文章编号：1673-5196(2021)06-0151-05

广义 Jacobsthal 数及其组合意义

杨胜良*，任凤云

（兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州 730050）

摘要：引入了广义 k 阶 Jacobsthal 序列的概念，得到了 k-Jacobsthal 序列的发生函数以及相关的组合恒等式.通过研究两种格路的计数，给出了 k-Jacobsthal 数的两种组合解释.

关键词：Jacobsthal 数；k 阶 Jacobsthal 序列；Riordan 矩阵；发生函数；格路；$\boldsymbol{A}$-矩阵

中图分类号：O157.1　　文献标志码：A

Generalized Jacobsthal number and its combinatorial meaning

YANG Sheng-liang, REN Feng-yun

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: The concept of generalized Jacobsthal sequence of order k is introduced. The generating function of Jacobsthal sequence of order k and the related combinatorial identities are obtained. The enumerations of two classes of lattice paths are studied and the two combinatorial interpretations of Jacobsthal numbers of order k are given.

Key words: Jacobsthal number; Jacobsthal sequence of order k; Riordan array; generating function; lattice path $\boldsymbol{A}$-matrix

Fibonacci 序列 $(F_n)_{n\geqslant 0}$ 是重要和经典的序列. Fibonacci 序列的发生函数为 $\frac{t}{1-t-t^2}$. Komatsu 等[1-2]给出了广义 k 阶 Fibonacci 序列的定义和发生函数为 $\frac{1}{1-t-t^2-\cdots-t^k}$.Jacobsthal 序列的初值为 $J_0=0, J_1=1$.并且满足的递推关系为 $J_n=J_{n-1}+2J_{n-2}$. 从而 Jacobsthal 序列的发生函数为 $\frac{t}{1-t-2t^2}$.以下给出 k-Jacobsthal 序列的定义.

定义1　设正整数 $k\geqslant 2$，令初值为 $J_0^{(k)}=1$，$J_{-1}^{(k)}=J_{-2}^{(k)}=\cdots=J_{-(k-1)}^{(k)}=0$.当 $n\geqslant 1$ 时，满足递推关系：

$$J_n^{(k)}=J_{n-1}^{(k)}+2J_{n-2}^{(k)}+\cdots+J_{n-k}^{(k)} \tag{1}$$

则称 $(J_n^{(k)})_{n\geqslant 0}$ 为 k-Jacobsthal 序列.记 $J_n^{(k)}$ 为 k-Jacobsthal 序列的第 n 项.

定理1　设 $J^{(k)}(t)$ 为 k-Jacobsthal 序列的发生函数，则

$$J^{(k)}(t)=\frac{1}{1-t-2t^2-t^3-\cdots-t^k} \tag{2}$$

证明　由递推关系(1)有

$$\sum_{n\geqslant k}J_n^{(k)}t^n=\sum_{n\geqslant k}J_{n-1}^{(k)}t^n+2\sum_{n\geqslant k}J_{n-2}^{(k)}t^n+\cdots+\sum_{n\geqslant k}J_{n-k}^{(k)}t^n$$

故可得

$$J^{(k)}(t)-\sum_{n=0}^{k-1}J_n^{(k)}t^n=t\Big(J^{(k)}(t)-\sum_{n=0}^{k-2}J_n^{(k)}t^n\Big)+2t^2\Big(J^{(k)}(t)-\sum_{n=0}^{k-3}J_n^{(k)}t^n\Big)+\cdots+t^kJ^{(k)}(t)$$

从而

$$(1-t-2t^2-\cdots t^k)J^{(k)}(t)=J_0^{(k)}+t(J_1^{(k)}-J_0^{(k)})+t^2(J_2^{(k)}-J_1^{(k)}-2J_0^{(k)})+\cdots=1$$

移项即证.

当 $k=2$ 时，$(J_n^{(2)})_{n\geqslant 0}$ 发生函数为 $\frac{1}{1-t-2t^2}$. 2-Jacobsthal序列为经典的 Jacobsthal[3] 序列. 当 $k=3$ 时，$(J_n^{(3)})_{n\geqslant 0}$ 的发生函数为 $\frac{1}{1-t-2t^2-t^3}$.

收稿日期：2020-11-13
基金项目：国家自然科学基金(11861045)
通讯作者：杨胜良(1963-)，男，甘肃静宁人，教授.
Email:slyang@lut.edu.cn

2-Jacobsthal序列和 3-Jacobsthal 序列 OEIS 中的序列号分别是 A001045 和 A002478.

