

文章编号: 1673-5196(2021)04-0149-08

X-丁投射模

吴德军*, 宋梦钰

(兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 设 R 是具有单位元的结合环, \mathbf{X} 是包含所有平坦模的 R -模类. 引入 \mathbf{X} -丁投射模和 \mathbf{X} -丁投射维数的定义并研究了相关性质. 如果存在正合列 $P =: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$, 其中 P_i, P^i 是投射模, $i \in \mathbf{Z}$, 对于任意 R -模 $F \in \mathbf{X}$, $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用在正合列 P 上保持正合, 并且 $M = \text{Ker}(P^0 \rightarrow P^1)$, 那么称 M 是 \mathbf{X} -丁投射模. 证明了 \mathbf{X} -丁投射模类是投射可解的并且 \mathbf{X} -丁投射模保持直和与直和项, 同时证明了若 $\text{GX-Dpd}(R) < \infty$, 则 $(\mathbf{X-DP}(R), (\mathbf{X-DP}(R))^\perp)$ 是完备遗传余挠对.

关键词: \mathbf{X} -丁投射模; \mathbf{X} -丁投射维数; 余挠对

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A

X-Ding projective modules

WU De-jun, SONG Meng-yu

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: Let R be an associative ring with identity and \mathbf{X} is a class that contains all flat R -modules, the definitions of \mathbf{X} -Ding projective modules and \mathbf{X} -Ding projective dimensions are introduced and the relative properties are studied. A right R -module M is called \mathbf{X} -Ding projective if there exists an exact sequence $P =: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$ of projective right R -modules such that $M = \text{Ker}(P^0 \rightarrow P^1)$ and $\text{Hom}_R(P, F)$ is exact whenever $F \in \mathbf{X}$. It is proved that the class of all \mathbf{X} -Ding projective modules is projectively resolving and is closed under direct sums and direct summands. In addition, it is proved that if $\text{GX-Dpd}(R) < \infty$, then $(\mathbf{X-DP}(R), (\mathbf{X-DP}(R))^\perp)$ is a complete here ditary cotorsion pair.

Key words: \mathbf{X} -Ding projective module; \mathbf{X} -Ding projective dimension; cotorsionpair

在本文中, R 表示有单位元的结合环, 所有的模都是右 R -模, \mathbf{X} 表示包含所有平坦 R -模的类, $P(R)$ 表示投射模类, $\text{X-Dpd}(R) < \infty$ 表示环 R 上的整体 \mathbf{X} -丁投射维数有限, $R\text{-Mod}$ 表示 R -模范畴. 2009 年, Ding 等^[1] 引入了一般环上的强 Gorenstein 平坦模的概念. 2010 年, Gillespie^[2] 将强 Gorenstein 平坦模重新命名为丁投射模并且证明了丁模类和 Gorenstein 模类具有类似的性质. 2010 年, Bennis 和 Ouarghi^[3] 引入了 \mathbf{X} -Gorenstein 投射模, 证明了对 \mathbf{X} -Gorenstein 投射模而言, Gorenstein 投射模的一些结论仍然成立. 2013 年, Yang 等^[4] 研究了一般环上丁投射模的相关性质. 本文在文献[3-4]的

基础上引入了 \mathbf{X} -丁投射模, 即如果存在正合列 $P =: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$, 其中 P_i, P^i 是投射模, $i \in \mathbf{Z}$, 对于任意 R -模 $F \in \mathbf{X}$, $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用在正合列 P 上保持正合, 并且 $M = \text{Ker}(P^0 \rightarrow P^1)$, 那么称 M 是 \mathbf{X} -丁投射模. 本文证明了 \mathbf{X} -丁投射模类是投射可解的并且 \mathbf{X} -丁投射模保持直和项和直和. 进而引入了 \mathbf{X} -丁投射维数的定义并给出了 \mathbf{X} -丁投射维数有限的等价刻画以及其他相关性质. 证明了若环 R 的整体 \mathbf{X} -丁投射维数有限, 则 $(\mathbf{X-DP}(R), (\mathbf{X-DP}(R))^\perp)$ 是完备遗传余挠对.

定义 1^[4] 如果存在正合列 $P =: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$, 其中 P_i, P^i 是投射模, $i \in \mathbf{Z}$, 对于任意平坦模 F , $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用在正合列 P 上保持正合, 并且 $M = \text{Ker}(P^0 \rightarrow P^1)$, 那么称 M 是丁投射模. 在这种情况下, 称正合列 P 为强完全零调复形.

收稿日期: 2020-01-02

基金项目: 国家自然科学基金(11761047)

通讯作者: 吴德军(1978-), 男, 甘肃金昌人, 博士, 教授.

Email: wudj@lut.edu.cn

定义 2^[3] 设 \mathbf{X} 是包含所有投射模的 R -模类. 如果存在正合列

$$P = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$$

其中 P_i, P^i 是投射模, $i \in \mathbf{Z}$, 对于任意 R -模 $P \in \mathbf{X}$, $\text{Hom}_R(-, P)$ 作用在正合列 P 上保持正合, 并且 $M = \text{Ker}(P^0 \rightarrow P^1)$, 那么称 M 是 \mathbf{X} -Gorenstein 投射模. 在这种情况下, 称正合列 P 为 \mathbf{X} -完全零调复形.

