基于微分变换法的变截面压杆临界载荷分析*

杨文秀，滕兆春**

(兰州理工大学理学院，甘肃 兰州 730050)

摘要:通过细长压杆挠曲近似微分方程理论,建立了变截面压杆失稳控制微分方程.该方程为4阶变系数常微分方程,其解析解不易得到,采用微分变换法(DTM)进行数值求解.将变截面压杆的控制微分方程和边界条件进行无量纲化,采用DTM将变截面压杆的无量纲控制微分方程和边界条件转换为包含临界载荷的代数特征方程,通过编程计算数值,给出4种不同边界条件下变截面压杆的临界载荷值与截面变化系数之间的关系曲线.结果表明:不同边界条件下变截面压杆的临界载荷均随截面变化系数的增大而增大,即变截面杆的稳定性较好;同时也表明DTM对求解此类问题过程简单且精度较高.

关键词:变截面;压杆;临界载荷;数值解;微分变换法

中图分类号:O343 **DOI**:10.19789/j.1004-9398.2021.05.006

0 引 言

压杆的临界载荷是衡量压杆承载能力的重要指标.关于受压弹性杆件及其稳定性[1-2]的相关研究,大多是针对等截面均质材料压杆进行[3-5].随着科学技术的进步和设计理念的更新,多样化、美观化和经济化的变截面杆已开始在工程中大量使用[6],工程人员根据杆件不同部位的受力情况或结构需要,进而设计出不同大小的截面,以确保其具有良好的承载能力,如在实际工程中已广泛使用的高压输电塔、通讯信号塔、火力发电烟囱、机翼和水坝等,都采用了变截面的设计理念,也吸引很多学者对其力学特性进行研究[7-8].在结构稳定性问题中,等截面压杆临界载荷的求解已有Euler公式或经验公式可以使用,而在变截面压杆稳定性问题中,由于其控制微分方程为4阶变系数常微分方程,要得到相应的解析解较为困难,因此,一般采用近似方法进行求解.马宝平等[6]采用改进的WKB(Wenzel-Kramers-Brillouin)法,推导了两端简支边界条件下变截面压杆相应的积分表达式,从而得到若干不同变截面压杆临界载荷的数值解,并与有限差分法的结果进行对比,验证了方法的可靠性;洪振德[9]基于驻势能值原理,利用能量法推出了两端简支变截面压杆稳定临界载荷的计算公式;侯祥林等[10]针对不同约束条件下,变截面压杆稳定性临界载荷的计算问题,结合非线性微分方程数值算法及最优化方法,再根据边界条件满足的函数关系与位型条件构造目标函数,给出一种变截面压杆临界载荷和稳定位型的优化求解算法;楼梦麟和李建元[11]依据Ritz展开原理,采用模态摄动法建立了求解变截面压杆临界力的半解析解方法,并给出不同截面变化情况下,计算两端简支压杆临界载荷的数值算例.通过分析已有文献可知,变截面压杆临界载荷的计算大多采用有限单元法、有限差分法、能量法、模态摄动法和传递矩阵法等.这些方法中,有的需要较为复杂的前处理或公式推导,有的则对边界条件的处理较为单一,很难全面地解决工程中各种不同约束的变截面压杆.

本文引入一种半解析方法——微分变换法(differential transformation method,DTM)对变截面压杆稳定的临界载荷进行分析求解,其过程相比其他方法简单且精度较高,也适合编程计算[12-14].DTM是一种基于Taylor级数的函数变换,不仅能将线性微分方程变换为代数方程进行求解,而且还能将非线性的微分方程变换成代数方程求解,因而是一种非常实用且颇有价值的方法[15].目前,国内外

收稿日期:2020-12-08

* 兰州理工大学校级高等教育研究课题(GJ2019C-21)

** 通信作者:tengzc@lut.edu.cn

还未见采用DTM分析变截面压杆稳定性的相关报道,因此,本文采用DTM分析变截面压杆临界载荷问题.根据微段受力及静力平衡关系,建立变截面压杆稳定性的控制微分方程,并将控制微分方程和边界条件进行无量纲化.采用DTM将无量纲化后的控制微分方程和边界条件进行微分变换,得到包含无量纲临界载荷的代数特征方程.通过编程计算得出4种不同边界条件下,变截面压杆的临界载荷,并给出变截面压杆的临界载荷值与截面变化系数之间的关系曲线.

