第47卷 第6期
2021年12月

兰 州 理 工 大 学 学 报
Journal of Lanzhou University of Technology

Vol.47 No.6
Dec.2021

文章编号：1673-5196(2021)06-0156-04

广义 $C3$ 模

王永铎*，秦丽芳

（兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州 730050）

摘要：作为 $C3$ 模的真推广，引入广义 $C3$ 模（简称 G-$C3$ 模）的概念，研究这类模的基本性质，证明遗传环 R 是右 V-环当且仅当每个有限余生成 R-模是 G-$C3$ 模当且仅当每个有限余表示 R-模是 G-$C3$ 模.

关键词：$C3$ 模；G-$C3$ 模；V-环

中图分类号：O152.7　　文献标志码：A

Generalized $C3$ modules

WANG Yong-duo，QIN Li-fang

（School of Science，Lanzhou Univ. of Tech.，Lanzhou 730050，China）

Abstract：As a proper generalization of $C3$ modules，the concept of generalized $C3$ modules (briefly G-$C3$ modules) is introduced in this paper. Basic properties of these modules are studied and it is shown that a hereditary ring R is a right V-ring if and only if every finitely cogenerated R-module is a G-$C3$ module if and only if every finitely copresented R-module is a G-$C3$ module.

Key words：$C3$ module；G-$C3$ module；V-ring

在本文中，R 都是有单位元的结合环，M 都是右 R-模，$N\leqslant M$ 表示 N 是 M 的子模，$N|M$ 表示 N 是 M 的直和项，$r(A)$ 表示 A 在 R 中的右零化子，$E(M)$ 表示 M 的内射包，$\mathrm{End}_R(M)=S$ 表示 M 的自同态环，$\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ 表示 R-模 X 到 Y 的同态集.

Amin 等[1]引入了 $C3$ 模的概念.称 M 是 $C3$ 模，如果 $M_1|M$，$M_2|M$，且 $M_1\cap M_2=0$，那么 $M_1\oplus M_2$ 是 M 的直和项.证明了 R 是半单环当且仅当所有内射 R-模的子模是 $C3$ 模当且仅当任意两个 $C3$ 模的直和仍为 $C3$ 模当且仅当 R-模 $(R\oplus R)_R$ 的子模是 $C3$ 模当且仅当所有投射 R-模的子模是 $C3$ 模. Tasdemir 等[2]引入了广义 SSP 模（$GSSP$ 模）的概念.称 M 是 $GSSP$ 模，如果 M 的任意两个直和项的和同构于 M 的直和项.受文献[1-2]的启发，本文引入了广义 $C3$ 模（简称 G-$C3$ 模）的概念.称 M 是 G-$C3$ 模，如果 $M_1|M$，$M_2|M$，且 $M_1\cap M_2=0$，那么 $M_1\oplus M_2$ 同构于 M 的直和项.给出了是 G-$C3$ 模但不是 $C3$ 模的例子，并研究了 G-$C3$ 模的一些基本性质，证明了遗传环 R 是右 V-环当且仅当每个有限余生成 R-模是 G-$C3$ 模当且仅当每个有限余表示 R-模是 G-$C3$ 模.称 M 是 SIP 模[3]，如果 M 的任意两个直和项的交是 M 的直和项.称 M 是 *virtually* 半单模[4]，如果 M 的每个子模同构于 M 的直和项.称 M 的子模 N 是完全不变子模[5]，如果对任意的 $f\in\mathrm{End}_R(M)$ 均有 $f(N)\subseteq N$.称 M 是（弱）*duo* 模[5]，如果 M 的每个（直和项）子模是完全不变子模.称 M 满足 C_2 条件[6]，如果同构于 M 的直和项的子模 N 是 M 的直和项.称 M 是有限余生成模[7]，如果 M 的基座是有限生成的且在 M 中本质.称 X 是有限余表示模[7]，如果：1) X 是有限余生成的；2) 在正合列 $0\to X\to L\to N\to 0$ 中 L 是有限余生成的，N 也是有限余生成的.称 R 是右 V-环[7]，如果任意单右 R-模是内射模.

定义1 称 M 是广义 $C3$ 模（简称 G-$C3$ 模）如果 $M_1|M$，$M_2|M$，且 $M_1\cap M_2=0$，那么 $M_1\oplus M_2$ 同构于 M 的直和项.