本文研究了两类格路的计数问题，得到了两个 Riordan 矩阵，它们的行和或上对角线的和等于 k-Jacobsthal 数.从而给出了 k-Jacobsthal 数的组合解释.以下给出本文用到的有关 Riordan 矩阵的概念.

定义 2[4-7]　设 $\boldsymbol{D}=(d_{n,k})_{n,k\geqslant 0}$ 是无限下三角矩阵.若 $\boldsymbol{D}$ 的第 k 列发生函数为 $g(t)f(t)^k$.则称 $\boldsymbol{D}$ 为 Riordan 矩阵，其中 $g(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n t^n$，$f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n t^n$ 是形式幂级数，并且 $g(0)=1$，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$. Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的一般项为 $d_{n,k}=[t^n]g(t)f(t)^k$，这里 $[t^n]g(t)f(t)^k$ 为 $g(t)f(t)^k$ 中 t^n 的系数. 则记 $\boldsymbol{D}=(g(t),f(t))$.

所有的 Riordan 矩阵的集合在其乘法法则下构成一个群.Riordan 群的乘法法则如下：

$$(g(t),f(t))(h(t),l(t))=$$
$$(g(t)h(f(t)),l(f(t)))$$

引理 1[8-10]　设 $\boldsymbol{D}=(g(t),f(t))$ 是 Riordan 矩阵，并且 $\boldsymbol{V}$ 是列向量，$v(t)$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的发生函数.则它们的乘积的发生函数为 $g(t)v(f(t))$.

当 $v(t)=\dfrac{1}{1-t}$ 时，得到 $\boldsymbol{D}=(g(t),f(t))$ 的行和的发生函数为 $\dfrac{g(t)}{1-f(t)}$.

引理 2[11]　一个无限下三角矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{n,k})_{n,k\geqslant 0}$ 是一个 Riordan 矩阵 $(g(t),f(t))$ 当且仅当存在另一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_{i,j})_{i,j\geqslant 0}$ 其中 $(a_{0,0}\neq 0)$ 和 s 个序列 $\{\rho_j^{[i]}\}_{j\geqslant 0}$ $i=1,2,\cdots,s$，使得

$$d_{n+1,k+1}=\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0}\alpha_{i,j}d_{n-i,k+j}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j\geqslant 0}\rho_j^{[i]}d_{n+i,k+i+j+1}$$

那么矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_{i,j})_{i,j\geqslant 0}$ 叫做 Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{n,k})_{n,k\geqslant 0}$ 的 $\boldsymbol{A}$-矩阵.若 $\Phi^{[i]}(t)$ 表示 $\boldsymbol{A}$-矩阵的第 i 行的发生函数.$\Psi^{[i]}(t)$ 表示序列 $\{\rho_j^{[i]}\}_{j\geqslant 0}$ 的发生函数，则 $f(t)$ 可以表示为

$$f(t)=\sum_{i\geqslant 0}t^{i+1}\Phi^{[i]}(f(t))+$$
$$\sum_{i=1}^{s}t^{1-i}f(t)^{i+1}\Psi^{[i]}(f(t))$$

若 Riordan 矩阵 $(d_{n,k})_{n,k\geqslant 0}=(g(t),f(t))$ 的第 0 列定义如下，

$$d_{n+1,0}=\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0}b_{i,j}d_{n-i,j}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j\geqslant 0}\sigma_j^{[i]}d_{n+i,i+j}\quad n\geqslant 0$$

则

$$g(t)=\frac{d_{0,0}}{1-\sum\limits_{i\geqslant 0}t^{i+1}R^{[i]}(f(t))-\sum\limits_{i=1}^{s}t^{1-i}f(t)^i S^{[i]}(f(t))}$$

式中

$$R^{[i]}(t)=\sum_{j\geqslant 0}b_{i,j}t^j\qquad i=0,1,2,\cdots$$
$$S^{[i]}(t)=\sum_{j\geqslant 0}\sigma_j^{[i]}t^j\qquad i=0,1,2,\cdots$$

定义 3[12]　设 $\boldsymbol{D}$ 是 Riordan 矩阵，若满足：

$$b_k=\sum_{j=0}^{k}d_{k-j,j}$$

则称 b_k 是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的上对角和.

