文章编号：1673-5196(2021)04-0149-08

X-丁投射模

吴德军*，宋梦钰

（兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州　730050）

摘要：设 R 是具有单位元的结合环，$\boldsymbol{X}$ 是包含所有平坦模的 R-模类. 引入 $\boldsymbol{X}$-丁投射模和 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数的定义并研究了相关性质. 如果存在正合列 $P=:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中 P_i，P^i 是投射模，$i\in\mathbf{Z}$，对于任意 R-模 $F\in\boldsymbol{X}$，$\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用在正合列 P 上保持正合，并且 $M=\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，那么称 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 证明了 $\boldsymbol{X}$-丁投射模类是投射可解的并且 $\boldsymbol{X}$-丁投射模保持直和与直和项，同时证明了若 $\mathrm{G}\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}(R)<\infty$，则 $(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R),(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$ 是完备遗传余挠对.

关键词：$\boldsymbol{X}$-丁投射模；$\boldsymbol{X}$-丁投射维数；余挠对

中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A

X-Ding projective modules

WU De-jun，SONG Meng-yu

（School of Science，Lanzhou Univ. of Tech.，Lanzhou　730050，China）

Abstract：Let R be an associative ring with identity and $\boldsymbol{X}$ is a class that contains all flat R-modules，the definitions of $\boldsymbol{X}$-Ding projective modules and $\boldsymbol{X}$-Ding projective dimensions are introduced and the relative properties are studied. A right R-module $\boldsymbol{M}$ is called $\boldsymbol{X}$-Ding projective if there exists an exact sequence $P=:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$ of projective right R-modules such that $M=\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$ and $\mathrm{Hom}_R(P,F)$ is exact whenever $F\in\boldsymbol{X}$. It is proved that the class of all $\boldsymbol{X}$-Ding projective modules is projectively resolving and is closed under direct sums and direct summands. In addition，it is proved that if $\mathrm{G}\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}(R)<\infty$，then $(\boldsymbol{X}\text{-}DP(\mathrm{R}),(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$ is a complete here ditary cotorsion pair.

Key words：$\boldsymbol{X}$-Ding projective module；$\boldsymbol{X}$-Ding projective dimension；cotorsionpair

在本文中，R 表示有单位元的结合环，所有的模都是右 R-模，$\boldsymbol{X}$ 表示包含所有平坦 R-模的类，$P(R)$ 表示投射模类，$\boldsymbol{X}$-$\mathrm{Dpd}(R)<\infty$ 表示环 R 上的整体 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数有限，R-Mod 表示 R-模范畴. 2009 年，Ding 等[1]引入了一般环上的强 Gorenstein 平坦模的概念. 2010 年，Gillespie[2]将强 Gorenstein 平坦模重新命名为丁投射模并且证明了丁模类和 Gorenstein 模类具有类似的性质. 2010 年，Bennis 和 Ouarghi[3]引入了 $\boldsymbol{X}$-Gorenstein 投射模，证明了对 $\boldsymbol{X}$-Gorenstein 投射模而言，Gorenstein 投射模的一些结论仍然成立. 2013 年，Yang 等[4]研究了一般环上丁投射模的相关性质. 本文在文献[3-4]的基础上引入了 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，即如果存在正合列 $P=:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中 P_i，P^i 是投射模，$i\in Z$，对于任意 R-模 $F\in X$，$\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用在正合列 P 上保持正合，并且 $M=\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，那么称 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 本文证明了 $\boldsymbol{X}$-丁投射模类是投射可解的并且 $\boldsymbol{X}$-丁投射模保持直和项和直和. 进而引入了 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数的定义并给出了 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数有限的等价刻画以及其他相关性质. 证明了若环 R 的整体 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数有限，则 $(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R),(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$ 是完备遗传余挠对.

定义 1[4]　如果存在正合列 $P=:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中 P_i，P^i 是投射模，$i\in\mathbf{Z}$，对于任意平坦模 F，$\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用在正合列 P 上保持正合，并且 $M=\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，那么称 M 是丁投射模. 在这种情况下，称正合列 P 为强完全零调复形.

收稿日期：2020-01-02
基金项目：国家自然科学基金(11761047)
通讯作者：吴德军(1978-)，男，甘肃金昌人，博士，教授. Email：wudj@lut.edu.cn

定义 2[3]　设 $\boldsymbol{X}$ 是包含所有投射模的 R-模类. 如果存在正合列

$$P=:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$$

其中 P_i,P^i 是投射模，$i\in\mathbf{Z}$，对于任意 R-模 $P\in\boldsymbol{X}$，$\mathrm{Hom}_R(-,P)$ 作用在正合列 P 上保持正合，并且 $M=\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，那么称 M 是 $\boldsymbol{X}$-Gorenstein 投射模. 在这种情况下，称正合列 P 为 $\boldsymbol{X}$-完全零调复形.

