



北京航空航天大学学报  
*Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*  
ISSN 1001-5965, CN 11-2625/V

## 《北京航空航天大学学报》网络首发论文

题目: 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型  
作者: 赵远, 杨琳  
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2020.0536  
收稿日期: 2020-09-21  
网络首发日期: 2021-02-03  
引用格式: 赵远, 杨琳. 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型. 北京航空航天大学学报. <https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2020.0536>



**网络首发:** 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认:** 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

# 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型

赵远<sup>1</sup>✉, 杨琳<sup>2</sup>

(1. 西安导航技术研究所, 陕西 西安 710068;

2. 兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050)

\*通信作者 E-mail: bhxb@buaa.edu.cn

**摘要** 针对航天产品小子样、长寿命的特点, 提出了基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型。采用 B-样条函数构造 Bootstrap 样本经验分布函数, 进行放回抽样。在此基础上, 分别采用非参数 Bootstrap 方法和参数 Bootstrap 方法建立了寿命评估模型。采用本文建立的模型对空心阴极点火试验数据进行评估, 得到多个寿命特征结果, 与传统的参数极大似然估计方法的计算结果进行了对比分析, 其评估精度满足工程的应用需求, 验证了该模型的工程实用性和有效性。

**关键词** 小子样; 寿命评估; Bootstrap; B-样条函数

中图分类号 TB114.3

文献标识码: A

DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2020.0536

## Lifetime evaluation model of small sample based on Bootstrap theory

ZHAO Yuan<sup>1</sup>, YANG Lin<sup>2</sup>

(1. Xi'an Research Institute of Navigation Technology, Xi'an, Shaanxi 730068, China;

2. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China)

**Abstract** This paper proposes a small sample lifetime evaluation model base on Bootstrap method for aerospace products which have the characters of small sample and long service life. Using B-spline function as the Bootstrap sample empirical distribution function, a random case sample with replacement is obtained. And on this basis, the lifetime evaluation model is established by using non-parametric Bootstrap and parametric Bootstrap method respectively. Hollow cathode ignition test data is evaluated based on the proposed method, and multiple lifetime results are acquired. The results are contrastively analyzed with those concluded by conventional maximum likelihood estimation of parameters, which demonstrates the engineering practicability and effectiveness of the method.

**Key words** Small sample; lifetime evaluation; Bootstrap; B-spline function

我国长寿命静止轨道卫星平台、深空探测平台以及空间站等都对电推进系统以及推力器提出了长寿命工作要求。推力器在轨飞行前, 需要进行地面寿命试验验证, 来评估其寿命是否满足要求。以 LIPS-200 离子推力器为例, 兰州空间技术物理研究所用 2 年的时间验证了 12000 小时的寿命。由于推力器长寿命、高可靠以及制造成本和试验费用(单位小时)昂贵, 其试验样本只有一个, 这就为寿命评估带来了巨大的挑战。

空心阴极作为电子源和中和器, 是离子和霍尔推力器及其电推进系统中的核心部件, 阴极电子发射能力的衰减或失效也就意味着整个推力器的失效。从而, 空心阴极的寿命与可靠性评估对整个推力器寿命评估有重要的意义, 不但能够支持整个推力器的寿命与可靠性评估, 而且还能够为推力器后续设计过程中的可靠性预计和分配提供输入。并且, 空心阴极的寿命与可靠性试验, 相对与推力器的可靠性试验成本低, 而且能够进行多台试验, 置信度相对较高。

近年来在统计学领域应用较多的 Bootstrap 方法, 为小样本条件下统计量分布的直接模拟提供了

收稿日期: 2020-09-21

基金项目: 国家自然科学基金(基金号 12345678); 中国博士后科学基金(基金号 87654321)

作者简介: 赵远, 男, 博士。主要研究方向: 产品可靠性设计与分析、试验评估技术。

网络首发时间: 2021-02-03 17:09:06 网络首发地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20210203.1610.004.html>