例1 设 p 是素数，考虑 $\mathbf{Z}$-模 $M=Z_p\oplus\mathbf{Z}_{p^2}$.则 M 的直和项有 $0,M,\langle(\bar{0},\bar{1})\rangle,\langle(\bar{1},\bar{p})\rangle,\langle(\bar{1},\bar{1})\rangle,\langle(\bar{1},\bar{0})\rangle$.因为 $\langle(\bar{1},\bar{0})\rangle\cap\langle(\bar{1},\bar{p})\rangle=\langle(\bar{0},\bar{0})\rangle$，$\langle(\bar{1},$

收稿日期：2020-10-13
基金项目：国家自然科学基金(11861043)
通讯作者：王永铎(1974-)，男，甘肃靖远人，博士，教授.
Email：ydwang@lut.edu.cn

$\overline{0})\rangle\oplus\langle(\overline{1},\overline{p})\rangle$ 不是 M 的直和项，所以 $M_{\mathbf{Z}}$ 不是 $C3$ 模.但 M 的两个直和项的交等于 0 时，它们的直和同构于 M 的直和项，因此 $M_{\mathbf{Z}}$ 是 G-$C3$ 模.

例 2　$R=\mathbf{Z}_4$，$M=\mathbf{Z}_4\oplus(\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbf{Z}_2)$ 作为右 R-模是 G-$C3$ 模，但 M_R 不是 $C3$ 模.

证明　由文献[4]中的例 2.7 可知，M_R 是 *virtually* 半单模，则 M_R 是 G-$C3$ 模.因为 $C3$ 模的直和项仍为 $C3$ 模，而 $\mathbf{Z}_4\oplus\mathbf{Z}_2$ 不是 $C3$ 模，所以 M_R 不是 $C3$ 模.

定理 1　设 M 是 G-$C3$ 模.若 $M=A\oplus B$，其中 $A,B\leqslant M$，$f:A\to B$ 是单同态，则 $\mathrm{Im}\ f$ 同构于 M 的直和项.

证明　设 $C=\{a+f(a)\mid a\in A\}$，则 $\mathbf{C}\leqslant M$.设 $x\in M$，$x=a+b$，其中 $a\in A$，$b\in B$，则 $x=a+f(a)-f(a)+b\in C+B$.因此 $M=C+B$.设 $x=a+f(a)\in C\cap B$，其中 $a\in A$，则 $a=x-f(a)\in A\cap B=0$，从而 $a=0$，进而 $x=f(a)=0$.因此 $C\cap B=0$.这样 $M=C\oplus B$.设 $x=a+f(a)\in A\cap C$，其中 $a\in A$，则 $x-a=f(a)\in A\cap B=0$.因此 $f(a)=0$.因为 f 是单同态，所以 $x=a=0$，从而 $A\cap C=0$.又因为 M 是 G-$C3$ 模，所以 $A\oplus C$ 同构于 M 的直和项.设 $x\in\mathrm{Im}\ f$，则存在 $a\in A$，使得 $f(a)=x$，从而 $x=-a+a+f(a)\in A+C$.因此 $A+\mathrm{Im}\ f\subseteq A+C$.显然 $A+C\subseteq A+\mathrm{Im}\ f$，$A\cap\mathrm{Im}\ f=0$，这样 $A\oplus C=A\oplus\mathrm{Im}\ f$.又因为 $A\oplus C$ 同构于 M 的直和项，所以 $A\oplus\mathrm{Im}\ f$ 同构于 M 的直和项.故 $\mathrm{Im}\ f$ 同构于 M 的直和项.

推论 1　设 M 是 G-$C3$ 模.若 $A\cap B=0$，其中 $A,B\leqslant M$，$B\cong A\mid M$，则 $A\oplus B$ 同构于 M 的直和项.

证明　设 $A\mid M$，$B\leqslant M$，$A\cap B=0$，且 $\sigma:B\to A$ 是同构.因为 $A\mid M$，所以存在 $T\leqslant M$，使得 $M=A\oplus T$.设 $\pi:M\to T$ 是标准投影，则 $\pi|_B:B\to T$ 是单同态，从而 $B\cong\pi(B)$.因此 $A\oplus B\cong A\oplus\pi(B)$.而 $\sigma:B\to A$ 是同构.这样 $\pi|_B\circ\sigma^{-1}:A\to T$ 是单同态.又因为 M 是 G-$C3$ 模，所以由定理 1 知 $\mathrm{Im}(\pi|_B\circ\sigma^{-1})=\pi|_B(\mathrm{Im}(\sigma^{-1}))=\pi(B)$ 同构于 M 的直和项，从而 $A\oplus\pi(B)$ 同构于 M 的直和项，即 $A\oplus B$ 同构于 M 的直和项.