引理 1^[5] (Horse Lemma) 设 \mathbf{X} 是 R -模类, 且 \mathbf{X} 对有限直和封闭. 设 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ 是 R -模短正合列并且对于任意 R -模 $Y \in \mathbf{X}$, $\text{Hom}_R(-, Y)$ 作用在短正合列上保持正合. 若 M' 和 M'' 有余真右 \mathbf{X} -分解, 则 M 也有余真右 \mathbf{X} -分解.

定义 3^[6] 称 R -模类 \mathbf{X} 是投射可解的, 若 $P(R) \subseteq \mathbf{X}$, 且对任意短正合列 $0 \rightarrow X' \rightarrow C \rightarrow X'' \rightarrow 0$, 其中 $X'' \in \mathbf{X}$, 则 $X' \in \mathbf{X}$ 当且仅当 $C \in \mathbf{X}$.

定理 1^[6] (Eilenberg's swindle) 若 R -模类 \mathbf{X} 是投射可解的且对可数直和封闭, 或是内射可解的且对可数直积封闭, 则 R -模类 \mathbf{X} 对直和项封闭.

定义 4^[7] 设 C 是 R -模范畴的子范畴.

$C^\perp = \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{Ext}_R^i(C, M) = 0, \text{ 任意 } R\text{-模 } C \in C\}$

${}^\perp C = \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{Ext}_R^i(M, C) = 0, \text{ 任意 } R\text{-模 } C \in C\}$

定义 5^[7] 设 A, B 是 R -模类. 若 $A = {}^\perp B$ 且 $B = A^\perp$, 则称 $C = (A, B)$ 是余挠对.

定义 6^[7] 设 (A, B) 是余挠对. 若 $\text{Ext}_R^i(X, Y) = 0, i \geq 1$, 其中 $X \in A$ 且 $Y \in B$, 则称余挠对 (A, B) 是遗传的.

定义 7^[7] 设 (A, B) 是余挠对. 若满足下面等价条件的任意一个:

1) 对任意 R -模 M , 存在正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow Y \rightarrow L \rightarrow 0$, 其中 $Y \in B, L \in A$.

2) 对任意 R -模 M , 存在正合列 $0 \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $C \in A, D \in B$. 则称余挠对 (A, B) 是完备的.

定义 8 设 \mathbf{X} 是包含所有平坦模的 R -模类. 如果存在正合列 $P = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$, 其中 P_i, P^i 是投射模, $i \in \mathbf{Z}$, 对于任意 R -模 $F \in \mathbf{X}$, $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用在正合列 P 上保持正合, 并且 $M = \text{Ker}(P^0 \rightarrow P^1)$, 那么称 M 是 \mathbf{X} -丁投射模. 在这种情况下, 称正合列 P 为 \mathbf{X} -强完全零调复形. 记 $\mathbf{X}\text{-DP}(R)$ 为 \mathbf{X} -丁投射模类.

定理 2 设 M 是右 R -模. 则下列条件等价:

1) M 是 \mathbf{X} -丁投射模;

2) M 满足以下两个条件:

① $\text{Ext}_R^i(M, F) = 0, i > 0$, 其中 $F \in \mathbf{X}$;

② 存在正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$, 其中 P^i 是投射模, $i \geq 0$ 且为整数, 对任意 R -模 $F \in \mathbf{X}$, $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用在正合列上保持正合.

3) 存在正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 0$, 其中 P 是投射模, G 是 \mathbf{X} -丁投射模.

证明 1) \Leftrightarrow 2)、1) \Rightarrow 3) 由 \mathbf{X} -丁投射模定义可得.

3) \Rightarrow 2) 设任意 R -模 $F \in \mathbf{X}$. 用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用于短正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 0$, 由长正合序列定理有

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^1(G, F) \rightarrow \text{Ext}_R^1(P, F) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, F) \rightarrow \text{Ext}_R^2(G, F) \rightarrow \cdots$$

因为 $\text{Ext}_R^i(P, F) = \text{Ext}_R^i(G, F) = 0$, 所以 $\text{Ext}_R^i(M, F) = 0, i > 0$ 且为整数. 因为 G 是 \mathbf{X} -丁投射模, 所以存在正合列 $0 \rightarrow G \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow P^2 \rightarrow \cdots$, 其中 P^i 是投射模, $i \geq 0$ 且为整数. 对于任意 R -模 $F, \text{Hom}_R(-, F)$ 作用在上正合列保持正合, 结论得证.

定理 3 1) 投射模是 \mathbf{X} -丁投射模, \mathbf{X} -丁投射模是丁投射模.

2) 若 \mathbf{X} 是平坦模类, 则 \mathbf{X} -丁投射模和丁投射模一致.

3) 若 \mathbf{X} 是丁投射模类, 则任意 \mathbf{X} -丁投射模是投射模.

4) 若 G 是 \mathbf{X} -丁投射模, 对任意平坦维数有限的 R -模 $A, \text{Ext}_R^i(G, A) = 0, i > 0$ 且为整数.