引理 3[12]　设 $\boldsymbol{D}=(g(t),f(t))$ 是 Riordan 矩阵.且 $(b_k)_{k\geqslant 0}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的上对角和序列.则 $(b_k)_{k\geqslant 0}$ 的发生函数为 $\dfrac{g(t)}{1-tf(t)}$.

1　k-Jacobsthal 数第一个组合解释

定义 4　从 $(0,0)$ 到 (n,m) 允许的步伐集合为 $\mathbf{S}_k:=\{H=(1,0),\bar{V}=(0,2),D_1=(1,1),D_2=(1,2),\cdots,D_{k-1}=(1,k-1)\}$ 的格路的集合则记为 $\mathbf{G}_k(n,m)$.并且集合 $\mathbf{G}_k(n,m)$ 的基数则记为 $g_k(n,m)$，即 $g_k(n,m)=|\mathbf{G}_k(n,m)|$.

例 1　当 $k=2$，$n=2$，$m=3$ 时，从 $(0,0)$ 到 $(2,3)$ 允许的步伐集合为 $\mathbf{S}_2:=\{H=(1,0),\bar{V}=(0,2),D_1=(1,1)\}$ 的格路的集合 $\mathbf{G}_2(2,3)$.图 1 给出了集合 $\mathbf{G}_2(2,3)$ 中的 6 个格路.

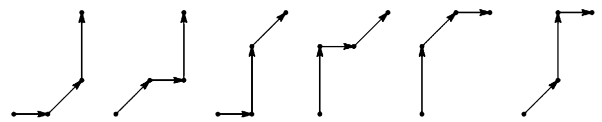

图 1　$\mathbf{G}_2(2,3)$ 中的 6 个格路

Fig.1　6 lattice paths in $\mathbf{G}_2(2,3)$

由于 $\mathbf{G}_k(n,m)$ 任何格路的最后一步来自于 $\mathbf{S}_k$ 中之一，故有递推关系式如下形式：

$$g_k(n,m)=g_k(n-1,m)+g_k(n,m-2)+$$
$$g_k(n-1,m-1)+\cdots+$$
$$g_k(n-1,m-(k-1))\qquad(3)$$

式中：$n\geqslant 1$，$m\geqslant k-1$.且初值为 $g_k(n,0)=1$，

$$g_k(0,m)=\begin{cases}0 & m\text{ 为奇数}\\ 1 & m\text{ 为偶数}\end{cases}.$$

例 2　当 $k=2$ 时，图 2 中点 (n,m) 上的数字代表 $g_2(n,m)$ 从 $(0,0)$ 到 (n,m) 允许的步集 $\mathbf{S}_2:=\{H=(1,0),\bar{V}=(0,2),D_1=(1,1)\}$ 的格路的数目.其中 $n,m\geqslant 0$.$g_2(n,m)$ 中的递推关系可由图 2 中的

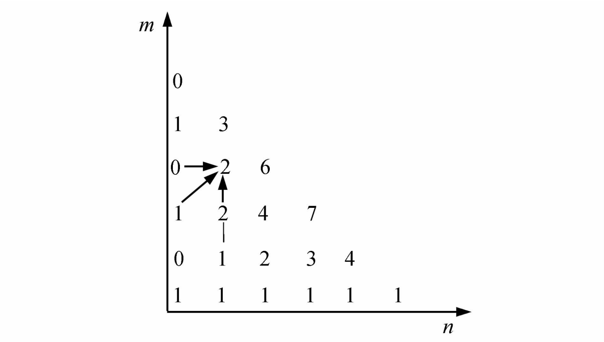

图 2 点(n,m)上的数字代表 $g_2(n,m)$

Fig.2 The number on the (n,m) represents $g_2(n,m)$

箭头表示.

设 $G_n^{(k)}(t)$为序列$(g_k(n,m))_{m\geqslant 0}$的发生函数.

$$G_n^{(k)}(t)=\sum_{i\geqslant 0} g_k(n,i)t^i$$

定理 2 $G_n^{(k)}(t)$的显式表达式为

$$G_n^{(k)}(t)=\frac{(1+t+t^2+t^3+\cdots+t^{k-1})^n}{(1-t^2)^{n+1}} \qquad (4)$$

证明 通过递推关系(3)有

$$G_n^{(k)}(t)=G_{n-1}^{(k)}(t)+t^2G_n^{(k)}(t)+tG_{n-1}^{(k)}(t)+\cdots+t^{k-1}G_{n-1}^{(k)}(t)$$

从而

$$G_n^{(k)}(t)=\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{k-1}}{1-t^2}G_{n-1}^{(k)}(t)$$

因为

$$G_0^{(k)}(t)=\sum_{i\geqslant 0} g_k(0,i)t^i=\frac{1}{1-t^2}.$$

递归有

$$G_n^{(k)}(t)=\left(\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{k-1}}{1-t^2}\right)^n G_0^{(k)}(t)$$

代入即证.