引理 1[5]　(Horse Lemma) 设 $\boldsymbol{X}$ 是 R-模类，且 $\boldsymbol{X}$ 对有限直和封闭. 设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 R-模短正合列并且对于任意 R-模 $Y\in\boldsymbol{X}$，$\mathrm{Hom}_R(-,Y)$ 作用在短正合列上保持正合. 若 M' 和 M'' 有余真右 $\boldsymbol{X}$-分解，则 M 也有余真右 $\boldsymbol{X}$-分解.

定义 3[6]　称 R-模类 $\boldsymbol{X}$ 是投射可解的，若 $P(R)\subseteq\boldsymbol{X}$，且对任意短正合列 $0\to X'\to C\to X''\to 0$，其中 $X''\in\boldsymbol{X}$，则 $X'\in\boldsymbol{X}$ 当且仅当 $C\in\boldsymbol{X}$.

定理 1[6]　(Eilenberg's swindle) 若 R-模类 $\boldsymbol{X}$ 是投射可解的且对可数直和封闭，或是内射可解的且对可数直积封闭，则 R-模类 $\boldsymbol{X}$ 对直和项封闭.

定义 4[7]　设 $\boldsymbol{C}$ 是 R-模范畴的子范畴.

$\boldsymbol{C}^{\perp}=\{M\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Ext}_R^1(C,M)=0$，任意 R-模 $C\in\boldsymbol{C}\}$

${}^{\perp}\boldsymbol{C}=\{M\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Ext}_R^1(M,C)=0$，任意 R-模 $C\in\boldsymbol{C}\}$

定义 5[7]　设 A,B 是 R-模类. 若 $A={}^{\perp}B$ 且 $B=A^{\perp}$，则称 $C=(A,B)$ 是余挠对.

定义 6[7]　设(A,B)是余挠对. 若 $\mathrm{Ext}_R^i(X,Y)=0$，$i\geqslant 1$，其中 $X\in A$ 且 $Y\in B$，则称余挠对(A,B)是遗传的.

定义 7[7]　设(A,B)是余挠对. 若满足下面等价条件的任意一个：

1) 对任意 R-模 M，存在正合列 $0\to M\to Y\to L\to 0$，其中 $Y\in B$，$L\in A$.

2) 对任意 R-模 M，存在正合列 $0\to D\to C\to M\to 0$，其中 $C\in A$，$D\in B$. 则称余挠对(A,B)是完备的.

定义 8　设 $\boldsymbol{X}$ 是包含所有平坦模的 R-模类. 如果存在正合列 $P=:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中 P_i,P^i 是投射模，$i\in\mathbf{Z}$，对于任意 R-模 $F\in\boldsymbol{X}$，$\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用在正合列 P 上保持正合，并且 $M=\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，那么称 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 在这种情况下，称正合列 P 为 $\boldsymbol{X}$-强完全零调复形. 记 $\boldsymbol{X}$-$\mathcal{DP}(R)$为 $\boldsymbol{X}$-丁投射模类.

定理 2　设 M 是右 R-模. 则下列条件等价：

1) M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模；

2) M 满足以下两个条件：

① $\mathrm{Ext}_R^i(M,F)=0$，$i>0$，其中 $F\in\boldsymbol{X}$；

② 存在正合列 $0\to M\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中 P^i 是投射模，$i\geqslant 0$ 且为整数，对任意 R-模 $F\in\boldsymbol{X}$，$\mathrm{Hom}_R(-,F)$作用在正合列上保持正合.

3) 存在正合列 $0\to M\to P\to G\to 0$，其中 P 是投射模，G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

证明　1)⇔2)、1)⇒3) 由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义可得.

3)⇒2) 设任意 R-模 $F\in\boldsymbol{X}$. 用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用于短正合列 $0\to M\to P\to G\to 0$，由长正合序列定理有

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_R^1(G,F)\to\mathrm{Ext}_R^1(P,F)\to\mathrm{Ext}_R^1(M,F)\to\mathrm{Ext}_R^2(G,F)\to\cdots.$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^i(P,F)=\mathrm{Ext}_R^i(G,F)=0$，所以 $\mathrm{Ext}_R^i(M,F)=0$，$i>0$ 且为整数. 因为 G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，所以存在正合列 $0\to G\to P^0\to P^1\to P^2\to\cdots$，其中 P^i 是投射模，$i\geqslant 0$ 且为整数. 对于任意 R-模 F，$\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用在上正合列保持正合，结论得证.

定理 3　1) 投射模是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，$\boldsymbol{X}$-丁投射模是丁投射模.

2) 若 $\boldsymbol{X}$ 是平坦模类，则 $\boldsymbol{X}$-丁投射模和丁投射模一致.

3) 若 $\boldsymbol{X}$ 是丁投射模类，则任意 $\boldsymbol{X}$-丁投射模是投射模.

4) 若 G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，对任意平坦维数有限的 R-模 A，$\mathrm{Ext}_R^i(G,A)=0$，$i>0$ 且为整数.

证明　1) 设 P 是投射模，有正合列 $0\to P\xrightarrow{1_P}P\to 0$. 对于任意 R-模 $F\in\boldsymbol{X}$，$\mathrm{Hom}_R(-,F)$作用此正合列依然保持正合，其中 $P=\mathrm{Ker}(P\to 0)$. 故 P 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 设 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 因为 $\boldsymbol{X}$ 是包含所有平坦 R-模的类，所以由丁投射模定义知，P 是丁投射模.