一种新的工具。**Bootstrap** 方法最早由 Efron 提出<sup>[1]</sup>, 以用于处理样本数据量少的统计学数据处理方法, 其基本思想是通过原始观测样本数据进行有放回地随机抽样, 来构造自助样本, 利用这些自助样本对总体分布进行统计推断<sup>[2]</sup>。该方法只依赖于给定的原始观测样本数据, 且能够充分挖掘原始观测样本数据所携带的总体信息, 不需要对产品参数的实际分布作任何假设以及增加新的数据观测。本质上说<sup>[1]</sup>, **Bootstrap** 方法是一种将小样本问题转化为大样本问题的分析方法, 摆脱了传统统计方法对分布假定的依赖, 适合于多种分布和参数的估计。

该方法已经广泛地应用于多个领域, 如医学、生物统计、金融、通讯、岩土工程等领域<sup>[3-5]</sup>。文献[6]将 **Bootstrap** 估计方法引入到可靠性统计分析, 提出了可靠性参数和特征量的 **Bootstrap** 区间估计方法。文献[7]建立了寿命分布的参数 **Bootstrap** 拟合优度检验方法, 数值仿真结果表明, 相对于传统的经验分布函数检验, 特别是在小样本的情况下, 该方法优势明显。文献[8,9]将 **Bootstrap** 方法应用于岩土工程的可靠度分析与风险控制中, 为小样本容量岩土体参数最优边缘分布函数和最优 Copula 函数的识别提供了一种有效途径。文献[10]采用 **Bootstrap** 理论建立了可修系统贮存可用度近似置信下限评估方法, 其评估精度满足工程应用要求。文献[11]提出了特小子样试验下导弹精度评定的 **Bootstrap** 方法, 为相关武器系统的精度评定提供了一条新思路。

鉴于 **Bootstrap** 方法的上述优势, 本文将 **Bootstrap** 理论应用于小子样的可靠性评估中, 提出了基于 **Bootstrap** 理论的小子样寿命评估模型。最后, 以航天器空心阴极循环点火寿命试验数据为例, 进行寿命评估, 证明了模型的工程实用性和有效性。

## 1 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估原理

基于 **Bootstrap** 理论的小子样寿命评估原理如图 1 所示。根据产品的小子样试验的失效数据 ( $n$  个样本量), 建立样本经验分布函数。根据样本经验分布函数, 相继地、独立地从样本失效数据中抽出  $M$  个容量为  $n$  的 **Bootstrap** 样本。

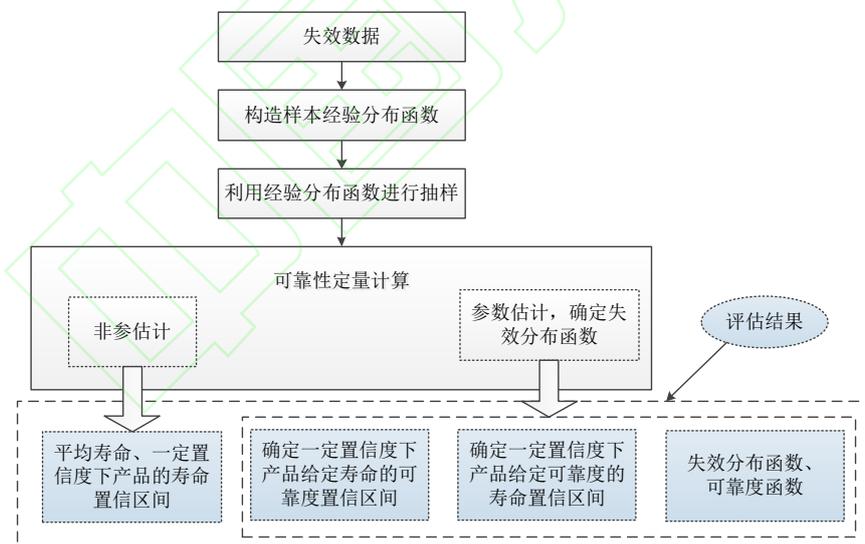


图 1 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估原理  
Fig.1 Lifetime Evaluation Principle of Small Samples Based on Bootstrap Theory

在产品寿命计算过程中, 可以采用两种计算方式: 选用非参数 **Bootstrap** 方法, 能够确定产品的平均寿命和一定置信度下产品的寿命置信区间; 选用参数 **Bootstrap** 方法, 能够确定产品的失效分布函数以及寿命分布函数、一定置信度下产品给定寿命的可靠度置信区间和一定置信度下产品给定可靠度的寿命置信区间。