定理 3 $g_k(n,m)$表示成以下形式:

$$g_k(n,m)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{u=0}^{p}(-1)^{\frac{u}{k}}\begin{bmatrix} n \\ u/k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-1+p-u \\ n-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+\frac{m-p}{2} \\ n \end{bmatrix}$$

当$\frac{m-p}{2}$不是整数时,$\begin{bmatrix} n+\frac{m-p}{2} \\ n \end{bmatrix}=0$,当$\frac{u}{k}$不是整数时,$\begin{bmatrix} n \\ u/k \end{bmatrix}=0$.

证明 取 t^m 前的系数可得

$$g_k(n,m)=[t^m]G_n^{(k)}(t)=[t^m]\frac{(1+t+t^2+\cdots+t^{k-1})^n}{(1-t^2)^{n+1}}=[t^m](1-t^k)^n(1-t)^{-n}(1-t^2)^{-n-1}$$

由卷积公式得

$$[t^p](1-t^k)^n(1-t)^{-n}=\sum_{u=0}^{p}\left([t^u]\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}(-t^k)^i\right)\times\left([t^{p-u}]\sum_{j\geqslant 0}\begin{bmatrix} n-1+j \\ n-1 \end{bmatrix}t^j\right)=\sum_{u=0}^{p}(-1)^{\frac{u}{k}}\begin{bmatrix} n \\ u/k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-1+p-u \\ n-1 \end{bmatrix}$$

故有

$$[t^m](1-t^k)^n(1-t)^{-n}(1-t^2)^{-n-1}=\sum_{p=0}^{m}([t^p](1-t^k)^n(1-t)^{-n}\times\left([t^{m-p}]\sum_{q\geqslant 0}\begin{bmatrix} n+q \\ q \end{bmatrix}t^{2q}\right)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{u=0}^{p}(-1)^{\frac{u}{k}}\begin{bmatrix} n \\ u/k \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} n-1+p-u \\ n-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n+\frac{m-p}{2} \\ n \end{bmatrix}$$

定义 5 利用 $g_k(n,m)$意义下的三角形得 $\boldsymbol{R}_k:=(r_k(n,m))_{n,m\geqslant 0}$如下:

$$r_k(n,m)=\begin{bmatrix} g_k(m,n-m) & n\geqslant m \\ 0 & n<m \end{bmatrix}$$

例 3 当 $k=2$ 时,$\boldsymbol{R}_2:=(r_2(n,m))_{n,m\geqslant 0}$的部分元素如下:

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

定理 4 $\boldsymbol{R}_k$ 可以表示成以下的 Riordan 矩阵的形式:

$$\boldsymbol{R}_k=\left(\frac{1}{1-t^2},t\,\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{k-1}}{1-t^2}\right) \qquad (5)$$

证明 对 $\boldsymbol{R}_k$ 的(n,m)项取 t^n 前的系数

$$[t^n]\frac{1}{1-t^2}\left(t\,\frac{1+t+t^2+t^3+\cdots+t^{k-1}}{1-t^2}\right)^m=[t^{n-m}]G_m^{(k)}(t)=g_k(m,n-m)=r_k(n,m)$$

定理 5 设 $F_k(t)$为 Riordan 矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 的行和的发生函数,则

$$F_k(t)=\frac{1}{1-t-2t^2-t^3-\cdots-t^k} \qquad (6)$$

证明 由引理 1 Riordan 矩阵与列向量的乘积的发生函数有

$$F_k(t)=\frac{1}{1-t^2}\,\frac{1}{1-t\,\frac{1+t+t^2+t^3+\cdots+t^{k-1}}{1-t^2}}$$

化简即证.

对比定理1和定理5可得如下的结果.

定理6 k-Jacobsthal数 $J_n^{(k)}$ 等于Riordan矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 的行和.