2) 显然.

3) 设 R-模 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义知存在短正合列 $0\to M\to P^0\to K\to 0$，其中 M,K 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，P^0 是投射模. 用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$作用保持正合. 因为 $\boldsymbol{X}$ 是丁投射模类，且 $\boldsymbol{X}$-丁投射模是丁投射模，所以用 $\mathrm{Hom}_R(-,M)$作用于 $0\to M\to P^0\to K\to 0$ 依然保持正合，进而 $\mathrm{Ext}_R^1(K,M)=0$. 因此短正合列 $0\to M\to P^0\to K\to 0$ 可裂，故 $P^0\cong M\oplus K$. 因为投射模对直和项封闭，所以 M 是投射模.

4）设 G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义知，$\mathrm{Ext}_R^i(G,F)=0$，其中 $F\in\boldsymbol{X}$. 从而 $G\in{}^{\perp}F(R)$. 又因为 ${}^{\perp}F(R)={}^{\perp}\bar{F}(R)$，所以对任意平坦维数有限的 R-模 A，$\mathrm{Ext}_R^i(G,A)=0$，其中 $i>0$ 且为整数.

推论 1　任意的 R-模 M 是投射的当且仅当 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模且 $M\in\boldsymbol{X}$.

证明：由定理 3 可证.

推论 2　对于任意的结合环 R，下列条件等价：

1）$\boldsymbol{X}$ 是投射模类.

2）对于任意 R-模 F，F 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

证明　由定理 3 可证.

引理 2　设 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是短正合列. 若 A，C 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，则 B 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

证明　用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，其中 $F\in\boldsymbol{X}$，由长正合序列定理得 $\cdots\to\mathrm{Ext}_R^1(C,F)\to\mathrm{Ext}_R^1(B,F)\to\mathrm{Ext}_R^1(A,F)\to\cdots$，因为 A，C 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，所以 $\mathrm{Ext}_R^i(A,F)=\mathrm{Ext}_R^i(C,F)=0$，$i>0$. 从而 $\mathrm{Ext}_R^i(B,F)=0$. 由引理 1 知 B 存在 $\boldsymbol{X}$-强完全零调复形，故 B 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

定理 4　$\boldsymbol{X}$-丁投射模类是投射可解的.

证明　设 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是短正合列，其中 C 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 只需证明 A 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模当且仅当 B 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 若 A 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，由引理 2 知 B 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 若 B 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义知，存在短正合列 $0\to B\to P\to N\to 0$，其中 N 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，P 是投射模. 考虑交换图，如图 1 所示.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图 1　交换图

Fig. 1　Commutative diagram

因为 C 和 N 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，由引理 2 知，L 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 对于短正合列 $0\to A\to P\to L\to 0$，由 P 是投射模和 $\boldsymbol{X}$-丁投射模的定义知 A 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

推论 3　$\boldsymbol{X}$-丁投射模类对直和与直和项封闭.

证明　由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义，$\boldsymbol{X}$-丁投射模对直和封闭. 因为 $\boldsymbol{X}$-丁投射模类是投射可解的，所以由定理 1 知 $\boldsymbol{X}$-丁投射模对直和项封闭.

定理 5　设 $0\to M\to N\to L\to 0$ 是短正合列. 如果 M，N 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，那么 L 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^1(L,F)=0$，其中 $F\in\boldsymbol{X}$.

证明　必要性）因为 L 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义知 $\mathrm{Ext}_R^i(L,F)=0$，$i>0$，所以对任意模 $F\in\boldsymbol{X}$ 有 $\mathrm{Ext}_R^1(L,F)=0$.

充分性）由 M，N 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模知存在正合列

$$A=:0\to M\to P^0\to P^1\to\cdots$$

$$B=:0\to N\to Q^0\to Q^1\to\cdots$$

其中 P^i，Q^i 均为投射模，$i\in Z$，用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用保持正合. 存在同态 $f:M\to N$ 和同态 $P^i\to Q^i$，考虑交换图，如图 2 所示.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & Q^0 \arrow[r] & Q^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

图 2　交换图

Fig. 2　Commutative diagram

于是可诱导出复形链映射，记 $C=\mathrm{cone}(\bar{f})$ 为 $A\to B$ 的映射锥，即

$$\mathrm{cone}(\bar{f})=0\to M\to N\oplus P^0\to Q^0\oplus P^1\to\cdots$$

考虑交换图，如图 3 所示.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & P^0 \arrow[r] \arrow[d] & P^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N\oplus P^0 \arrow[r] \arrow[d] & Q^0\oplus P^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & Q^0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图 3　交换图

Fig. 3　Commutative diagram

则存在短正合列 $0\to A[1]\to\mathrm{cone}(\bar{f})\to B\to 0$，其中复形 $A[1]$，B 正合. 从而 $\mathrm{cone}(\bar{f})$ 正合，且 $\mathrm{cone}(\bar{f})$ 用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用依然保持正合，其中 $F\in\boldsymbol{X}$. 考虑交换图，如图 4 所示.