证明 1) 设 P 是投射模, 有正合列 $0 \rightarrow P \xrightarrow{1_P} P \rightarrow 0$. 对于任意 R -模 $F \in \mathbf{X}, \text{Hom}_R(-, F)$ 作用此正合列依然保持正合, 其中 $P = \text{Ker}(P \rightarrow 0)$. 故 P 是 \mathbf{X} -丁投射模. 设 M 是 \mathbf{X} -丁投射模. 因为 \mathbf{X} 是包含所有平坦 R -模的类, 所以由丁投射模定义知, P 是丁投射模.

2) 显然.

3) 设 R -模 M 是 \mathbf{X} -丁投射模. 由 \mathbf{X} -丁投射模定义知存在短正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow K \rightarrow 0$, 其中 M, K 是 \mathbf{X} -丁投射模, P^0 是投射模. 用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用保持正合. 因为 \mathbf{X} 是丁投射模类, 且 \mathbf{X} -丁投射模是丁投射模, 所以用 $\text{Hom}_R(-, M)$ 作用于 $0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow K \rightarrow 0$ 依然保持正合, 进而 $\text{Ext}_R^1(K, M) = 0$. 因此短正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow K \rightarrow 0$ 可裂, 故 $P^0 \cong M \oplus K$. 因为投射模对直和项封闭, 所以 M 是投射模.

4) 设 G 是 \mathbf{X} -丁投射模, 由 \mathbf{X} -丁投射模定义知, $\text{Ext}_R^i(G, F) = 0$, 其中 $F \in \mathbf{X}$. 从而 $G \in {}^\perp F(R)$. 又因为 ${}^\perp F(R) = {}^\perp \bar{F}(R)$, 所以对任意平坦维数有限的 R -模 A , $\text{Ext}_R^i(G, A) = 0$, 其中 $i > 0$ 且为整数.

推论 1 任意的 R -模 M 是投射的当且仅当 M 是 \mathbf{X} -丁投射模且 $M \in \mathbf{X}$.

证明: 由定理 3 可证.

推论 2 对于任意的结合环 R , 下列条件等价:

- 1) \mathbf{X} 是投射模类.
- 2) 对于任意 R -模 F , F 是 \mathbf{X} -丁投射模.

证明 由定理 3 可证.

引理 2 设 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 是短正合列. 若 A, C 是 \mathbf{X} -丁投射模, 则 B 是 \mathbf{X} -丁投射模.

证明 用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 其中 $F \in \mathbf{X}$, 由长正合序列定理得 $\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^1(C, F) \rightarrow \text{Ext}_R^1(B, F) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, F) \rightarrow \cdots$, 因为 A, C 是 \mathbf{X} -丁投射模, 所以 $\text{Ext}_R^1(A, F) = \text{Ext}_R^1(C, F) = 0, i > 0$. 从而 $\text{Ext}_R^i(B, F) = 0$. 由引理 1 知 B 存在 \mathbf{X} -强完全零调复形, 故 B 是 \mathbf{X} -丁投射模.

定理 4 \mathbf{X} -丁投射模类是投射可解的.

证明 设 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 是短正合列, 其中 C 是 \mathbf{X} -丁投射模. 只需证明 A 是 \mathbf{X} -丁投射模当且仅当 B 是 \mathbf{X} -丁投射模. 若 A 是 \mathbf{X} -丁投射模, 由引理 2 知 B 是 \mathbf{X} -丁投射模. 若 B 是 \mathbf{X} -丁投射模, 由 \mathbf{X} -丁投射模定义知, 存在短正合列 $0 \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$, 其中 N 是 \mathbf{X} -丁投射模, P 是投射模. 考虑交换图, 如图 1 所示.

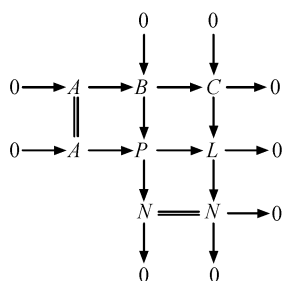


图 1 交换图

Fig. 1 Commutative diagram

因为 C 和 N 是 \mathbf{X} -丁投射模, 由引理 2 知, L 是 \mathbf{X} -丁投射模. 对于短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow L \rightarrow 0$, 由 P 是投射模和 \mathbf{X} -丁投射模的定义知 A 是 \mathbf{X} -丁投射模.

推论 3 \mathbf{X} -丁投射模类对直和与直和项封闭.

证明 由 \mathbf{X} -丁投射模定义, \mathbf{X} -丁投射模对直和

封闭. 因为 \mathbf{X} -丁投射模类是投射可解的, 所以由定理 1 知 \mathbf{X} -丁投射模对直和项封闭.

定理 5 设 $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$ 是短正合列. 如果 M, N 是 \mathbf{X} -丁投射模, 那么 L 是 \mathbf{X} -丁投射模当且仅当 $\text{Ext}_R^1(L, F) = 0$, 其中 $F \in \mathbf{X}$.

证明 必要性) 因为 L 是 \mathbf{X} -丁投射模, 由 \mathbf{X} -丁投射模定义知 $\text{Ext}_R^1(L, F) = 0, i > 0$, 所以对任意模 $F \in \mathbf{X}$ 有 $\text{Ext}_R^1(L, F) = 0$.