1 DTM

DTM是一种基于Taylor级数,以多项式形式逼近精确解的方法,常用来求解微分方程或微分方程组.对于变系数微分方程所描述的变参数系统和非线性微分方程所描述的非线性系统,也可以采用DTM进行有效求解.经DTM变换,可将原微分方程(组)和问题边界条件转换为适合计算机编程的代数方程(组).原函数$f(x)$经过微分变换为$F[k]$的定义为[12,14]

$$F[k]=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k}, \tag{1}$$

逆变换为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(x-x_i)^k F[k]. \tag{2}$$

由式(1)和(2)可得

$$f(x)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_i)^k}{k!}\left[\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right]_{x=x_i}. \tag{3}$$

由式(3)可知,微分变换法是基于Taylor级数的展开式,但DTM不需要对函数的各阶导数都进行求解.当$m\to\infty$时,

$$f(x)=\sum\nolimits_{k=m+1}^{\infty}\frac{(x-x_i)^k}{k!}\left[\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right]_{x=x_i}\approx 0. \tag{4}$$

$f(x)$可以采取有限项的级数表示,即

$$f(x)=\sum\nolimits_{k=0}^{m}\frac{(x-x_i)^k}{k!}\left[\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right]_{x=x_i}. \tag{5}$$

2 变截面压杆的控制微分方程及DTM变换

2.1 控制微分方程及边界条件

考虑一个只在xy平面内失稳的细长矩形变截面压杆(图1).压杆的长度为L、宽度为b且保持不变,假设其高度(h)呈线性变化,并给定x截面处的高度为

$$h(x)=h_0(1+\beta\frac{x}{L}), \tag{6}$$

式中h_0为压杆左端的初始高度,β为截面变化系数.

压杆左端初始面积为$A_0=bh_0$,则x处的面积为

$$A(x)=A_0(1+\beta\frac{x}{L}). \tag{7}$$

矩形截面左端初始惯性矩为$I_0=bh_0^3/12$,则x截面惯性矩为

$$I(x)=I_0(1+\beta\frac{x}{L})^3. \tag{8}$$

选取变截面压杆的微段$\mathrm{d}x$进行分析,忽略横向剪切变形,并根据材料力学中基于欧拉梁理论的挠曲线近似微分方程和静力平衡关系[3],可得变截面压杆稳定性的控制微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[EI(x)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right]+F\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}=0, \tag{9}$$

式中w为压杆的横向位移,也称为挠度;F为轴向压载荷;E为压杆材料的弹性模量.

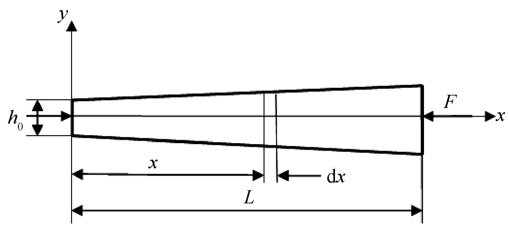

图1 变截面受压杆件示意

引入无量纲量

$$\xi=\frac{x}{L},\ W=\frac{w}{L},\ \lambda_{\mathrm{cr}}=\frac{FL^2}{EI_0}, \tag{10}$$

得到变截面压杆稳定性的无量纲控制微分方程为

$$(1+\beta\xi)^3\frac{\mathrm{d}^4 W(\xi)}{\mathrm{d}\xi^4}+6\beta(1+\beta\xi)^2\frac{\mathrm{d}^3 W}{\mathrm{d}\xi^3}+\left[6\beta^2(1+\beta\xi)+\lambda_{\mathrm{cr}}\right]\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\xi^2}=0. \tag{11}$$