其中 $K=\mathrm{Coker}(M\to N\oplus P^0)$. 令

$$D=:0\to M\to M\to 0\to\cdots$$

$$C=:0\to M\to N\oplus P^0\to Q^0\oplus P^1\to\cdots$$

$$L=:0\to K\to Q^0\oplus P^1\to\cdots$$

则存在正合列 $0\to D\to C\to L\to 0$，其中复形 D，C

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N\oplus P^0 \arrow[r] \arrow[d] & Q^0\oplus P^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & Q^0\oplus P^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图4　交换图

Fig. 4　Commutative diagram

正合，从而复形 L 正合，且 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用 L 上保持正合，其中 $F\in \boldsymbol{X}$. 因为有正合列 $0\to M\to N\oplus P^0\to K\to 0$，$0\to M\to N\to L\to 0$，所以存在同态 $h:K\to L$ 使交换图如图5所示.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\alpha"'] & N\oplus P^0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"'] & 0 \arrow[d, dashed, "\gamma"'] \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图5　交换图

Fig. 5　Commutative diagram

其中 π 是标准投影，由五引理知 h 是满同态，又由蛇引理知 $\mathrm{Ker}\ h\cong \mathrm{Ker}\ \pi=P^0$. 对于正合列 $0\to P^0\to K\to L\to 0$，由假设 $\mathrm{Ext}_R^1(L,F)=0$ 知 $P^0\in \boldsymbol{X}$. 故 $\mathrm{Ext}_R^1(L,P)=0$. 因此短正合列可裂，所以 $K\cong P^0\oplus L$. 进而 $\mathrm{Ext}_R^1(K,F)=\mathrm{Ext}_R^1(P^0\oplus L,F)=0$. 对 K 作投射分解有正合列 $K'=:\cdots\to P_1\to P_0\to K\to 0$，且用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用保持正合. 将正合列 K' 与 L 连接，构成关于 K 的 $\boldsymbol{X}$-强完全零调复形，由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义可知 K 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 又因为 $\boldsymbol{X}$-丁投射模保持直和项，所以 L 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

引理3　若存在正合列 $0\to K_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_0\to M\to 0$，其中 $G_0,\cdots,G_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，则对任意平坦维数有限 R-模 A，有

$$\mathrm{Ext}_R^i(K_n,A)\cong \mathrm{Ext}_R^{n+i}(M,A)$$

其中：$i>0$ 且为整数.

证明　将长正合列打断成一系列短正合列，如下：

$A=:0\to C_1\to G_0\to M\to 0$

其中 $C_1=\mathrm{Ker}(G_0\to M)$

$B=:0\to C_2\to G_1\to C_1\to 0$

其中 $C_2=\mathrm{Ker}(G_1\to G_0)$

$\cdots$

$X=:0\to K_n\to G_{n-1}\to C_{n-1}\to 0$

其中 $C_{n-1}=\mathrm{Ker}(G_{n-2}\to G_{n-3})$

用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用于长正合列 X，对任意平坦维数有限 R-模 F，由长正合列定理可得

$$\cdots\to \mathrm{Ext}_R^1(G_{n-1},F)\to \mathrm{Ext}_R^1(K_n,F)\to \mathrm{Ext}_R^2(C_{n-1},F)\to \mathrm{Ext}_R^2(G_{n-1},F)\to\cdots$$

又因为 $G_0,\cdots,G_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，所以

$$\mathrm{Ext}_R^1(G_{n-1},F)=\mathrm{Ext}_R^2(G_{n-1},F)=0$$

从而 $\mathrm{Ext}_R^1(K_n,F)\cong \mathrm{Ext}_R^2(C_{n-1},F)$. 用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用其它短正合列，有

$$\mathrm{Ext}_R^2(C_{n-1},F)\cong \mathrm{Ext}_R^3(C_{n-2},F),\cdots,\mathrm{Ext}_R^n(C_1,F)\cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,F)$$

因此 $\mathrm{Ext}_R^1(K_n,F)\cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,F)$. 故 $\mathrm{Ext}_R^i(K_n,F)\cong \mathrm{Ext}_R^{n+i}(M,F)$，$i>0$ 且为整数.

定义9　若存在正合列 $0\to G^n\to G^{n-1}\to\cdots\to G^0\to M\to 0$，其中：$G^0,\cdots,G^n$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，则称 R-模 M 的 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数小于等于 n. 用 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)$ 表示 R-模 M 的 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数.

称 $\mathrm{G}\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}(R)$ 为环 R 上的整体 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数，记

$$\mathrm{G}\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}(R)=\sup_{\forall M\in \boldsymbol{M}_R}\{\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}(M)\}$$

引理4　M 是任意 R-模，考虑下面两个正合列：

$$A=:0\to L_n\to X_{n-1}\to\cdots\to X_0\to M\to 0$$

$$B=:0\to \tilde{L}_n\to \tilde{X}_{n-1}\to\cdots\to \tilde{X}_0\to M\to 0$$

若 $X_0,\cdots,X_{n-1}$ 与 $\tilde{X}_0,\cdots,\tilde{X}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，则 L_n 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模当且仅当 $\tilde{L}_n$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

证明　设 L_n 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 取 R-模 M 的投射分解

$$C=:0\to K\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$$

其中：$K=\mathrm{Ker}d_{n-1}$，$P_0,\cdots,P_{n-1}$ 是投射模. 存在链映射 $\bar{f}$，考虑交换图，如图6所示.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_n \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图6　交换图

Fig. 6　Commutative diagram

考虑交换图，如图7所示.