充分性) 由 M, N 是 \mathbf{X} -丁投射模知存在正合列

$$\begin{aligned} A &= : 0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots \\ B &= : 0 \rightarrow N \rightarrow Q^0 \rightarrow Q^1 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

其中 P^i, Q^i 均为投射模, $i \in \mathbb{Z}$, 用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用保持正合. 存在同态 $f: M \rightarrow N$ 和同态 $P^i \rightarrow Q^i$, 考虑交换图, 如图 2 所示.

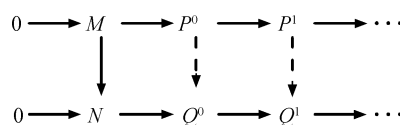


图 2 交换图

Fig. 2 Commutative diagram

于是可诱导出复形链映射, 记 $C = \text{cone}(\bar{f})$ 为 $A \rightarrow B$ 的映射锥, 即

$$\text{cone}(\bar{f}) = 0 \rightarrow M \rightarrow N \oplus P^0 \rightarrow Q^0 \oplus P^1 \rightarrow \cdots$$

考虑交换图, 如图 3 所示.

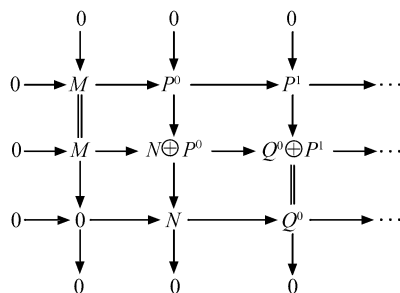


图 3 交换图

Fig. 3 Commutative diagram

则存在短正合列 $0 \rightarrow A[1] \rightarrow \text{cone}(\bar{f}) \rightarrow B \rightarrow 0$,

其中复形 $A[1], B$ 正合. 从而 $\text{cone}(\bar{f})$ 正合, 且 $\text{cone}(\bar{f})$ 用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用依然保持正合, 其中 $F \in \mathbf{X}$. 考虑交换图, 如图 4 所示.

其中 $K = \text{Coker}(M \rightarrow N \oplus P^0)$. 令

$$\begin{aligned} D &= : 0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ C &= : 0 \rightarrow M \rightarrow N \oplus P^0 \rightarrow Q^0 \oplus P^1 \rightarrow \cdots \\ L &= : 0 \rightarrow K \rightarrow Q^0 \oplus P^1 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

则存在正合列 $0 \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow L \rightarrow 0$, 其中复形 D, C

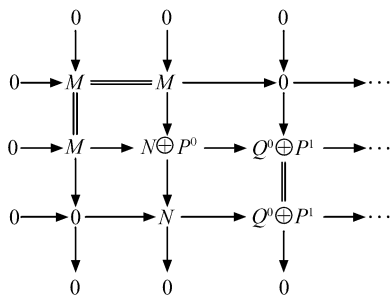


图 4 交换图

Fig. 4 Commutative diagram

正合,从而复形 L 正合,且 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用 L 上保持正合,其中 $F \in \mathbf{X}$. 因为有正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \oplus P^0 \rightarrow K \rightarrow 0, 0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$, 所以存在同态 $h: K \rightarrow L$ 使交换图如图 5 所示.

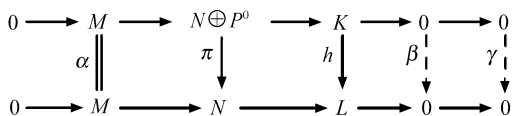


图 5 交换图

Fig. 5 Commutative diagram

其中 π 是标准投影,由五引理知 h 是满同态,又由蛇引理知 $\text{Ker } h \cong \text{Ker } \pi = P^0$. 对于正合列 $0 \rightarrow P^0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow 0$, 由假设 $\text{Ext}_R^1(L, F) = 0$ 知 $P^0 \in \mathbf{X}$. 故 $\text{Ext}_R^1(L, P) = 0$. 因此短正合列可裂,所以 $K \cong P^0 \oplus L$. 进而 $\text{Ext}_R^1(K, F) = \text{Ext}_R^1(P^0 \oplus L, F) = 0$. 对 K 作投射分解有正合列 $K' =: \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow K \rightarrow 0$, 且用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用保持正合. 将正合列 K' 与 L 连接,构成关于 K 的 \mathbf{X} -强完全零调复形,由 \mathbf{X} -丁投射模定义可知 K 是 \mathbf{X} -丁投射模. 又因为 \mathbf{X} -丁投射模保持直和项,所以 L 是 \mathbf{X} -丁投射模.

引理 3 若存在正合列 $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 G_0, \dots, G_{n-1} 是 \mathbf{X} -丁投射模,则对任意平坦维数有限 R -模 A , 有

$$\text{Ext}_R^i(K_n, A) \cong \text{Ext}_R^{n+i}(M, A)$$

其中: $i > 0$ 且为整数.