命题 1　设 M 是 R-模.则 M 是 G-$C3$ 模当且仅当对于 $M=A\oplus A'=B\oplus B'$，$A'\cap B=0$，且 $\pi:M\to A$ 是标准投影，$\pi^{-1}(\pi(B))$ 同构于 M 的直和项.

证明　"$\Rightarrow$"因为 $\pi:M\to A$ 是标准投影，所以 $\pi^{-1}(\pi(B))=B+\mathrm{Ker}\ \pi=B+A'$，又因为 M 是 G-$C3$ 模，且 $B\cap A'=0$，所以 $B\oplus A'$ 同构于 M 的直和项，即 $\pi^{-1}(\pi(B))$ 同构于 M 的直和项.

"$\Leftarrow$"设 $A'\mid M$，$B\mid M$，且 $A'\cap B=0$.因为 $A'\mid M$，所以存在 $A\leqslant M$，使得 $M=A\oplus A'$.设 $\pi:M\to A$ 是标准投影，则由假设知，$\pi^{-1}(\pi(B))$ 同构于 M 的直和项.而 $\pi^{-1}(\pi(B))=B+\mathrm{Ker}\ \pi=B\oplus A'$.因此 $B\oplus A'$ 同构于 M 的直和项，即 M 是 G-$C3$ 模.

命题 2　设 M 是 G-$C3$ 模.若 $M=A\oplus A'=B\oplus B'$，$A\cap B'=0$，且 $\pi:M\to B$ 是标准投影，则 $\mathrm{Im}(\pi|_A)$ 同构于 M 的直和项.

证明　因为 $M=B\oplus B'$，$\pi:M\to B$ 是标准投影，所以 $\mathrm{Im}(\pi|_A)=\pi(A)=(A+B')\cap B$，从而 $\pi(A)\oplus B'=[(A+B')\cap B]\oplus B'=A+B'$.又因为 M 是 G-$C3$ 模，且 $A\cap B'=0$，所以 $\pi(A)\oplus B'=A\oplus B'$ 同构于 M 的直和项.因此 $\mathrm{Im}(\pi|_A)$ 同构于 M 的直和项.

定理 2　设 M 是 G-$C3$ 模.则 M 是 $C3$ 模当且仅当对于 $A_1\mid M$，$A_2\mid M$，$A_1\cap A_2=0$，且有 R-同构 $\sigma:A_1\oplus A_2\to P$，其中 $P\mid M$，σ 可以扩张成某个 $\varphi\in\mathrm{End}_R(M)$.

证明　"$\Rightarrow$"设 $A_1\mid M$，$A_2\mid M$，$A_1\cap A_2=0$，且有 R-同构 $\sigma:A_1\oplus A_2\to P$，其中 $P\mid M$.因为 M 是 $C3$ 模，所以 $(A_1\oplus A_2)\mid M$，从而存在 $B\leqslant M$，使得 $M=(A_1\oplus A_2)\oplus B$.通过 $\varphi(a+b)=\sigma(a)$ 定义 $\varphi:M\to M$，其中 $a\in A_1\oplus A_2$，$b\in B$.因此对任意的 $a\in A_1\oplus A_2$，$\varphi(a)=\sigma(a)$，故 $\varphi|_{A_1\oplus A_2}=\sigma$.