其中 $\mathrm{cone}(\bar{f})=0\to K\to P_{n-1}\oplus L_n\to\cdots\to M\oplus$

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1}\oplus L_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & M\oplus X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & L_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 7　交换图

Fig. 7　Commutative diagram

$X_0\to M\to 0$，从而有复形短正合列 $0\to C[1]\to \mathrm{cone}(\bar{f})\to A\to 0$，由同调代数基本定理知 $\mathrm{cone}(\bar{f})$是正合的. 从而存在 X_0 使得 $0\to X_0\to M\oplus X_0\to M\to 0$ 正合. 进而有正合列

$$0\to K\to P_{n-1}\oplus L_n\to\cdots\to P_0\oplus X_1\to X_0\to 0$$

其中 X_0 是 **X**-丁投射模. 由于 **X**-丁投射模对直和与直和项封闭，所以 $P_{n-1}\oplus L_n$ 与 $X_i\oplus P_{i-1}$ 是 **X**-丁投射模，$i=1,\cdots,n-1$. 因为 **X**-丁投射模类是投射可解的，所以 K 是 **X**-丁投射模. 类似有正合列

$$0\to K\to P_{n-1}\oplus \tilde{L}_n\xrightarrow{\alpha}\cdots\to P_0\oplus\tilde{X}_1\to\tilde{X}_0\to 0$$

其中 $\tilde{X}_0$ 是 **X**-丁投射模，$\tilde{X}_i\oplus P_{i-1}$ 是 **X**-丁投射模，$i=1,\cdots,n-1$，$\mathrm{Im}\,\alpha$ 是 **X**-丁投射模. 对于短正合列 $0\to K\to P_{n-1}\oplus\tilde{L}_n\to\mathrm{Im}\,\alpha\to 0$，其中 K，$\mathrm{Im}\,\alpha$ 是 **X**-丁投射模，由 **X**-丁投射模是投射可解的可知 $P_{n-1}\oplus\tilde{L}_n$ 是 **X**-丁投射模. 又因为 **X**-丁投射模对直和项封闭，所以 $\tilde{L}_n$ 是 **X**-丁投射模. 设 $\tilde{L}_n$ 是 **X**-丁投射模，同理可证 L_n 是 **X**-丁投射模.

定理 6　设 $0\to K\to G\to M\to 0$ 是短正合序列，其中 G 是 **X**-丁投射模. 若 M 是 **X**-丁投射模，则 K 是 **X**-丁投射模. 否则

$$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(K)=\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)-1\geqslant 0$$

证明　对于短正合列 $0\to K\to G\to M\to 0$，若 M 是 **X**-丁投射模，因为 **X**-丁投射模类是投射可解的，所以 K 是 **X**-丁投射模.

若 M 不是 **X**-丁投射模，设 M 的 **X**-丁投射维数为 m，则 M 有 **X**-丁投射分解分解：

$$0\to X_m\to X_{m-1}\to\cdots\to X_1\to X_0\to M\to 0$$

其中 $X_0,\cdots,X_m$ 是 **X**-丁投射模. 对 K 作投射分解，有$\cdots\to P_{m-1}\to P_{m-2}\to\cdots\to P_1\to P_0\to K\to 0$，其中 P_i 是投射模，$i\geqslant 0$ 且为整数. 存在正合列 $0\to I\to P_{m-2}\to\cdots\to P_0\to K\to 0$，其中 $I=\mathrm{Im}(P_{m-1}\to P_{m-2})$. 所以有正合列 $0\to I\to P_{m-2}\to\cdots\to P_0\to G\to M\to 0$. 由引理 4 可知 I 是 **X**-丁投射模，此时**X**-$\mathrm{Dpd}_R(K)\leqslant m-1$. 若 **X**-$\mathrm{Dpd}_R(K)<m-1$，则 **X**-$\mathrm{Dpd}_R(M)<m$ 与题设矛盾，故

$$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(K)=m-1=\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}(M)-1$$

命题 1　设 R-模 M 的 **X**-丁投射维数有限，n 是整数. 下列条件等价：

1）**X**-$\mathrm{Dpd}_R(M)\leqslant n$；

2）$\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$，$i>n$，对任意平坦维数有限的 R-模 L；

3）$\mathrm{Ext}_R^i(M,F)=0$，$i>n$，对任意的平坦模 F；

4）若存在正合列 $0\to K_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_0\to M\to 0$，其中 G_i 是 **X**-丁投射模，则 K_n 也是 **X**-丁投射模.