证明 将长正合列打断成一系列短正合列,如下:

$$A =: 0 \rightarrow C_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$\text{其中 } C_1 = \text{Ker}(G_0 \rightarrow M)$$

$$B =: 0 \rightarrow C_2 \rightarrow G_1 \rightarrow C_1 \rightarrow 0$$

$$\text{其中 } C_2 = \text{Ker}(G_1 \rightarrow G_0)$$

...

$$X =: 0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow C_{n-1} \rightarrow 0$$

其中 $C_{n-1} = \text{Ker}(G_{n-2} \rightarrow G_{n-3})$

用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用于长正合列 X , 对任意平坦维数有限 R -模 F , 由长正合列定理可得

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_R^1(G_{n-1}, F) \rightarrow \text{Ext}_R^1(K_n, F) \rightarrow$$

$$\text{Ext}_R^2(C_{n-1}, F) \rightarrow \text{Ext}_R^2(G_{n-1}, F) \rightarrow \dots$$

又因为 G_0, \dots, G_{n-1} 是 \mathbf{X} -丁投射模, 所以

$$\text{Ext}_R^1(G_{n-1}, F) = \text{Ext}_R^2(G_{n-1}, F) = 0$$

从而 $\text{Ext}_R^1(K_n, F) \cong \text{Ext}_R^2(C_{n-1}, F)$. 用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用其它短正合列, 有

$$\text{Ext}_R^2(C_{n-1}, F) \cong$$

$$\text{Ext}_R^3(C_{n-2}, F), \dots, \text{Ext}_R^n(C_1, F) \cong$$

$$\text{Ext}_R^{n+1}(M, F)$$

因此 $\text{Ext}_R^i(K_n, F) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(M, F)$. 故 $\text{Ext}_R^i(K_n, F) \cong \text{Ext}_R^{n+i}(M, F), i > 0$ 且为整数.

定义 9 若存在正合列 $0 \rightarrow G^n \rightarrow G^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G^0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中: G^0, \dots, G^n 是 \mathbf{X} -丁投射模, 则称 R -模 M 的 \mathbf{X} -丁投射维数小于等于 n . 用 $\text{X-Dpd}_R(M)$ 表示 R -模 M 的 \mathbf{X} -丁投射维数.

称 $\text{GX-Dpd}(R)$ 为环 R 上的整体 \mathbf{X} -丁投射维数, 记

$$\text{GX-Dpd}(R) = \sup_{M \in \mathbf{M}_R} \{\text{X-Dpd}(M)\}$$

引理 4 M 是任意 R -模, 考虑下面两个正合列:

$$A =: 0 \rightarrow L_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$B =: 0 \rightarrow \tilde{L}_n \rightarrow \tilde{X}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{X}_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

若 X_0, \dots, X_{n-1} 与 $\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_{n-1}$ 是 \mathbf{X} -丁投射模, 则 L_n 是 \mathbf{X} -丁投射模当且仅当 \tilde{L}_n 是 \mathbf{X} -丁投射模.

证明 设 L_n 是 \mathbf{X} -丁投射模. 取 R -模 M 的投射分解

$$C =: 0 \rightarrow K \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

其中: $K = \text{Ker } d_{n-1}, P_0, \dots, P_{n-1}$ 是投射模. 存在链映射 \bar{f} , 考虑交换图, 如图 6 所示.

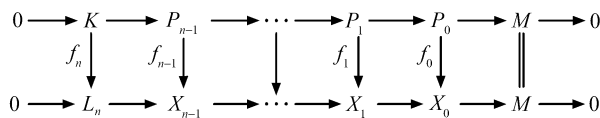


图 6 交换图

Fig. 6 Commutative diagram

考虑交换图, 如图 7 所示.

其中 $\text{cone}(\bar{f}) = 0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \oplus L_n \rightarrow \dots \rightarrow M \oplus$

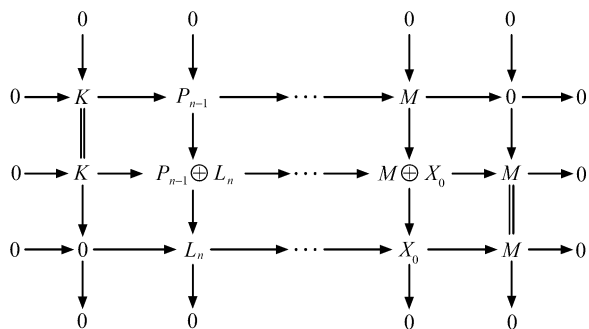


图 7 交换图

Fig. 7 Commutative diagram

$X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 从而有复形短正合列 $0 \rightarrow C[1] \rightarrow \text{cone}(\bar{f}) \rightarrow A \rightarrow 0$, 由同调代数基本定理知 $\text{cone}(\bar{f})$ 是正合的. 从而存在 X_0 使得 $0 \rightarrow X_0 \rightarrow M \oplus X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 正合. 进而有正合列

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \oplus L_n \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \oplus X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow 0$$

其中 X_0 是 \mathbf{X} -丁投射模. 由于 \mathbf{X} -丁投射模对直和与直和项封闭, 所以 $P_{n-1} \oplus L_n$ 与 $X_i \oplus P_{i-1}$ 是 \mathbf{X} -丁投射模, $i=1, \dots, n-1$. 因为 \mathbf{X} -丁投射模类是投射可解的, 所以 K 是 \mathbf{X} -丁投射模. 类似有正合列

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \oplus \tilde{L}_n \xrightarrow{\alpha} \dots \rightarrow P_0 \oplus \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_0 \rightarrow 0$$

其中 \tilde{X}_0 是 \mathbf{X} -丁投射模, $\tilde{X}_i \oplus P_{i-1}$ 是 \mathbf{X} -丁投射模, $i=1, \dots, n-1$, $\text{Im } \alpha$ 是 \mathbf{X} -丁投射模. 对于短正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \oplus \tilde{L}_n \rightarrow \text{Im } \alpha \rightarrow 0$, 其中 $K, \text{Im } \alpha$ 是 \mathbf{X} -丁投射模, 由 \mathbf{X} -丁投射模是投射可解的可知 $P_{n-1} \oplus \tilde{L}_n$ 是 \mathbf{X} -丁投射模. 又因为 \mathbf{X} -丁投射模对直和项封闭, 所以 \tilde{L}_n 是 \mathbf{X} -丁投射模. 设 \tilde{L}_n 是 \mathbf{X} -丁投射模, 同理可证 L_n 是 \mathbf{X} -丁投射模.