## 2 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估方法

(1) 根据产品小子样试验的失效数据 ( $n$  个样本量), 建立样本经验分布函数。

在文献[12,13]中已经证明了一次 B-样条函数和三次 B-样条函数可很好的逼近母体之真实分布函数, 本文在此基础上采用上述的 B-样条函数来构造样本经验分布函数。具体实现过程如下:

①.  $t_1, \dots, t_n$  是  $n$  个失效数据, 将  $t_1, \dots, t_n$  按从小到大的次序排列, 并重新编号, 记为  $t'_1 \leq t'_2 \leq \dots \leq t'_n$ 。构造实数  $\mathbf{R}$  上的折线函数  $F_n(t)$ :

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & t < t'_1, \\ \frac{2}{n(t'_{k+2} - t'_k)} t + \frac{kt'_{k+2} - t'_{k+1} - (k+1)t'_k}{n(t'_{k+2} - t'_k)}, & t \in [\frac{t'_k + t'_{k+1}}{2}, \frac{t'_{k+1} + t'_{k+2}}{2}], \\ 1, & t > t'_n \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $k=0,1,2,\dots,n-1$ , 令  $t'_0=t'_1$ ,  $t'_{n+1}=t'_n$ 。

②. 对区间  $[t'_1, t'_n]$  上作一个步长为  $h$  的均匀划分  $\Delta$ :

$$t'_1 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = t'_n$$

要求在均匀划分  $\Delta$  中, 区间的最大样本点个数小于  $nD_{n,\theta}-1$ ,  $D_{n,\theta}$  是给定水平  $\theta$  下的统计量  $D_n$  的临界值 (科尔莫哥洛夫检验)。

③. 对  $\Delta$  进行延拓:

$$\Delta_1: a_0 < a_1 < \dots < a_m < a_{m+1} = a_m + h$$

在实数域上定义函数  $S_1(t)$ :

$$S_1(t) = \begin{cases} 0, & t < a_0 \\ \sum_{i=0}^{m+1} F_n(a_i) M_2\left(\frac{t-a_0}{h} - i\right), & a_0 \leq t \leq a_{m+1} \\ 1, & t > a_{m+1} \end{cases} \quad (2)$$

其中,

$$M_2(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1; \\ 1+x, & -1 \leq x < 0; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$S_1(t)$  为由一次 B-样条函数构造的样本经验分布函数。

④. 对  $\Delta$  进行延拓:

$$\Delta_2: a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < \dots < a_m < a_{m+1} < a_{m+2}$$

在实数域上定义函数  $S_3(t)$ :

$$S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < a_{-1} \\ \sum_{i=-2}^{m+3} F_n(a_i) M_2\left(\frac{t-a_0}{h} - i\right), & a_{-1} \leq t \leq a_{m+2} \\ 1, & t > a_{m+2} \end{cases} \quad (3)$$

其中,

$$M_4(x) = \begin{cases} 1-x, & |x| \leq 1; \\ 1+x, & 1 \leq |x| < 2; \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

$S_3(t)$  为由三次 B-样条函数构造的样本经验分布函数。

使用一次  $S_1(t)$  函数作为抽样的样本经验分布函数具有公式简单、收敛、稳定性好特点；使用三次  $S_3(t)$  函数作为样本经验分布函数其代数精度高，并且能够得到密度函数。

(2) 根据样本经验分布函数，相继地、独立地从样本失效数据中抽出  $M$  个容量为  $n$  的 Bootstrap 样本。

选取样本经验分布函数  $S_1(t)$  或  $S_3(t)$  进行抽样，抽出  $M$  个容量为  $n$  的 Bootstrap 样本。样本 1,  $S^{*1} = \{t_1^{*1}, \dots, t_n^{*1}\}$ ；样本 2,  $S^{*2} = \{t_1^{*2}, \dots, t_n^{*2}\}$ ；样本  $i$ ,  $S^{*i} = \{t_1^{*i}, \dots, t_n^{*i}\}$ ； $i=1, 2, \dots, M$ 。

(3) 可靠性定量计算

非参数的可靠性评估

非参数 Bootstrap 方法计算过程如下：

①. 对于每个样本  $S^{*i}$  求出数学期望，即平均寿命：

$$E(S^{*i}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_j^{*i} = \bar{t}^{*i}, \quad (4)$$