"$\Leftarrow$"设 $A_1\mid M$，$A_2\mid M$，且 $A_1\cap A_2=0$.因为 M 是 G-$C3$ 模，所以存在 $P\mid M$，使得 $\sigma:A_1\oplus A_2\to P$ 是同构，且 $\sigma(A_1\oplus A_2)\mid M$.从而由假设知，$\sigma$ 可以扩张成同态 $\varphi:M\to M$.设 $\pi:M\to\sigma(A_1\oplus A_2)$ 是标准投影，则 $\omega=\pi\varphi:M\to\sigma(A_1\oplus A_2)$ 是同态.因此对任意的 $x\in A_1\oplus A_2$，$\omega(x)=\pi\varphi(x)=\pi\sigma(x)=\sigma(x)$.又因为对任意的 $m\in M$，$\omega(m)=\sigma(n)=\omega(n)$，其中 $n\in A_1\oplus A_2$，所以 $m-n\in\mathrm{Ker}\ \omega$.而 $m=m-n+n$，故 $M=\mathrm{Ker}\ \omega+(A_1\oplus A_2)$.设 $z\in\mathrm{Ker}\ \omega\cap(A_1\oplus A_2)$，则 $z\in A_1\oplus A_2$，且 $z\in\mathrm{Ker}\ \omega$.因此 $\omega(z)=0=\sigma(z)$，从而 $z=0$.这样 $M=\mathrm{Ker}\ \omega\oplus(A_1\oplus A_2)$，进而 $(A_1\oplus A_2)\mid M$，即 M 是 $C3$ 模.

命题 3　若 R-模 M 满足 C_2 条件，则 M 是 G-$C3$ 模当且仅当 M 是 $C3$ 模.

证明　"$\Rightarrow$"设 $A_1\mid M$，$A_2\mid M$，且 $A_1\cap A_2=0$.因为 M 是 G-$C3$ 模，所以存在 $K\mid M$，使得 $(A_1\oplus A_2)\cong K$.又因为 M 满足 C_2 条件，所以 $(A_1\oplus A_2)\mid M$，即 M 是 $C3$ 模.

"$\Leftarrow$"显然.

推论 2 内射模 M 是 G-$C3$ 模当且仅当 M 是 $C3$ 模.

下面的例子说明两个 G-$C3$ 模的直和不一定是 G-$C3$ 模.

例 3 考虑 $\mathbf{Z}$-模 $M=\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_8$.则 M 的直和项有 $0,M,\langle(\bar{1},\bar{4})\rangle,\langle(\bar{1},\bar{1})\rangle,\langle(\bar{0},\bar{1})\rangle,\langle(\bar{1},\bar{0})\rangle$.因为 $\langle(\bar{1},\bar{4})\rangle\cap\langle(\bar{1},\bar{0})\rangle=\langle(\bar{0},\bar{0})\rangle$,$\langle(\bar{1},\bar{4})\rangle\oplus\langle(\bar{1},\bar{0})\rangle=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{4}),(\bar{0},\bar{4})\}$,所以 $\langle(\bar{1},\bar{4})\rangle\oplus\langle(\bar{1},\bar{0})\rangle$ 不同构于 M 的直和项,从而由 G-$C3$ 的定义可知,$M_{\mathbf{Z}}$ 不是 G-$C3$ 模.而 $\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_8$ 是不可分解模,因此 $\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_8$ 是 G-$C3$ 模.

引理 1[8] 设 R-模 $M=M_1\oplus M_2$.若 $r(M_1)+r(M_2)=R$,则对于任意的 $N\leqslant M$,$N=N_1\oplus N_2$,其中 $N_1\leqslant M_1$,$N_2\leqslant M_2$.

定理 3 若 R-模 M,N 是 G-$C3$ 模.且 $r(M)+r(N)=R$,则 $M\oplus N$ 是 G-$C3$ 模.

证明 设 $A\mid(M\oplus N)$,$B\mid(M\oplus N)$,且 $A\cap B=0$.由引理 1 知,$A=M_1\oplus N_1$,$B=M_2\oplus N_2$,其中 $M_1\leqslant M$,$M_2\leqslant M$,$N_1\leqslant N$,$N_2\leqslant N$.因此 $M_1\mid M$,$M_2\mid M$,$N_1\mid N$,$N_2\mid N$.因为 $A\cap B=0$,所以 $M_1\cap M_2=0$,$N_1\cap N_2=0$.又因为 M,N 是 G-$C3$ 模,所以 $M_1\oplus M_2$ 同构于 M 的直和项,$N_1\oplus N_2$ 同构于 N 的直和项,从而 $(M_1\oplus M_2)\oplus(N_1\oplus N_2)$ 同构于 $M\oplus N$ 的直和项.而 $(M_1\oplus M_2)\oplus(N_1\oplus N_2)=(M_1\oplus N_1)\oplus(M_2\oplus N_2)=A\oplus B$.因此 $A\oplus B$ 同构于 $M\oplus N$ 的直和项,即 $M\oplus N$ 是 G-$C3$ 模.