变截面压杆稳定性问题考虑简支(S)、固定(C)和自由(F)3种情况.无量纲化的边界条件形式分别为:

$\xi=0$处,

简支(S): $$W\big|_{\xi=0}=0,\ \frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\xi^2}\Big|_{\xi=0}=0, \tag{12}$$

固定(C): $$W\big|_{\xi=0}=0,\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}\Big|_{\xi=0}=0, \tag{13}$$

$$\text{自由(F)}: \left.\frac{d^2W}{d\xi^2}\right|_{\xi=0}=0, \left.\frac{d^3W}{d\xi^3}\right|_{\xi=0}+\lambda_{cr}\left.\frac{dW}{d\xi}\right|_{\xi=0}=0. \quad (14)$$

$\xi=1$处,

$$\text{简支(S)}: \quad W|_{\xi=1}=0, \left.\frac{d^2W}{d\xi^2}\right|_{\xi=1}=0, \quad (15)$$

$$\text{固定(C)}: \quad W|_{\xi=1}=0, \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_{\xi=1}=0. \quad (16)$$

2.2 控制微分方程及边界条件的DTM变换

根据DTM定义及其基本变换关系[15]将式(8)变换为迭代式

$$A_0\bar{F}[k+4]+A_1\bar{F}[k+3]+A_2\bar{F}[k+2]+A_3\bar{F}[k+1]=0, (k=0,1,2,3,\cdots,). \quad (17)$$

式(17)也可以改写为

$$\bar{F}[k+4]=-\frac{A_1}{A_0}\bar{F}[k+3]-\frac{A_2}{A_0}\bar{F}[k+2]-\frac{A_3}{A_0}\bar{F}[k+1], \quad (18)$$

式中$\bar{F}$表示变量W的微分变换形式.各系数的表达式分别为:

$A_0=(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$,

$A_1=(3\beta k+6\beta)(k+1)(k+2)(k+3)$,

$A_2=\left[3\beta^2(k-1)k+12\beta^2k+6\beta^2+\lambda_{cr}\right]\times(k+1)(k+2)$,

$A_3=\left[\beta^3(k-2)(k-1)k+6\beta^3(k-1)k+6\beta^3k\right]\times(k+1)$.

S、C和F这3种情况边界条件经DTM变换后分别为:

$\xi=0$处,

$$\text{简支(S)}: \quad \bar{F}[0]=0, \bar{F}[2]=0, \quad (19)$$

$$\text{固定(C)}: \quad \bar{F}[0]=0, \bar{F}[1]=0, \quad (20)$$

$$\text{自由(F)}: \quad \bar{F}[2]=0, \bar{F}[3]+\frac{\lambda_{cr}}{6}\bar{F}[1]=0. \quad (21)$$

$\xi=1$处,

$$\text{简支(S)}: \sum\nolimits_0^\infty\bar{F}[k]=0, \sum\nolimits_0^\infty k(k-1)\bar{F}[k]=0, \quad (22)$$

$$\text{固定(C)}: \quad \sum\nolimits_0^\infty\bar{F}[k]=0, \sum\nolimits_0^\infty k\bar{F}[k]=0. \quad (23)$$

求解两端简支(S-S)、一端简支一端固定(S-C)时,将式(18)分别代入式(19)和(22)、式(19)和(23),设$\bar{F}[1]=c1$,$\bar{F}[3]=c2$,得到含有无量纲临界载荷(λ_{cr})的特征方程如下:

$$\begin{aligned} X_{11}^n(\lambda_{cr})\bar{F}[1]+X_{12}^n(\lambda_{cr})\bar{F}[3]=0,\\ X_{21}^n(\lambda_{cr})\bar{F}[1]+X_{22}^n(\lambda_{cr})\bar{F}[3]=0, \end{aligned} \quad (24)$$

式中$X_{ij}^n(i,j=1,2)$是迭代n次求出的含有λ_{cr}的多项式,将其简化为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} X_{11}^{(n)}(\lambda_{cr}) & X_{12}^{(n)}(\lambda_{cr}) \\ X_{21}^{(n)}(\lambda_{cr}) & X_{22}^{(n)}(\lambda_{cr}) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{F}[1]\\ \bar{F}[3]\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}. \quad (25)$$