进而，**X**-$\mathrm{Dpd}_R(M)$可由下列公式计算：

$$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)=$$
$$\mathrm{Sup}\{i\in N_0\mid \exists L\in\bar{F}(R),\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\neq 0\}=$$
$$\mathrm{Sup}\{i\in N_0\mid \exists F\in F(R),\mathrm{Ext}_R^i(M,F)\neq 0\}$$

证明　1）⇒2）已知 **X**-$\mathrm{Dpd}_R(M)\leqslant n$，由 **X**-丁投射维数的定义可知，存在正合序列 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to 0$，其中 $G_0,\cdots,G_n$ 是**X**-丁投射模. 由引理 3 知对任意平坦维数有限的 R-模 L 有 $\mathrm{Ext}_R^{i-n}(G_n,L)\cong\mathrm{Ext}_R^n(M,L)$，$i>0$ 且为整数. 因为 G_n 是 **X**-丁投射模，所以对任意平坦维数有限的 R-模 L，$\mathrm{Ext}_R^{i-n}(G_n,L)=0$. 故对于 $i>n$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$.

2）⇒3）显然.

3）⇒4）对于正合列 $0\to K_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_0\to M\to 0$，其中 $G_0,\cdots,G_n$ 是 **X**-丁投射模. 由引理 3 知对于任意平坦模 F，有 $\mathrm{Ext}_R^i(K_n,F)\cong\mathrm{Ext}_R^{i+n}(M,F)$，$i>0$ 且为整数. 由 3）知 $\mathrm{Ext}_R^i(M,F)=0$，从而 $\mathrm{Ext}_R^i(K_n,F)=0$. 因为 M 的 **X**-丁投射维数有限，由定理 6 可知 K_n 的 **X**-丁投射维数有限. 设 **X**-$\mathrm{Dpd}_R(K_n)\leqslant m$，则有正合列 $0\to G'_m\to G'_{m-1}\to\cdots\to G'_0\to K_n\to 0$，其中 $G'_0,\cdots,G'_m$ 是 **X**-丁投射模. 将此正合列打断成一系列短正合列，即

$A=:0\to C'_1\to G'_0\to K_n\to 0$

　其中 $C'_1=\mathrm{Ker}(G'_0\to K_n)$

$B=:0\to C'_2\to G'_1\to C'_1\to 0$

　其中 $C'_2=\mathrm{Ker}(G'_1\to G'_0)$

…

$X=:0\to G'_m\to G'_{m-1}\to C'_{m-1}\to 0$

$$\text{其中 } C'_{m-1}=\mathrm{Ker}(G'_{m-2}\to G'_{m-3})$$

对于任意平坦模 F,用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 分别作用短正合列 $A,\cdots,X$,再由长正合序列定理有

$$\cdots\to \mathrm{Ext}_R^1(G'_0,F)\to \mathrm{Ext}_R^1(C'_1,F)\to$$
$$\mathrm{Ext}_R^2(K_n,F)\to \mathrm{Ext}_R^2(G'_0,F)\to\cdots$$

其中 $\mathrm{Ext}_R^i(G'_n,F)=0$,$i>0$ 且是整数. 故

$$\mathrm{Ext}_R^m(K_n,F)\cong \mathrm{Ext}_R^{m-1}(C'_1,F)$$

其中 $m>0$ 且为整数. 由维数推移公式可知,

$$\mathrm{Ext}_R^{m-1}(C'_1,F)\cong \mathrm{Ext}_R^1(C'_{m-1},F)$$

从而

$$\mathrm{Ext}_R^1(C'_{m-1},F)\cong \mathrm{Ext}_R^{m-1}(C'_1,F)\cong \mathrm{Ext}_R^m(K_n,F)$$

故

$$\mathrm{Ext}_R^1(C'_{m-1},F)=\mathrm{Ext}_R^m(K_n,F)=0$$

由定理 5 知 $C'_1,\cdots,C'_{m-1},K_n$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

4)⇒1) 因为 K_n 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模,所以

$$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)\leqslant n$$

结论得证.

定理 7　设 M 是具有有限 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数的 R-模,且 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)=n$,则 M 存在满的 $\boldsymbol{X}$-丁投射预覆盖 $\varphi:G\to M$. 记 $K=\mathrm{Ker}\ \varphi$,则 $\mathrm{pd}_R K=n-1$.

证明　因为 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)=n$,所以存在正合列 $0\to C_n\to\cdots\to C_0\to M\to 0$,其中 C_i 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模,$0\leqslant i\leqslant n$. 对 M 作投射分解,存在正合列

$$0\to K'\to P_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-2}\to\cdots\to P_0\to M\to 0$$

其中 $K'=\mathrm{Ker}\ d_{n-1}$,P_i 是投射模,$0\leqslant i\leqslant n-1$. 由引理 4 可知,$K'$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 根据 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义,存在零调复形

$$\cdots\to Q^{-1}\to Q^0\to Q^1\to\cdots\to Q^{n-1}\to Q^n\to\cdots$$

使得有正合列 $0\to K'\to Q^0\to Q^1\to\cdots\to Q^{n-1}\to G\to 0$,其中 G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模,Q^i 是投射模,其中 $i>0$ 且是整数. 对任意 R-模 $F\in\boldsymbol{X}$,用 $\mathrm{Hom}_R(-,F)$ 作用保持正合. 因此存在同态 $Q^i\to P_{n-1-i}$,$0\leqslant i\leqslant n-1$,和同态 $f:G\to M$,交换图如图 8 所示.