$i=1, 2, \dots, M$ 。

则平均寿命的均值为：

$$\bar{t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{t}^{*i}. \quad (5)$$

②. 将  $\bar{t}^{*1}, \bar{t}^{*2}, \dots, \bar{t}^{*M}$  从小到大排序，得  $\bar{t}^{*(1)} \leq \bar{t}^{*(2)} \leq \dots \leq \bar{t}^{*(M)}$ 。

记  $k_1 = [M \times (\gamma/2)]$ ,  $k_2 = [M \times (1 - (\gamma/2))]$ ，以  $\bar{t}^{*(k_1)}$  和  $\bar{t}^{*(k_2)}$  分别是在  $1 - \gamma$  置信水平下寿命  $t$  的置信区间，即

$$(\bar{t}^{*(k_1)}, \bar{t}^{*(k_2)})。$$

参数估计

以 Weibull 分布为例，参数 Bootstrap 方法计算过程如下：

①. 产品寿命和可靠性分布模型采用 Weibull 分布，某个时刻  $T$  的可靠度  $R(T)$  为：

$$R(T) = \exp \left[ - \left( \frac{T}{\beta} \right)^\alpha \right], \quad (6)$$

其中， $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ 。

可靠度为  $R$  时的可靠寿命  $T(R)$ ：

$$T(R) = \beta \left[ \ln \left( \frac{1}{R} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (7)$$

②. 对第  $i$  个样本，得到其对数似然方程组<sup>[14]</sup>：

$$\begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^n (t_j^{*i})^\alpha \ln t_j^{*i}}{\sum_{j=1}^n (t_j^{*i})^\alpha} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln t_j^{*i} = 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (t_j^{*i})^\alpha = \beta^\alpha \end{cases} \quad (8)$$

解方程组得到：

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_i^*(t_1^{*i}, \dots, t_n^{*i}) \\ \beta = \beta_i^*(t_1^{*i}, \dots, t_n^{*i}) \end{cases},$$

其中， $i=1, 2, \dots, M$ 。

③. 通过  $M$  个样本分别得到  $(\alpha_1^*, \beta_1^*)$ ,  $(\alpha_2^*, \beta_2^*)$ , ...,  $(\alpha_M^*, \beta_M^*)$ ，这些样本均值为：

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_i^* \\ \bar{\beta}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \beta_i^* \end{cases} \quad (9)$$

进而得出产品的可靠度函数的平均估计:

$$R^*(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t}{\bar{\beta}^*} \right)^{\bar{\alpha}^*} \right]$$

④.在给定寿命  $T$  下, 通过公式 (6) 得到

$$R_i^*(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t}{\beta_i^*} \right)^{\alpha_i^*} \right]$$

$i=1,2,\dots,M$ 。将  $R_i^*(T)$  从小到大排序, 得  $R_{(1)}^*(T) \leq R_{(2)}^*(T) \leq \dots \leq R_{(M)}^*(T)$ 。

记  $k_1=[M \times (\gamma/2)]$ ,  $k_2=[M \times (1-(\gamma/2))]$ , 以  $R_{k_1}^*(T)$  和  $R_{k_2}^*(T)$  分别是在  $1-\gamma$  置信水平下工作时间  $T$  的可靠度置信区间, 即

$(R_{k_1}^*(T), R_{k_2}^*(T))$ 。

⑤.在给定可靠度  $R$  下, 通过公式 (7) 得到:

$$t_i^*(R) = \beta_i^* \left[ \ln \left( \frac{1}{R} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha_i^*}}$$

$i=1,2,\dots,M$ 。将  $t_i^*(R)$  从小到大排序, 得  $t_{(1)}^*(R) \leq t_{(2)}^*(R) \leq \dots \leq t_{(M)}^*(R)$ 。

记  $k_1=[M \times (\gamma/2)]$ ,  $k_2=[M \times (1-(\gamma/2))]$ , 以  $t_{k_1}^*(R)$  和  $t_{k_2}^*(R)$  分别是在  $1-\gamma$  置信水平下可靠度为  $R$  的寿命置信区间, 即