例4 当 $k=2$ 时, Riordan矩阵 $\boldsymbol{R}_2$ 的行和

$$1,1,3,5,11,21\cdots$$

故Riordan矩阵 $\boldsymbol{R}_2$ 的行和为2-Jacobsthal数,即经典的Jacobsthal数.

定理7 k-Jacobsthal数可以表示为以下形式:

$$J_n^{(k)}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-i}\sum_{u=0}^{p}(-1)^{\frac{u}{k}}\begin{bmatrix}i\\u/k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i-1+p-u\\i-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}i+\dfrac{n-i-p}{2}\\i\end{bmatrix}\qquad(7)$$

当 $\dfrac{n-i-p}{2}$ 不是整数时, $\begin{bmatrix}i+\dfrac{n-i-p}{2}\\i\end{bmatrix}=0$, 当 $\dfrac{u}{k}$ 不是整数时, $\begin{bmatrix}i\\u/k\end{bmatrix}=0$.

证明 因定理3 $g_k(i,n-i)$ 的表达式,故

$$J_n^{(k)}=\sum_{i=0}^{n}r_k(n,i)=\sum_{i=0}^{n}g_k(i,n-i)$$

把 $g_k(i,n-i)$ 代入即证.

利用Riordan矩阵的行和与格路的计数给出 k-Jacobsthal数的第一个组合解释.

定理8 k-Jacobsthal数 $J_n^{(k)}$ 是从 $(0,0)$ 到 $(n-i,i)$ 对 $i=0,1,2,3,\cdots,n$ 允许的步伐集合为 $\mathbf{S}_k:=\{H=(1,0),\bar{V}=(0,2),D_1=(1,1),D_2=(1,2),\cdots,D_{k-1}=(1,k-1)\}$ 的格路的数目.

2 k-Jacobsthal数第二个组合解释

定义6 从 $(0,0)$ 到 $(n,2m-n)$ 允许的步集 $\bar{\mathbf{S}}_k=\{C_1=(1,1),C_2=(2,0),C_3=(3,-1),\cdots,C_{k-1}=(k-1,-k+3),U_1=(1,-1),U_2=(2,-2)\}$ 的格路的集合记为 $\mathbf{A}_{n,m}^{(k)}$.并且集合 $\mathbf{A}_{n,m}^{(k)}$ 的基数记为 $a_{n,m}^{(k)}$,即 $a_{n,m}^{(k)}=|\mathbf{A}_{n,m}^{(k)}|$.

例5 当 $k=2,n=3,m=2$ 时,从 $(0,0)$ 到 $(3,1)$ 允许的步伐集合 $\{C_1=(1,1),U_1=(1,-1),U_2=(2,-2)\}$ 的格路的集合 $\mathbf{A}_{3,2}^{(2)}$.图3给出了集合 $\mathbf{A}_{3,2}^{(2)}$ 中的3个格路.

设 $\boldsymbol{A}^{(k)}=(a_{n,m}^{(k)})_{n,m\geqslant 0}=(g(t),f(t))$.

定理9 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 的Riordan矩阵的形式为

$$\boldsymbol{A}^{(k)}=\left(\frac{1}{1-t-t^2},t\,\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{k-2}}{1-t-t^2}\right)$$

证明 因为 $\mathbf{A}_{n,m}^{(k)}$ 的任何格路的最后一步来自

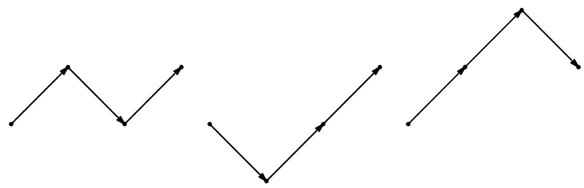

图3 $\mathbf{A}_{3,2}^{(2)}$ 中的3个格路

Fig.3 3 lattice paths in $\mathbf{A}_{3,2}^{(2)}$

于 $\bar{\mathrm{S}}_k$ 中之一,所以可得 $a_{n,m}^{(k)}$ 的递推关系式:

$$\begin{cases}a_{n+1,m+1}^{(k)}=a_{n,m}^{(k)}+a_{n-1,m}^{(k)}+\cdots+a_{n-k+2,m}^{(k)}+\\\qquad a_{n,m+1}^{(k)}+a_{n-1,m+1}^{(k)}\\a_{n+1,0}^{(k)}=a_{n,0}^{(k)}+a_{n-1,0}^{(k)}\end{cases}$$