定理 6 设 $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$ 是短正合序列, 其中 G 是 \mathbf{X} -丁投射模. 若 M 是 \mathbf{X} -丁投射模, 则 K 是 \mathbf{X} -丁投射模. 否则

$$\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(K) = \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) - 1 \geq 0$$

证明 对于短正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, 若 M 是 \mathbf{X} -丁投射模, 因为 \mathbf{X} -丁投射模类是投射可解的, 所以 K 是 \mathbf{X} -丁投射模.

若 M 不是 \mathbf{X} -丁投射模, 设 M 的 \mathbf{X} -丁投射维数为 m , 则 M 有 \mathbf{X} -丁投射分解:

$$0 \rightarrow X_m \rightarrow X_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

其中 X_0, \dots, X_m 是 \mathbf{X} -丁投射模. 对 K 作投射分解, 有 $\dots \rightarrow P_{m-1} \rightarrow P_{m-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow K \rightarrow 0$, 其中 P_i

是投射模, $i \geq 0$ 且为整数. 存在正合列 $0 \rightarrow I \rightarrow P_{m-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow K \rightarrow 0$, 其中 $I = \text{Im}(P_{m-1} \rightarrow P_{m-2})$. 所以有正合列 $0 \rightarrow I \rightarrow P_{m-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$. 由引理 4 可知 I 是 \mathbf{X} -丁投射模, 此时 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(K) \leq m-1$. 若 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(K) < m-1$, 则 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) < m$ 与题设矛盾, 故

$$\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(K) = m-1 = \mathbf{X}\text{-Dpd}(M) - 1$$

命题 1 设 R -模 M 的 \mathbf{X} -丁投射维数有限, n 是整数. 下列条件等价:

- 1) $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) \leq n$;
- 2) $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0, i > n$, 对任意平坦维数有限的 R -模 L ;
- 3) $\text{Ext}_R^i(M, F) = 0, i > n$, 对任意的平坦模 F ;
- 4) 若存在正合列 $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 G_i 是 \mathbf{X} -丁投射模, 则 K_n 也是 \mathbf{X} -丁投射模.

进而, $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M)$ 可由下列公式计算:

$$\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) =$$

$$\text{Sup}\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists L \in \bar{F}(R), \text{Ext}_R^i(M, L) \neq 0\} = \text{Sup}\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists F \in F(R), \text{Ext}_R^i(M, F) \neq 0\}$$

证明 1) \Rightarrow 2) 已知 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) \leq n$, 由 \mathbf{X} -丁投射维数的定义可知, 存在正合序列 $0 \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 G_0, \dots, G_n 是 \mathbf{X} -丁投射模. 由引理 3 知对任意平坦维数有限的 R -模 L 有 $\text{Ext}_R^{i-n}(G_n, L) \cong \text{Ext}_R^i(M, L), i > 0$ 且为整数. 因为 G_n 是 \mathbf{X} -丁投射模, 所以对任意平坦维数有限的 R -模 $L, \text{Ext}_R^{i-n}(G_n, L) = 0$. 故对于 $i > n, \text{Ext}_R^i(M, L) = 0$.

2) \Rightarrow 3) 显然.

3) \Rightarrow 4) 对于正合列 $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 G_0, \dots, G_n 是 \mathbf{X} -丁投射模. 由引理 3 知对于任意平坦模 F , 有 $\text{Ext}_R^i(K_n, F) \cong \text{Ext}_R^{i+n}(M, F), i > 0$ 且为整数. 由 3) 知 $\text{Ext}_R^i(M, F) = 0$, 从而 $\text{Ext}_R^i(K_n, F) = 0$. 因为 M 的 \mathbf{X} -丁投射维数有限, 由定理 6 可知 K_n 的 \mathbf{X} -丁投射维数有限. 设 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(K_n) \leq m$, 则有正合列 $0 \rightarrow G'_m \rightarrow G'_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow G'_0 \rightarrow K_n \rightarrow 0$, 其中 G'_0, \dots, G'_m 是 \mathbf{X} -丁投射模. 将此正合列打断成一系列短正合列, 即

$$A = : 0 \rightarrow C'_1 \rightarrow G'_0 \rightarrow K_n \rightarrow 0$$

$$\text{其中 } C'_1 = \text{Ker}(G'_0 \rightarrow K_n)$$

$$B = : 0 \rightarrow C'_2 \rightarrow G'_1 \rightarrow C'_1 \rightarrow 0$$

$$\text{其中 } C'_2 = \text{Ker}(G'_1 \rightarrow G'_0)$$

...