$(t_{k_1}^*(R), t_{k_2}^*(R))$ 。

### 3 应用实例

下面对国产某型推力器阴极的点火寿命试验数据进行寿命评估, 阴极点火寿命数据如表 1 所示。影响空心阴极点火寿命的主要因素是其内部加热丝材料的高温蒸发和冷热交替引起的热丝微观组织改变, 通常采用二参数的 Weibull 分布, 进行寿命评估<sup>[15,16]</sup>。本文采用二参数 Weibull 分布进行评估实例验证。

通过表 1 的数据, 得出样本数据:  $t_1=13780$ ,  $t_2=13957$ ,  $t_3=14255$ ,  $t_4=14576$ ,  $t_5=14632$ , 通过 (1) 式, 得到  $F_5(t)$ 。

$$F_5(t) = \begin{cases} 0, & t < 13780, \\ \frac{2}{885}t - \frac{5512}{177}, & t \in [13780, \frac{13780+13957}{2}], \\ \frac{2}{2375}t - \frac{27262}{2375}, & t \in [\frac{13780+13957}{2}, \frac{13957+14255}{2}], \\ \frac{2}{3095}t - \frac{26974}{3095}, & t \in [\frac{13957+14255}{2}, \frac{14255+14576}{2}], \\ \frac{2}{1885}t - \frac{5540}{377}, & t \in [\frac{14255+14576}{2}, \frac{14576+14632}{2}], \\ \frac{t}{140} - \frac{3623}{35}, & t \in [\frac{14576+14632}{2}, 14632], \\ 1, & t > 14632. \end{cases}$$

表 1 阴极点火寿命试验数据  
Table 1 Cathode ignition lifetime test data

点火循环模式	点火失效次数
点火成功后工作 1 分钟, 关闭冷却 20 分钟	13957
点火成功后工作 1 分钟, 关闭冷却 20 分钟	14255
点火成功后工作 2 小时, 关闭冷却 30 分钟	13780
点火成功后工作 2 小时, 关闭冷却 30 分钟	14576
点火成功后工作 2 小时, 关闭冷却 30 分钟	14632

对给定的水平  $\theta=0.05$ , 查柯尔莫哥洛夫检验临界值表得  $D_{5,\theta}=0.56328$ ,  $5D_{5,\theta}-1=1.8164$ 。要求在均匀划分  $\Delta$  中, 区间的最大样本点个数小于 1.8164, 从而取最大样本点个数为 1。

按上述要求, 在[13780, 14632]区间上作步长为  $h=42.6$  的均匀划分

$$\Delta: a_0=13780 < 13822.6 < \dots < 14589.4 < 14632 = a_{20},$$

补充定义  $a_{21}=14674.6$ , 相应的划分点数值与函数值见表 2。

### 3.1 评估模型计算

为了说明该方法的可行性, 本文通过一次 B-样条函数构造样本经验分布函数来进行抽样, 见公式 (2)。

在实数域上定义函数  $S_1(t)$ :

$$S_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 13780, \\ \sum_{i=0}^{21} F_n(a_i) M_2\left(\frac{t-13780}{42.6} - i\right), & 13780 \leq t \leq 14674.6, \\ 1, & t > 14674.6. \end{cases}$$

其中,

$$M_2(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ 1+x, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

依据分布函数  $S_1(t)$  进行抽样, 抽出 1000 组容量为 5 的样本。

表2 划分点数值和函数值  
Table 2 Divide point value and function value

编号	数值	函数 $F_5$ 值	编号	数值	函数 $F_5$ 值	编号	数值	函数 $F_5$ 值
$a_0$	13780	0	$a_8$	14120.8	0.4096	$a_{16}$	14461.6	0.6489
$a_1$	13822.6	0.0963	$a_9$	14163.4	0.4371	$a_{17}$	14504.2	0.6941
$a_2$	13865.2	0.1925	$a_{10}$	14206	0.4646	$a_{18}$	14546.8	0.7393
$a_3$	13907.8	0.2331	$a_{11}$	14248.6	0.4921	$a_{19}$	14589.4	0.7845
$a_4$	13950.4	0.269	$a_{12}$	14291.2	0.5197	$a_{20}$	14632	1
$a_5$	13993	0.3048	$a_{13}$	14333.8	0.5472	$a_{21}$	14674.6	1
$a_6$	14035.6	0.3407	$a_{14}$	14376.4	0.5747			
$a_7$	14078.2	0.3766	$a_{15}$	14419	0.6037			