由引理2可以得到矩阵 $\boldsymbol{A}^{(k)}$ 对应的 $\rho_j^{[i]}=0$,对 $i=1,2,3,\ldots,s$, $\Phi^{[0]}(t)=\Phi^{[1]}(t)=1+t$,并且又因 $\Phi^{[2]}(t)=\Phi^{[3]}(t)=\cdots=\Phi^{[k-2]}(t)=1$, $\Psi^{[i]}(t)=0$,对 $i=1,2,3,\ldots,s$,故有

$$f(t)=t(1+f(t))+t^2(1+f(t))+t^3+\cdots+t^{k-1}$$

从而

$$f(t)=t\,\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{k-2}}{1-t-t^2}$$

同理得 $\sigma_j^{[i]}=0$, $R^{[0]}(t)=R^{[1]}(t)=1$.故

$$g(t)=\frac{1}{1-t-t^2}$$

即证.

例6 当 $k=2$ 时,从 $(0,0)$ 到 $(n,2m-n)$ 允许的步伐集合为 $\bar{\mathrm{S}}_2:=\{C_1=(1,1),U_1=(1,-1),U_2=(2,-2)\}$ 的格路的集合为 $\mathbf{A}_{3,2}^{(2)}$ 并且 $a_{n,m}^{(2)}=|\mathbf{A}_{3,2}^{(2)}|$.则Riordan矩阵 $\mathbf{A}^{(2)}=(a_{n,m}^{(2)})_{n,m\geqslant 0}$ 的部分元素如下:

$$\mathbf{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&0&\cdots\\2&2&1&0&0&\cdots\\3&5&3&1&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

故有

$$\mathbf{A}^{(2)}=\left(\frac{1}{1-t-t^2},t\,\frac{1}{1-t-t^2}\right)$$

当 $k=3$ 时,

$$\mathbf{A}^{(3)}=(a_{n,m}^{(3)})_{n,m\geqslant 0}=\left(\frac{1}{1-t-t^2},t\,\frac{1+t}{1-t-t^2}\right)$$

定理10 $a_{n,m}^{(k)}$ 可以表示为以下形式:

$$a_{n,m}^{(k)}=$$

$$\sum_{p=0}^{n-m}\left[\sum_{u=0}^{p}(-1)^{\frac{u}{k-1}}\begin{bmatrix}m\\u/(k-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m-1+p-u\\m-1\end{bmatrix}\right]$$

$$\times \left(\sum_{j\geqslant 0}\begin{bmatrix} m+j \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ n-m-p-j \end{bmatrix}\right)$$

当 $\frac{u}{k-1}$ 不是整数时，$\begin{bmatrix} m \\ u/(k-1) \end{bmatrix}=0$.

证明　取 t^n 前的系数有

$$a_{n,m}^{(k)}=[t^n]\frac{1}{1-t-t^2}\left(t\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{k-2}}{1-t-t^2}\right)^m=$$
$$[t^{n-m}](1-t^{k-1})^m(1-t)^{-m}(1-t-t^2)^{-m-1}$$

由卷积公式有

$$[t^p]\left(\frac{1-t^{k-1}}{1-t}\right)^m=\sum_{u=0}^{p}(-1)^{\frac{u}{k-1}}\begin{bmatrix} m \\ u/(k-1) \end{bmatrix}\times \begin{bmatrix} m-1+p-u \\ m-1 \end{bmatrix}$$

且

$$[t^{n-m-p}](1-t-t^2)^{-m-1}=$$
$$[t^{n-m-p}]\sum_{j\geqslant 0}\begin{bmatrix} m+j \\ j \end{bmatrix}t^j(1+t)^j=$$
$$\sum_{j\geqslant 0}\begin{bmatrix} m+j \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ n-m-p-j \end{bmatrix}$$

代入卷积公式得证.

定理 11　设 $L^{(k)}(t)$ 是 Riordan 矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}$ 上对角和的发生函数，则

$$L^{(k)}(t)=\frac{1}{1-t-2t^2-t^3-\cdots-t^k}$$

证明　由引理 3 有

$$L^{(k)}(t)=\frac{1}{1-t-t^2}\frac{1}{1-t^2\frac{1+t+t^2+\cdots+t^{k-2}}{1-t-t^2}}$$

化简即得公式.

对比定理 1 和定理 11 有如下结果.

定理 12　k-Jacobsthal 数 $J_n^{(k)}$ 等于 Riordan 矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}$ 上对角和.