定理 4 设 M 是 G-$C3$ 模.若 $M=M_1\oplus M_2$ 是 M 的一个分解且有 $\mathrm{Hom}(M_1,M_2)=0$,则 M_2 是 G-$C3$ 模.

证明 设 $A\mid M_2$,$B\mid M_2$,且 $A\cap B=0$,则 $A\mid M$,$B\mid M$.因为 M 是 G-$C3$ 模,所以存在 $N\mid M$,使得 $A\oplus B\cong N$.而 $N\mid M$,因此存在 $N'\leqslant M$,使得 $M=N\oplus N'$.又因为 $\mathrm{Hom}(M_1,M_2)=0$,所以由文献[5]中引理 1.9 知,M_1 是 M 的完全不变子模,从而 $M_1=M\cap M_1=(N\oplus N')\cap M_1=(N\cap M_1)\oplus(N'\cap M_1)$.因为 $\mathrm{Hom}(M_1,N)=0$(若 $\mathrm{Hom}(M_1,N)\neq0$,则有非零同态 $f:M_1\to N\cong A\oplus B\to M_2$ 与 $\mathrm{Hom}(M_1,M_2)=0$ 矛盾),所以 $N\cap M_1=0$(若有非零元 $x\in N\cap M_1$,则 $M_1\to N\cap M_1\to N$ 非零与 $\mathrm{Hom}(M_1,N)=0$ 矛盾),从而 $M_1\leqslant N'$.因此 $N'=M_1\oplus(N'\cap M_2)$.又因为 $M=N\oplus N'$,所以 $M=N\oplus M_1\oplus(N'\cap M_2)=M_1\oplus M_2$,从而 $M_2\cong N\oplus(N'\cap M_2)$,进而 N 同构于 M_2 的直和项.因此 $A\oplus B$ 同构于 M_2 的直和项,即 M_2 是 G-$C3$ 模.

推论 3 设模 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$ 是 duo 模.则 M 是 G-$C3$ 模当且仅当 $M_i(i\in I)$是 G-$C3$ 模.

证明 "$\Rightarrow$" 因为 M 是 duo 模,所以由文献[5]中定理 2.7 知,$\mathrm{Hom}(M_i,M_j)=0$,从而 $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\neq j}M_i,M_j)=0$.因此由定理 4 知,$M_j(j\in I)$是 G-$C3$ 模.

"$\Leftarrow$" 设 $S\mid M$,$T\mid M$,且 $S\cap T=0$.因为 M 是 duo 模,所以由文献[5]中定理 2.10 知,$S=\bigoplus_{i\in I}(S\cap M_i)$,$T=\bigoplus_{i\in I}(T\cap M_i)$,从而

$$S\oplus T=[\bigoplus_{i\in I}(S\cap M_i)]\oplus[\bigoplus_{i\in I}(T\cap M_i)]=\bigoplus_{i\in I}[(S\cap M_i)\oplus(T\cap M_i)]$$

而

$$S\cap T=[\bigoplus_{i\in I}(S\cap M_i)]\cap[\bigoplus_{i\in I}(T\cap M_i)]=\bigoplus_{i\in I}[(S\cap M_i)\cap(T\cap M_i)]=0$$

因此 $(S\cap M_i)\cap(T\cap M_i)=0$.又因为 $M_i(i\in I)$是 G-$C3$ 模,且 $(S\cap M_i)\mid M_i$,$(T\cap M_i)\mid M_i$,所以 $(S\cap M_i)\oplus(T\cap M_i)$ 同构于 M_i 的直和项,从而 $S\oplus T$ 同构于 M 的直和项,即 M 是 G-$C3$ 模.

命题 4 设 M 是 G-$C3$ 模.若 M 是 SIP 模,则 M 是 $GSSP$ 模.

