surface[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 1993, 7(2): 94-98.
- [18] 唐进元, 卢延峰, 周超. 有误差的螺旋锥齿轮传动接触分析[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(7): 16-23.  
TANG Jinyuan, LU Yanfeng, ZHOU Chao. Error tooth contact analysis of spiral bevel gears transmission[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(7): 16-23.
- [19] LITVIN F L. 齿轮几何学与应用理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2008.  
LITVIN F L. *Gear geometry and applied theory*[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 2008.
- [20] QI F, RONALD D F, JOHN W S. Higher-order tooth flank form error correction for face-milled spiral bevel and hypoid gears[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2008, 130(7): 1029-1033.
- [21] 唐进元, 曹康, 李国顺, 等. 机床调整参数误差对小轮齿面误差影响规律的理论研究[J]. *机械工程学报*, 2010, 46(17): 179-185.  
TANG Jinyuan, CAO Kang, LI Guoshun, et al. Research on the effect law between machine setting parameter errors and hypoid gears surface errors[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(17): 179-185.

作者简介: 吴阳, 男, 1989 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机构学及新型传动。

E-mail: walkerwuy@outlook.com

侯力(通信作者), 男, 1956 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械设计及理论。

E-mail: houlaoshishiyanshi@163.com