于是可诱导出复形的链映射,如图 9 所示.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Q^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdots \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Q^{n-2} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Q^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & P_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 8　交换图

Fig. 8　Commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q^0 \arrow[r] \arrow[d] & Q^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & Q^{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & Q^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & P_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 9　交换图

Fig. 9　Commutative diagram

显然,映射锥 $0\to Q^0\to Q^1\oplus P_{n-1}\to\cdots\to Q^{n-1}\oplus P_1\to G\oplus P_0\to M\to 0$ 是正合的. 令 $\varphi:G\oplus P_0\to M$,下证 φ 是 M 的 $\boldsymbol{X}$-丁投射预覆盖. 因为 $\boldsymbol{X}$-丁投射模类对直和封闭,所以 $G\oplus P_0$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 因为 $K=\mathrm{Ker}\ \varphi$,所以 $\mathrm{pd}_R(K)\leqslant n-1$,由于 $X\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)=n$,故 $\mathrm{pd}_R(K)=n-1$. 对任意 $\boldsymbol{X}$-丁投射模 C',$\mathrm{Ext}_R^i(C',F)=0$. 因此对正合列 $0\to K\to P_0\oplus G\to M\to 0$,用 $\mathrm{Hom}_R(C',-)$ 作用得正合列:

$$0\to \mathrm{Hom}_R(C',K)\to \mathrm{Hom}_R(C',P_0\oplus G)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(C',\varphi)} \mathrm{Hom}_R(C',M)\to 0$$

并且 $\mathrm{Hom}_R(C',\varphi)$ 是满的,即 φ 是 M 的 $\boldsymbol{X}$-丁投射预覆盖.

推论 4　设 M 是具有有限 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数的 R-模,且 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)=n$. 若存在短正合列 $0\to M\to H\to G\to 0$ 使得 $\mathrm{pd}_R(H)=n$,则 G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模.

证明　对 n 分类讨论,有以下情形:

若 $n=0$,即 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)=0$,则 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模,由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义,必然存在短正合列 $0\to M\to H\to G\to 0$,其中 H 是投射模,所以 $\mathrm{pd}_R(H)=0$.

若 $n>0$,由定理 7,存在短正合列 $0\to K\to G'\to M\to 0$,其中 G' 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模,$K=\mathrm{Ker}(G'\to M)$ 且 $\mathrm{pd}_R(K)=n-1$. 对于 $\boldsymbol{X}$-丁投射模 G',存在短正合列

$0\to G'\to P\to G\to 0$，其中 P 是投射模，G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 考虑交换图，如图 10 所示.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 10　交换图

Fig. 10　Commutative diagram

因为 $\mathrm{pd}_R(K)=n-1$，且 P 是投射模，所以 $\mathrm{pd}_R(H)\leqslant n$.

若 $n=1$，$\mathrm{pd}_R(K)=n-1=0$，则 K 是投射模，因此 $\mathrm{pd}_R(H)=1$. 否则 $\mathrm{pd}_R(H)=0$，则 H 是投射模即为 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，又因为 G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模类是投射可解的，所以 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，矛盾.

若 $n>1$，对于短正合列 $0\to K\to P\to H\to 0$，$\mathrm{pd}_R(H)=\mathrm{pd}_R(K)+1=n$.

命题 2　对任意 R-模 M 和 M'，

$$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M\oplus M')=\max\{\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M),\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M')\}$$

证明　设 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)=m$，$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M')=n$，其中 m,n 均是整数且 $m<n$. 分别对 M 和 M' 作 $\boldsymbol{X}$-丁投射分解，有下列正合列：

$$0\to 0\to 0\to\cdots\to G_m\to G_{m-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to 0$$

$$0\to G_n'\to G_{n-1}'\to\cdots\to G_m'\to G_{m-1}'\to\cdots\to G_1'\to G_0'\to M'\to 0$$

将上述两个正合列作直和可得正合列

$$0\to G_n{}'\to\cdots\to G_m\oplus G_m'\to\cdots\to G_0\oplus G_0{}'\to M\oplus M'\to 0$$

由于 $\boldsymbol{X}$-丁投射模类对直和封闭，所以 $G_0\oplus G_0',\cdots,G_m\oplus G_m'$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 因此，

$$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M\oplus M')=n$$

设 M' 是 N 的直和项，只需证明 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M')\leqslant\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(N)$ 即可. 设 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(N)=n$. 对 n 进行归纳假设：当 $n=0$ 时，由于 $\boldsymbol{X}$-丁投射模保持直和项封闭，所以 N 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 当 $n>0$ 时，设 $N=M\oplus M'$，选取正合列

$$0\to K'\to G'\to M'\to 0,\ 0\to K''\to G''\to M\to 0$$

其中 G',G'' 是投射模，$K'=\mathrm{Ker}(G'\to M')$，$K''=\mathrm{Ker}(G''\to M)$. 则有下列交换图，如图 11 所示.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K'\oplus K'' \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & G'\oplus G'' \arrow[r] \arrow[d] & G'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 11　交换图