$$X = : 0 \rightarrow G'_m \rightarrow G'_{m-1} \rightarrow C'_{m-1} \rightarrow 0$$

其中 $C'_{m-1} = \text{Ker}(G'_{m-2} \rightarrow G'_{m-3})$

对于任意平坦模 F , 用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 分别作用短正合列 A, \dots, X , 再由长正合序列定理有

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Ext}_R^1(G'_0, F) \rightarrow \text{Ext}_R^1(C'_1, F) \rightarrow \\ \text{Ext}_R^2(K_n, F) \rightarrow \text{Ext}_R^2(G'_0, F) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

其中 $\text{Ext}_R^i(G'_n, F) = 0, i > 0$ 且是整数. 故

$$\text{Ext}_R^m(K_n, F) \cong \text{Ext}_R^{m-1}(C'_1, F)$$

其中 $m > 0$ 且为整数. 由维数推移公式可知,

$$\text{Ext}_R^{m-1}(C'_1, F) \cong \text{Ext}_R^1(C'_{m-1}, F)$$

从而

$$\text{Ext}_R^1(C'_{m-1}, F) \cong \text{Ext}_R^{m-1}(C'_1, F) \cong \text{Ext}_R^m(K_n, F)$$

故

$$\text{Ext}_R^1(C'_{m-1}, F) = \text{Ext}_R^m(K_n, F) = 0$$

由定理 5 知 $C'_1, \dots, C'_{m-1}, K_n$ 是 \mathbf{X} -丁投射模.

4) \Rightarrow 1) 因为 K_n 是 \mathbf{X} -丁投射模, 所以

$$\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) \leq n$$

结论得证.

定理 7 设 M 是具有有限 \mathbf{X} -丁投射维数的 R -

模, 且 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) = n$, 则 M 存在满的 \mathbf{X} -丁投射预覆盖 $\varphi: G \rightarrow M$. 记 $K = \text{Ker } \varphi$, 则 $\text{pd}_R K = n-1$.

证明 因为 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) = n$, 所以存在正合列 $0 \rightarrow C_n \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 C_i 是 \mathbf{X} -丁投射模, $0 \leq i \leq n$. 对 M 作投射分解, 存在正合列

$$0 \rightarrow K' \rightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

其中 $K' = \text{Ker } d_{n-1}$, P_i 是投射模, $0 \leq i \leq n-1$. 由引理 4 可知, K' 是 \mathbf{X} -丁投射模. 根据 \mathbf{X} -丁投射模定义, 存在零调复形

$$\cdots \rightarrow Q^{-1} \rightarrow Q^0 \rightarrow Q^1 \rightarrow \cdots \rightarrow Q^{n-1} \rightarrow Q^n \rightarrow \cdots$$

使得有正合列 $0 \rightarrow K' \rightarrow Q^0 \rightarrow Q^1 \rightarrow \cdots \rightarrow Q^{n-1} \rightarrow G \rightarrow 0$, 其中 G 是 \mathbf{X} -丁投射模, Q^i 是投射模, 其中 $i > 0$ 且是整数. 对任意 R -模 $F \in \mathbf{X}$, 用 $\text{Hom}_R(-, F)$ 作用保持正合. 因此存在同态 $Q^i \rightarrow P_{n-1-i}, 0 \leq i \leq n-1$, 和同态 $f: G \rightarrow M$, 交换图如图 8 所示.

于是可诱导出复形的链映射, 如图 9 所示.

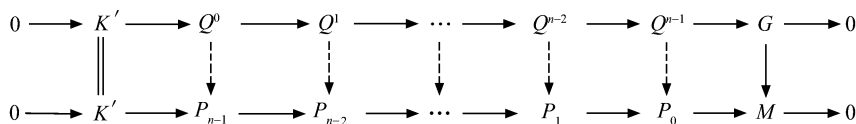


图 8 交换图

Fig. 8 Commutative diagram

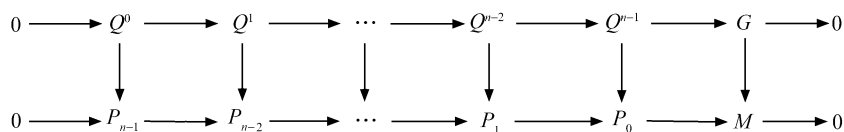


图 9 交换图

Fig. 9 Commutative diagram

显然, 映射锥 $0 \rightarrow Q^0 \rightarrow Q^1 \oplus P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q^{n-1} \oplus P_1 \rightarrow G \oplus P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 是正合的. 令 $\varphi: G \oplus P_0 \rightarrow M$, 下证 φ 是 M 的 \mathbf{X} -丁投射预覆盖. 因为 \mathbf{X} -丁投射模类对直和封闭, 所以 $G \oplus P_0$ 是 \mathbf{X} -丁投射模. 因为 $K = \text{Ker } \varphi$, 所以 $\text{pd}_R(K) \leq n-1$, 由于 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) = n$, 故 $\text{pd}_R(K) = n-1$. 对任意 \mathbf{X} -丁投射模 C' , $\text{Ext}_R^i(C', F) = 0$. 因此对正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow P_0 \oplus G \rightarrow M \rightarrow 0$, 用 $\text{Hom}_R(C', -)$ 作用得正合列:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(C', K) \rightarrow \text{Hom}_R(C', P_0 \oplus G) \\ \xrightarrow{\text{Hom}_R(C', \varphi)} \text{Hom}_R(C', M) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

并且 $\text{Hom}_R(C', \varphi)$ 是满的, 即 φ 是 M 的 \mathbf{X} -丁投射预

覆盖.