(1) 采用非参数 Bootstrap 方法计算阴极的平均点火寿命和一定置信度下的点火寿命置信区间, 其计算结果如下:

通过公式 (4), 得到每个样本的平均寿命; 进一步, 通过公式 (5), 得到平均寿命为 14245。

将样本的平均寿命  $\bar{t}^{*1}, \bar{t}^{*2}, \dots, \bar{t}^{*1000}$  从小到大排序, 即

$$\bar{t}^{*(1)} \leq \bar{t}^{*(2)} \leq \dots \leq \bar{t}^{*(M)}。$$

进一步得到在 90% 置信水平下阴极点火平均寿命的置信区间为 (14006, 14459)。

(2) 参数 Bootstrap 方法, 其计算结果如下:

通过求解 (8) 式, 能够解得  $(\alpha_1^*, \beta_1^*), (\alpha_2^*, \beta_2^*), \dots, (\alpha_{1000}^*, \beta_{1000}^*)$ ; 通过公式 (9), 得到平均的估计结果

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_i^* = 73.3668 \\ \bar{\beta}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \beta_i^* = 14371 \end{cases} \circ$$

从而，阴极点火的平均寿命分布函数为：

$$R^*(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t}{14371} \right)^{73.3668} \right] \circ$$

与 NEXT 推力器空心阴极点火寿命分布函数 ( $\alpha=51.19$ 、 $\beta=14105$ ) [15] 相比，两者的特征寿命参数  $\beta$  相近，而国产空心阴极寿命函数的形状参数  $\alpha$  较大。这也表明了，由于阴极材料以及工艺差异，国产阴极与 NEXT 推力器空心阴极相比，在特征寿命附近失效率变化更显著。

通过公式 (6) 得到

$$R_i^*(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t}{\beta_i^*} \right)^{\alpha_i^*} \right],$$

其中， $i=1,2,\dots,1000$ 。

在阴极使用任务要求中，阴极点火次数上限要求为 13800 次，通过模型得到在 90% 置信水平下阴极点火 13800 次的可靠度置信区间为 (0.7709, 0.9988)。

图 2 为 90% 置信水平下阴极点火寿命可靠度置信区域，其中灰色的区域为 1000 组样本得到的寿命分布曲线；红色虚线为 90% 置信水平下的寿命为 13800 的下限曲线；绿色实线为上限曲线。寿命为 13800 的直线与上、下限曲线的交点分别表示其在 90% 置信水平下的可靠度置信上、下限。

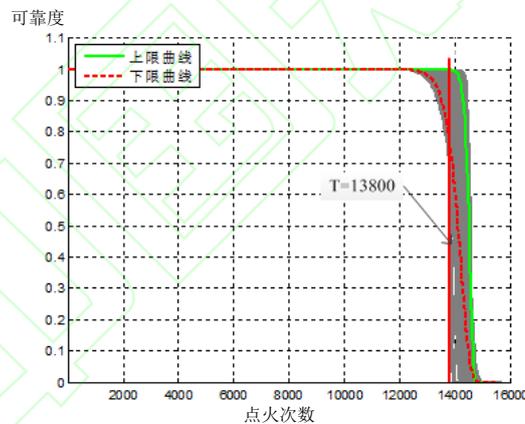


图 2 给定寿命的可靠度置信区域  
Fig.2 Confidence region of reliability for a given lifetime

通过公式 (7)，得到：

$$t_i^*(R) = \beta_i^* \left[ \ln \left( \frac{1}{R} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha_i^*}}$$

其中， $i=1,2,\dots,1000$ 。在 90% 置信水平下可靠度为 0.9 的点火寿命置信区间为 (13543, 14271)。

图 3 为 90% 置信水平下可靠度的寿命置信区域，其中红色虚线为 90% 置信水平下的可靠度为 0.9 的下限曲线；绿色实线为上限曲线。可靠度为 0.9 的直线与上、下限曲线的交点分别表示其在 90% 置信水平下的寿命置信上、下限。