Fig. 11　Commutative diagram

由同调代数基本定理知，序列 $0\to K'\oplus K''\to G'\oplus G''\to N\to 0$ 正合. 因为 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(N)=n>0$，所以 N 不是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 由定理 6 可知：

$$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(K'\oplus K'')=\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)-1=n-1$$

因此，由假设归纳，$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(K')\leqslant n-1$. 又因为短正合列 $0\to K'\to G'\to M'\to 0$ 中 G' 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模，所以 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M')\leqslant n$. 从而

$$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M')\leqslant\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(N)$$

结论得证.

命题 3　设 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是短正合序列，若 A,B,C 中任意两个 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数有限，则第三个也有限.

证明　1）若 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(A)\leqslant n$，$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(C)\leqslant m$，$m\leqslant n$. 由命题 1，对任意平坦模 Q，有

$$\mathrm{Ext}_R^{n+i}(A,Q)=\mathrm{Ext}_R^{n+i}(C,Q)=0,\ i\geqslant 1$$

用 $\mathrm{Hom}_R(-,Q)$ 作用正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，由长正合序列定理，有

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(C,Q)\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(B,Q)\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,Q)\to\cdots$$

从而 $\mathrm{Ext}_R^{n+i}(B,Q)=0$，$i\geqslant 1$. 因此，$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(B)\leqslant n$，即 B 的 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数有限.

2）若 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(A)\leqslant n$，$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(B)\leqslant m$，$m\leqslant n$.

3）或 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(B)\leqslant n$，$\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(C)\leqslant m$，$m\leqslant n$.

2）、3）证明类似于 1），分别可知 C 与 A 的 $\boldsymbol{X}$-丁投射维数有限. 结论得证.

定理 8　若 $\mathrm{G}\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}(R)<\infty$，则 $(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R),(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$ 是完备遗传余挠对.

证明　显然 $\boldsymbol{X}\text{-}DP(R)\subseteq{}^{\perp}((\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$. 下

证$^{\perp}((\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})\subseteq \boldsymbol{X}\text{-}DP(R)$. 设 R-模 $M\in{}^{\perp}((\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$,则$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$,其中 R-模 $N\in(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp}$. 因为 $G\boldsymbol{X}$-Dpd$(R)<\infty$, 所以 $\boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)<\infty$. 由定理 7 知,存在正合列 $0\to K\to G\to M\to 0$,其中 G 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模并且 $\mathrm{pd}_R(K)\leqslant \boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)-1$. 又因为投射模是平坦模,故 $\mathrm{fd}_R(K)\leqslant \boldsymbol{X}\text{-}\mathrm{Dpd}_R(M)-1$,进而$\mathrm{Ext}_R^i(G,K)=0$. 因此,$K\in(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp}$. 由 $M\in{}^{\perp}((\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$知$\mathrm{Ext}_R^i(M,K)=0$,故正合列可裂,即 $G\cong M\oplus K$. 因为 $\boldsymbol{X}$-丁投射模对直和项封闭,所以 M 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模,即 $M\in \boldsymbol{X}\text{-}DP(R)$. 故$(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R),(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$是余挠对. 由 $\boldsymbol{X}$-丁投射模定义知$\mathrm{Ext}_R^i(M,K)=0$,所以

$$\mathrm{Ext}_R^i(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R),(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})=0$$

因此,$(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R),(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$是遗传余挠对. 对于正合列 $0\to K\to G\to M\to 0$, 其中 $K\in(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp}$,$G$ 是 $\boldsymbol{X}$-丁投射模. 由完备余挠对定义,$(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R),(\boldsymbol{X}\text{-}DP(R))^{\perp})$是完备遗传余挠对.

参考文献:

[1] DING N Q, LI Y L, MAO L X. Strongly gorenstein flat modules [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2009, 86:323-338.

[2] GILLESPIE J. Modules structures on modules over ding-chen rings [J]. Homology, Homotopy and Applications, 2010, 12(1):61-73.

[3] BENNIS D, OUARGHI K. $\boldsymbol{X}$-Gorenstein projective modules [J]. International Mathematical Forum, 2010, 10(5):487-491.

[4] YANG G, LIU Z K, LIANG L. Ding projective and Ding injective modules [J]. Algebra Colloquium, 2013, 20(4):601-612.

[5] ENOCHS E E, IACOB A, JENDA O M G. Relative homological algebra [M]. Berlin, New York: Walter de Gruylter, 2000.

[6] HOLM H. Gorenstein homological dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189:167-193.

[7] WANG J, LI Y X, HU J S. When the kernel of a complete hereditary cotorsion pair is the additive closure of a tilting module [J]. Journal of Algebra, 2019, 530:94-113.

[8] 吴德军,孔芳弟. 提升模的推广 [J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(1):142-145.