要使式(25)存在非零解,则

$$\begin{vmatrix} X_{11}^{(n)}(\lambda_{cr}) & X_{12}^{(n)}(\lambda_{cr}) \\ X_{21}^{(n)}(\lambda_{cr}) & X_{22}^{(n)}(\lambda_{cr}) \end{vmatrix}=0. \quad (26)$$

求解两端固定(C-C)时,将式(18)分别代入式(20)和(23),设$\bar{F}[2]=c1$, $\bar{F}[3]=c2$,同理,可得出含有λ_{cr}特征方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} Y_{11}^{(n)}(\lambda_{cr}) & Y_{12}^{(n)}(\lambda_{cr}) \\ Y_{21}^{(n)}(\lambda_{cr}) & Y_{22}^{(n)}(\lambda_{cr}) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{F}[2]\\ \bar{F}[3]\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}. \quad (27)$$

要使式(27)存在非零解,则

$$\begin{vmatrix} Y_{11}^{(n)}(\lambda_{cr}) & Y_{12}^{(n)}(\lambda_{cr}) \\ Y_{21}^{(n)}(\lambda_{cr}) & Y_{22}^{(n)}(\lambda_{cr}) \end{vmatrix}=0. \quad (28)$$

求解一端自由一端固定(F-C)时,将式(18)代入式(21)和(23)中,假设$\bar{F}[0]=c1$,$\bar{F}[1]=c2$,$\bar{F}[3]=-\frac{\lambda_{cr}}{6}c2$,可得特征方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} Z_{11}^{(n)}(\lambda_{cr}) & Z_{12}^{(n)}(\lambda_{cr}) \\ Z_{21}^{(n)}(\lambda_{cr}) & Z_{22}^{(n)}(\lambda_{cr}) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{F}[0]\\ \bar{F}[1]\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}. \quad (29)$$

要使式(29)存在非零解,则

$$\begin{vmatrix} Z_{11}^{(n)}(\lambda_{cr}) & Z_{12}^{(n)}(\lambda_{cr}) \\ Z_{21}^{(n)}(\lambda_{cr}) & Z_{22}^{(n)}(\lambda_{cr}) \end{vmatrix}=0. \quad (30)$$

通过求解式(26)、(28)和(30)可得出不同边界条件下变截面压杆的λ_{cr}.

3 计算结果及分析

应用MATLAB商用数学软件进行编程[16],可得到式(18)在表示不同边界条件式(19)~(23)下变截面压杆的λ_{cr}.为了验证研究问题数学模型的准确性以及DTM在计算中的有效性与精度,给出了变截面压杆的截面变化系数(β)为0时,也就是将变截面压杆退化到等截面压杆,采用DTM求解不同边界条件下λ_{cr}的数值结果,并将DTM所得数值结果与文献[17]中等截面压杆λ_{cr}的解析解及文献[18,10]的数值结果进行比较(表1).由表1可知,DTM的计算结果相比其他计算方法得出的数值解更接近解析解,

表1 等截面梁的无量纲临界载荷比较

约束类型	解析解[17]	本文解	文献解[18]	文献解[10]
S-S	π^2	9.869 6	9.646 2	—
C-C	$(2\pi)^2$	39.478 4	—	—
S-C	$4.493\,4^2$	20.190 7	—	20.189 2
F-C	$(\pi/2)^2$	2.467 4	—	—

注:—表示无数据;S-S表示两端简支;C-C表示两端固定;S-C表示一端简支一端固定;F-C表示一端自由一端固定.

可见本文计算方法的正确性和可行性,同时也说明DTM具有非常高的计算精度.

截面变化系数(β)在0~0.4范围内,S-S、C-C、S-C和F-C 4种不同边界条件下λ_{cr}与β的关系曲线如图2所示.4种边界条件下压杆的λ_{cr}均随β的增大而增大,并几乎成线性变化,即增大β能提高压杆的稳定性.同时表明,在不同约束强度的边界条件下,λ_{cr}随约束强度的增强而增大,这一点与等截面压杆完全一致.