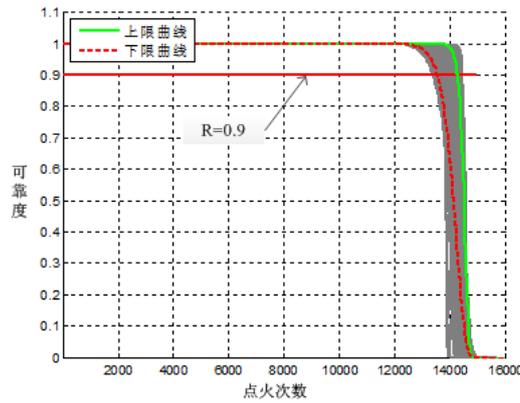


图3 给定可靠度的寿命置信区域  
Fig.3 Confidence region of lifetime for a given reliability

### 3.2 结果对比

对试验数据进行传统的威布尔分布参数估计, 得到

$$\alpha=50.778, \beta=14400.8。$$

从而, 其寿命分布函数为:

$$R(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t}{14400.8} \right)^{50.778} \right]。$$

通过空心阴极的试验数据, 得到其近似的平均寿命  $T$ :

$$T = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i = 14240。$$

通过本文中非参数寿命评估模型得到的平均寿命为 14245。在 90% 置信水平下阴极点火平均寿命的置信区间为 (14006, 14459)。

采用传统参数估计得到的平均点火寿命为:

$$\begin{aligned} T_{TF} &= \int_1^{\infty} R(t) dt \\ &= \int_1^{\infty} \exp \left[ - \left( \frac{t}{14400.8} \right)^{50.778} \right] dt = 14242。 \end{aligned}$$

采用本文中的模型得到的平均点火寿命为:

$$\begin{aligned} T_{TF}^* &= \int_1^{\infty} \exp \left[ - \left( \frac{t}{14371} \right)^{73.3668} \right] dt \\ &= 14260 \end{aligned}$$

以近似的平均寿命为参考, 得到不同的寿命计算方法的相对误差, 如表 3 所示。可以看出, 采用本文中提出的评估模型 (③、④) 以及传统的参数估计 (②) 得到的平均寿命与近似的平均寿命非常接近, 点火次数相差值在 20 次以内, 相对误差都小于 0.002。采用本文中的非参数评估模型 (⑤) 得到了 90% 置信度下的平均寿命置信区间, 从表 3 中可以看出①、②、③、④中寿命结果都在该平均寿命置信区间中; 其中平均寿命置信区间的上下限与近似平均寿命的相对误差小于等于  $\pm 0.016$ 。通过上述的相对误差结果可以看出, 通过本文中的评估模型得到的寿命评估结果与近似的平均寿命非常接近, 评估精度能够满足工程需求。

表3 寿命结果的相对误差  
Table 3 Relative error of lifetime results

序号	计算方法	寿命结果	与 $T$ 相对误差
①	近似的平均寿命	14240	0
②	传统参数估计	14242	0.00014
③	非参数评估模型	14245	0.00035
④	参数寿命评估模型	14260	0.0013
⑤	非参数评估模型	(14006, 14459)	(-0.016, 0.015)

## 4 结论

航天产品高可靠、长寿命以及试验成本高的特点, 使得其试验代价非常高, 试验数据宝贵, 为了充分地挖掘试验数据信息并满足工程应用中对多类型可靠性特征信息的需求, 本文提出了一种基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型。该模型具有以下优点:

1) 在够造样本经验分布函数基础上, 将 Bootstrap 方法应用于寿命与可靠性评估中, 通过多次抽样, 扩大了信息量, 充分挖掘试验数据中所携带的寿命与可靠性总体信息, 提高了小子样数据评估的准确性。

2) 首次将构造的一次 B-样条函数和三次 B-样条函数作为本模型的样本经验分布函数应用到可靠性评估中。与现有的 Bootstrap 理论的经验分布函数相比, 构造的经验分布函数逼近的母体真实分布函数更加精确, 提高了可靠性评估的精确度。

3) 通过该评估模型能够给出多种寿命与可靠性评价结果:

产品的平均寿命;

一定置信度下寿命的置信度区间;

失效分布函数的参数估计;

一定置信水平下给定寿命的可靠度置信度区间;