证明 设 $N\mid M$,$T\mid M$.因为 M 是 SIP 模,所以存在 $L\leqslant M$,使得 $M=(N\cap T)\oplus L$,从而

$$N=(N\cap T)\oplus(L\cap N)$$
$$T=(N\cap T)\oplus(L\cap T)$$

因此

$$N+T=(N\cap T)+[(L\cap N)\oplus(L\cap T)]$$

设 $x=n_1+n_2\in(N\cap T)\cap[(L\cap N)\oplus(L\cap T)]$,其中 $x\in N\cap T$,$n_1\in L\cap N$,$n_2\in L\cap T$,则

$$n_2=x-n_1\in[(N\cap T)+(L\cap N)]\cap(L\cap T)\leqslant N\cap(L\cap T)=0$$

从而 $n_2=0$,$x=n_1$,进而

$$x=n_1\in(N\cap T)\cap(L\cap N)=N\cap T\cap L=0$$

因此 $(N\cap T)\cap[(L\cap N)\oplus(L\cap T)]=0$.这样

$$N+T=(N\cap T)\oplus(L\cap N)\oplus(L\cap T)$$

因为 $T=(N\cap T)\oplus(L\cap T)$,所以

$$N+T=T\oplus(L\cap N)$$

又因为 M 是 SIP 模,所以 $(L\cap N)\mid M$.而 M 是 G-$C3$ 模,因此 $N+T=T\oplus(L\cap N)$ 同构于 M 的直和项,即 M 是 $GSSP$ 模.

推论 4 设 M 是 SIP 模.则 M 是 G-$C3$ 模当且仅当 M 是 $GSSP$ 模.

引理 2[7] 设 R 是环.则下列条件等价:

1) R 是右 V-环.

2) 每个有限余生成 R-模是半单模.

3）每个有限余表示 R-模是内射模.

定理 5　设 R 是遗传环.则下列条件等价：

1）R 是右 V-环.

2）每个有限余生成 R-模是 G-$C3$ 模.

3）每个有限余表示 R-模是 G-$C3$ 模.

证明　1）⇒2）由文献[7]中 23.1 可得.

2）⇒3）由定义可得.

3）⇒1）设 M 是有限余表示 R-模.则由文献[7]中 30.1 可知，$E(M)$ 和 $E(M)/M$ 是有限余生成的.因为有限余生成内射模是有限余表示的，所以 $E(M)$ 是有限余表示的，从而由文献[7]中 30.2(3) 可知，$M\oplus E(M)$ 是有限余表示的.因此 $M\oplus E(M)$ 是 G-$C3$ 模.设 $i: M\to E(M)$ 是单同态，则由定理 1 知，$\mathrm{Im}\ i\cong M$ 同构于 $M\oplus E(M)$ 的直和项，所以 $\mathrm{Im}\ i\cong M$ 同构于 $E(M)\oplus E(M)/M$ 的直和项.又因为 R 是遗传环，所以内射模的商模是内射模，从而 $E(M)/M$ 是内射模，进而 $E(M)\oplus E(M)/M$ 是内射模，而内射模的直和项仍为内射模.因此 M 同构于内射模.这样由引理 2 可知，R 是右 V-环.

命题 5　设 R 是遗传环.如果 G-$C3$ 模的直和仍是 G-$C3$ 模，那么 R 是右 V-环.

证明　设 M 是有限余生成 R-模.由文献[7]中 21.3 可知，M 是不可分解模的直和.因为不可分解模是 G-$C3$ 模，所以 M 是 G-$C3$ 模的直和，进而由假设知，M 是 G-$C3$ 模.因此由定理 5 知，R 是右 V-环.

参考文献：

[1] AMIN I, IBRAHIM Y, YOUSIF M. $C3$-modules [J]. Algebra Colloquium, 2015, 22(4): 655-670.

[2] TAŞDEMIR Ö, KARABACAK F. Generalized SSP-modules [J]. Communications in Algebra, 2019, 48(3): 1068-1078.

[3] ALKAN M, HARMANCI A. On summand sum and summand intersection property of modules [J]. Turkish Journal of Mathematics, 2002, 26(2): 131-147.

[4] BEHBOODI M, DANESHVAR A, VEDADI M R. Virtually semisimple modules and a generalization of the Wedderburn-Artin theorem [J]. Communications in Algebra, 2018, 46(6): 2384-2395.

[5] ÖZCAN A Ç, HARMANCI A, SMITH P F. Duo modules [J]. Glasgow Mathematical Journal, 2006, 48(48): 533-545.

[6] MOHAMED S H, MÜLLER B J. Continuous and discrete Modules [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990.

[7] WISBAUER R. Foundations of module and ring theory [M]. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

[8] HAMDOUNI A, HARMANCI A, ÖZCAN A Ç. Characterization of modules and rings by the summand intersection property and the summand sum property [J]. JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 2005, 5(3): 469-490.