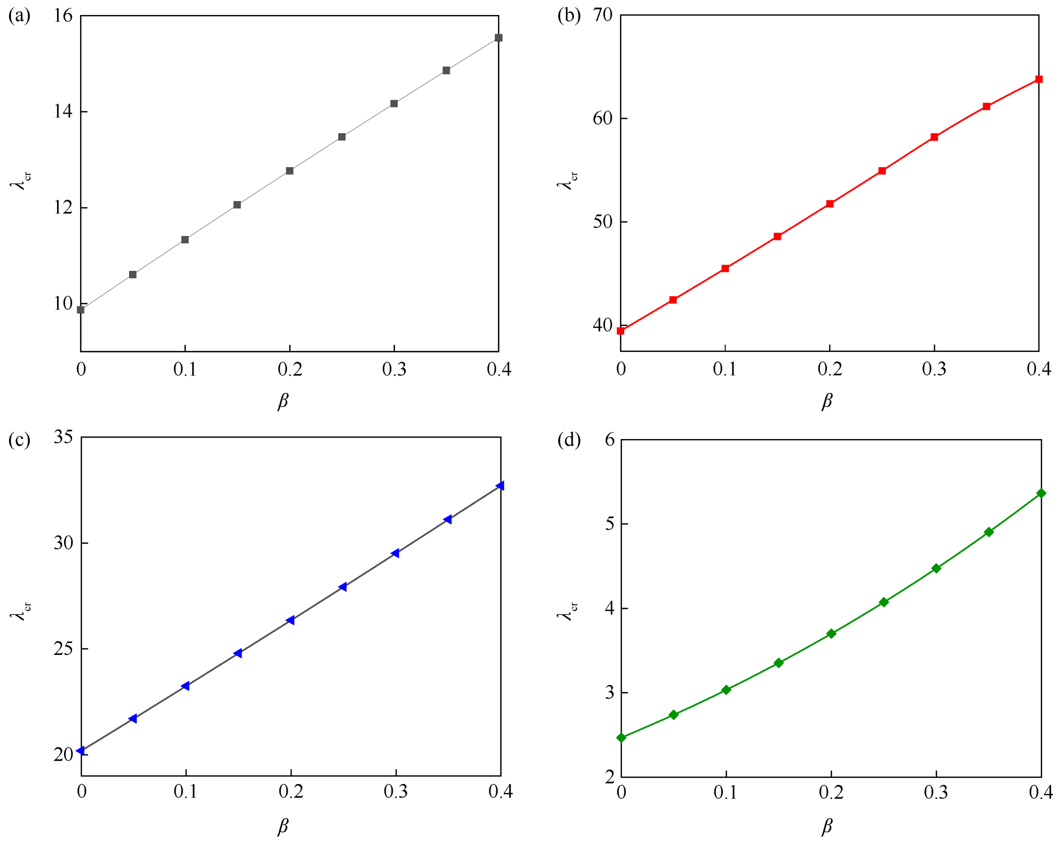

图2　不同边界条件下变截面压杆的无量纲临界载荷与截面变化系数之间的关系曲线

(a) S-S;(b) C-C;(c) S-C;(d) F-C

4　结　论

本文基于细长压杆挠曲近似微分方程理论,建立了变截面压杆失稳时的控制微分方程,并将控制微分方程和边界条件依次进行无量纲化和DTM变换,计算得到不同边界条件下变截面压杆的λ_{cr},并对4种边界条件下λ_{cr}与β的规律进行分析讨论,结论如下:

(1)当$\beta=0$时,将变截面压杆控制微分方程退化到采用DTM求解等截面压杆无量纲临界载荷,并将其数值解与解析解进行对比,发现精度较高.

(2)在同一种类型约束边界条件下,λ_{cr}随β的增大而增大,即增大β能提高压杆的稳定性.