一定置信水平下给定可靠度的寿命置信度区间。

## 参考文献 (References)

- [1] Efron B. Bootstrap methods: another look at the jackknife[M]. New York: *Breakthroughs in Statistics*. Springer New York, 1992: 569-593.
- [2] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计第四版[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.  
Sheng Z, Xie S Q, Pan C Y. Probability and mathematical statistics 4<sup>th</sup> end[M]. Beijing: *Higher Education Press*, 2008(in Chinese).
- [3] Fong W M. Time diversification under loss aversion: a bootstrap analysis[J]. *Applied Economics*, 2013, 45(5): 605-610.
- [4] Noguchi K, Gel Y R, Duguay C R. Bootstrap-based tests for trends in hydrological time series, with application to ice phenology data[J]. *Journal of Hydrology*, 2011, 410(3): 150-161.
- [5] Önöz B, Bayazit M. Block bootstrap for Mann-Kendall trend test of serially dependent data[J]. *Hydrological Processes*, 2012, 26(23): 3552-3560.
- [6] 陈文华, 李奇志, 张为鄂, 等. 产品可靠性的 Bootstrap 区间估计方法[J]. 机械工程学报, 2003, 39(6): 106-109.  
Chen W H, Li Q Z, Zhang W E. Method of Bootstrap Interval Estimation for Product Reliability[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2003, 39(6): 106-109(in Chinese).
- [7] 孙权, 周星, 冯静, 等. 寿命分布的参数 Bootstrap 拟合优度检验方法[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(3): 112-116.  
Sun Q, Zhou X, Feng J, Pan Z Q. Goodness-of-fit test for life distributions based on parametric Bootstrap[J]. *Journal of national university of defense technology*, 2014, 36(3): 112-116(in Chinese).
- [8] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Bootstrap 方法的岩土体参数联合分布模型识别[J]. 岩土力学, 2015, 36(4): 913-922.  
Tang X S, Li D Q, Zhou C B, et al. Bootstrap method for joint probability distribution identification of correlated geotechnical parameters[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(4): 913-922(in Chinese).
- [9] Li D Q, Tang X S, Phoon K K. Bootstrap method for characterizing the effect of uncertainty in shear strength parameters on slope reliability[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, 140: 99-106.
- [10] 罗巍, 张春华, 谭源源, 等. 基于 Bootstrap 的可修系统贮存可用度近似置信下限评估方法[J]. 兵工学报, 2010, 31(3): 391-395.  
Luo W, Zhang C H, Tan Y Y, et al. Estimating Method of Approximate Confidence Lower Limits of Repairable System Storage Availability Based on Bootstrap[J]. *Acta Armamentarii*, 2010, 31(3): 391-395(in Chinese).
- [11] 胡正东, 曹渊, 张士峰, 蔡洪. 特小子样试验下导弹精度评定的 Bootstrap 方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(8): 1493-1497.
- [12] Hu Z D, Cao Y, Zhang S F, et al. Bootstrap method for missile precision evaluation under extreme small sample test[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(8): 1493-1497(in Chinese).
- [12] 陈亚婷. 构造分布函数的样条函数方法及其应用[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2006.  
Cheng Y T. The method of construct distribution function by spline function and its application[D]. Hefei: *Hefei University of Technology*,

- 2006(in Chinese).
- [13] 陈亚婷, 朱功勤. 由样条函数构造的一类分布函数[J]. 合肥工业大学学报, 2006, 29(6): 790-793.  
Cheng Y T, Zhu G Q. A kind of distribution function made by the spline function[J]. *Journal of Hefei University of Technology*, 2006, 29(6): 790-793(in Chinese).
- [14] 赵宇. 可靠性数据分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011: 141-146.  
ZHAO Y. Data Analysis of Reliability[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011:141-146(in Chinese).
- [15] Daniel A H, Luis R P, James S S. NASA's Evolutionary Xenon Thruster (NEXT) Component Verification Testing[J]. 44<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion conference & Exhibit 21-23 July 2008, Hartford, CT.
- [16] 杨威, 陈继巍, 贾艳辉, 孟伟, 黄永杰. 离子推力器空心阴极点火可靠性评价研究[J]. 真空与低温, 2015, 21(2): 96-98.  
Yang W, Chen J W, Jia Y H, et al. Study on the evaluation of the ignition reliability for ion thruster's hollow cathode[J]. *Vacuum & Cryogenics*, 2015, 21(2): 96-98(in Chinese).