例 7　当 $k=2$ 时，Riordan 矩阵 $\mathbf{A}^{(2)}$ 的上对角和为 1，1，3，5，11，21，….故 $\mathbf{A}^{(2)}$ 上对角和等于经典的 Jacobsthal 数.

定理 12 给出了 k-Jacobsthal 数与 Riordan 矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}$ 上对角和的关系.

$$J_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}a_{n-j,j}^{(k)}$$

故运用 Riordan 矩阵的上对角和与格路的计数给出 k-Jacobsthal 数的第二个组合解释.

定理 13　k-Jacobsthal 数 $J_n^{(k)}$ 是从 $(0,0)$ 到 $(n-j,3j-n)$ 对于 $j=0,1,2,3,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，允许的步伐集合为 $\bar{S}_k=\{C_1=(1,1),C_2=(2,0),\cdots,C_{k-1}=(k-1,-k+3),U_1=(1,-1),U_2=(2,-2)\}$ 的格路的数目.

例 8　当 $k=3$，$n=3$ 时，$j=0$ 是从 $(0,0)$ 到 $(3,-3)$ 允许的步伐集合为 $\bar{S}_3:=\{C_1=(1,1),C_2=(2,0),U_1=(1,-1),U_2=(2,-2)\}$ 的格路的数目与 $j=1$ 是从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 允许的步集为 $\bar{S}_3:=\{C_1=(1,1),C_2=(2,0),U_1=(1,-1),U_2=(2,-2)\}$ 的格路的数目之和.满足条件的格路如图 4 所示.故可得 3-Jacobsthal 数 $J_3^{(3)}=6$.

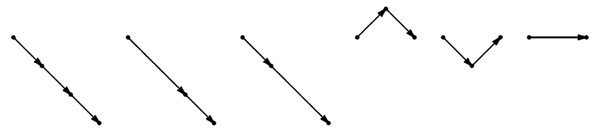

图 4　$\mathrm{A}_{3-j,j}^{(2)}$ 对 $j=0,1$ 中的 6 个格路

Fig.4　6 lattice paths in $\mathrm{A}_{3-j,j}^{(2)}$ for $j=0,1$

参考文献：

[1]　KOMATSU T，RAMIREZ J L，SIRVENT V F. Multi-poly-Bernoulli numbers and polynomials with a parameter [J].Lithuanian Mathematical Journal，2017，57(4)：490-505.

[2]　KOMATSU T，RAMIREZ J L.Generalized poly-Cauchy and poly-Bernoulli numbers by using incomplete r-Stirling numbers [J].Aequationes Mathematicae，2017，91：1055-1071.

[3]　HORADAM A F.Jacobsthal representation numbers [J].The Fibonacci Quarterly，1996，34(1)：40-54.

[4]　YANG S L，DONG Y N，YANG L，*et al*.Half of a Riordan array and restricted lattice paths [J].Linear Algebra and its Applications，2018，537：1-11.

[5]　YANG S L，Gao Y Y.The Pascal rhombus and Riordan arrays [J]. The Fibonacci Quarterly，2018，56：337-347.

[6]　SHAPIRO L W，GETU S，WOAN W J，*et al*.The Riordan group [J]. Discrete Applied Mathematics，1991，34(3)：229-239.

[7]　YANG S L，XU Y X，HE T X.(m,r)-Central Riordan arrays and their applications [J].Czechoslovak Mathematical Journal，2017，67(142)：919-936.

[8]　YANG S L，ZHENG S N，YUAN S P，*et al*.Schröder matrix as inverse of Delannoy matrix [J].Linear Algebra and its Applications，2013，439：3605-3614.

[9]　YANG L，YANG S L.A relation between Schröder paths and Motzkin paths [J].Graphs and Combinatorics，2020，36：1489-1502.

[10]　RAMIREZ J L，SIRVENT V F. Generalized Schröder matrix and its combinatorial interpretation [J]. Linear Multilinear and Algebra，2018，66(2)：418-433.

[11]　MERLINI D，ROGERS D G，SPRUGNOLI R，*et al*.On some alternative characterizations of Riordan arrays [J]. Canadian Journal of Mathematics，1997，49(2)：301-320.

[12]　KWANTA A，SHAPIRO L W.Pell walks and Riordan matrices [J].The Fibonacci Quarterly，2005，43(2)：170-180.