(3)DTM具有非常高的计算精度并且更适合计算机编程求解,该方法可为工程结构中变截面压杆临界载荷的计算和分析提供条件.

参 考 文 献

[1] WANG C M, WANG C Y, REDDY J N. Exact solutions for buckling of structural members[M]. Florida: CRC Press, 2004.
[2] 费志中.弹性稳定[M].北京:煤炭工业出版社,1989.
[3] 刘鸿文.材料力学I[M].5版.北京:高等教育出版社,2011.
[4] HAN L F, CHENG K Q, WU S Y. Application of differential transform method to buckling problems at clamped-free boundary conditions[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 639/640: 2344-2348.
[5] HASSAN A H. Application to differential transformation method for solving systems of differential equations[J]. Applied

Mathematical Modelling,2008,12(12):2552-2559.

[6] 马宝平,郭树起,冯自进.变截面压杆的临界荷载计算[J].石家庄铁道大学学报(自然科学版),2013,26(2):106-110.

[7] 史栋梁.基于应变的变截面机翼天线结构变形重构研究[D].西安:西安电子科技大学,2019.

[8] 侯祥林,马英成,贾连光.一类变截面刚架结构的临界载荷算法研究[J].地震工程与工程振动,2019,39(6):54-61.

[9] 洪振德.变截面压杆稳定临界力能量计算方法[J].江苏建筑,2011(3):28-30.

[10] 侯祥林,胡建强,卢宏峰,等.变截面压杆稳定非线性微分方程边值问题的最优化算法研究[J].计算力学学报,2017,34(2):137-142.

[11] 楼梦麟,李建元.变截面压杆稳定问题半解析解[J].同济大学学报(自然科学版),2004,32(7):857-860.

[12] 滕兆春,昌博,付小华.弹性地基上转动功能梯度材料Timoshenko梁自由振动的微分变换法求解[J].中国机械工程,2018,29(10):1147-1152.

[13] MOSTAFA N, ALI K, AHMAD A S. Free vibration analysis of rotating Euler-Bernoulli beam with exponentially varying cross-section by differential transform method[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2018, 18(2):1850024.

[14] 滕兆春,刘露,衡亚洲.非均匀Winkler-Pasternak弹性地基上正交各向异性矩形板自由振动的DTM分析[J].兰州理工大学学报,2018,44(3):166-172.

[15] 赵家奎.微分变换及其在电路中的应用[M].武汉:华中理工大学出版社,1988.

[16] CHAPRA S C. Applied numerical methods-with MATLAB for engineers and scientists[M]. 4th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2018.

[17] WIGGERS S L, PEDERSEN P. Structural stability and vibration: an integrated introduction by analytical and numerical methods[M]. Switzerland: Springer, 2018.

[18] 侯祥林,卢宏峰,范炜,等.变截面承压杆的临界载荷的优化算法研究与应用[J].工程力学,2013,30(增刊):6-10.

Analysis of critical load of variable cross-section compression bars based on differential transformation method

YANG Wenxiu, TENG Zhaochun

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu 730050)

Abstract: Through the theory of approximate differential equation of deflection curve for slender compression bar, the governing differential equation is established for unstability cross-section compression bars. The equation is a fourth-order ordinary differential equation with variable coefficients. Its analytical solution is not easy to obtain and the numerical solution is gotten by utilizing a semi-analytical method called differential transformation method (DTM). The dimensionless form is obtained for the governing differential equation and boundary conditions of variable cross-section compression bars. DTM is used to convert dimensionless governing differential equation and boundary conditions of variable cross-section compression bar into algebraic characteristic equations of critical loads. The relative curves between the critical load values and the variation coefficients of variable cross-section compression bar are obtained numerically for four different boundary conditions by using programming and computing. The results show that the critical load values of the variable cross-section compression bar increase with the growth of the variation coefficients of section under different boundary conditions, the stability of the variable cross-section compression bar is preferably, it also show that DTM has simple process and very higher accuracy in solving this problem.

Keywords: variable cross-section; compression bar; critical load; numerical solution; differential transformation method

(责任编辑:兰丽丽)