推论 4 设 M 是具有有限 \mathbf{X} -丁投射维数的 R -模, 且 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) = n$. 若存在短正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 0$ 使得 $\text{pd}_R(H) = n$, 则 G 是 \mathbf{X} -丁投射模.

证明 对 n 分类讨论, 有以下情形:

若 $n = 0$, 即 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) = 0$, 则 M 是 \mathbf{X} -丁投射模, 由 \mathbf{X} -丁投射模定义, 必然存在短正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 0$, 其中 H 是投射模, 所以 $\text{pd}_R(H) = 0$.

若 $n > 0$, 由定理 7, 存在短正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow G' \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 G' 是 \mathbf{X} -丁投射模, $K = \text{Ker}(G' \rightarrow M)$ 且 $\text{pd}_R(K) = n-1$. 对于 \mathbf{X} -丁投射模 G' , 存在短正合列

$0 \rightarrow G' \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 0$, 其中 P 是投射模, G 是 \mathbf{X} -丁投射模. 考虑交换图, 如图 10 所示.

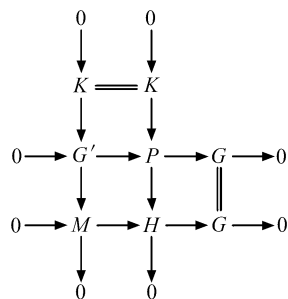


图 10 交换图

Fig. 10 Commutative diagram

因为 $\text{pd}_R(K) = n - 1$, 且 P 是投射模, 所以 $\text{pd}_R(H) \leq n$.

若 $n = 1$, $\text{pd}_R(K) = n - 1 = 0$, 则 K 是投射模, 因此 $\text{pd}_R(H) = 1$. 否则 $\text{pd}_R(H) = 0$, 则 H 是投射模即为 \mathbf{X} -丁投射模, 又因为 G 是 \mathbf{X} -丁投射模, 由 \mathbf{X} -丁投射模类是投射可解的, 所以 M 是 \mathbf{X} -丁投射模, 矛盾.

若 $n > 1$, 对于短正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow H \rightarrow 0$, $\text{pd}_R(H) = \text{pd}_R(K) + 1 = n$.

命题 2 对任意 R -模 M 和 M' ,

$$\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M \oplus M') = \max\{\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M), \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M')\}$$

证明 设 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) = m, \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M') = n$, 其中 m, n 均是整数且 $m < n$. 分别对 M 和 M' 作 \mathbf{X} -丁投射分解, 有下列正合列:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow G_m \rightarrow G_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \\ G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow G'_n \rightarrow G'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G'_m \rightarrow G'_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \\ G'_1 \rightarrow G'_0 \rightarrow M' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

将上述两个正合列作直和可得正合列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_m \oplus G'_m \rightarrow \cdots \rightarrow \\ G_0 \oplus G'_0 \rightarrow M \oplus M' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

由于 \mathbf{X} -丁投射模类对直和封闭, 所以 $G_0 \oplus G'_0, \dots, G_m \oplus G'_m$ 是 \mathbf{X} -丁投射模. 因此,

$$\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M \oplus M') = n$$

设 M' 是 N 的直和项, 只需证明 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M') \leq \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(N)$ 即可. 设 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(N) = n$. 对 n 进行归纳假设: 当 $n = 0$ 时, 由于 \mathbf{X} -丁投射模保持直和项封闭, 所以 N 是 \mathbf{X} -丁投射模. 当 $n > 0$ 时, 设 $N = M \oplus M'$, 选取正合列

$0 \rightarrow K' \rightarrow G' \rightarrow M' \rightarrow 0, 0 \rightarrow K'' \rightarrow G'' \rightarrow M \rightarrow 0$ 其中 G', G'' 是投射模, $K' = \text{Ker}(G' \rightarrow M'), K'' = \text{Ker}(G'' \rightarrow M)$. 则有下列交换图, 如图 11 所示.

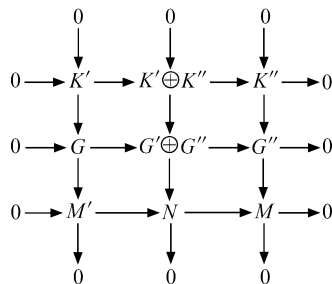


图 11 交换图

Fig. 11 Commutative diagram

由同调代数基本定理知, 序列 $0 \rightarrow K' \oplus K'' \rightarrow G' \oplus G'' \rightarrow N \rightarrow 0$ 正合. 因为 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(N) = n > 0$, 所以 N 不是 \mathbf{X} -丁投射模. 由定理 6 可知:

$$\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(K' \oplus K'') = \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) - 1 = n - 1$$

因此, 由假设归纳, $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(K') \leq n - 1$. 又因为短正合列 $0 \rightarrow K' \rightarrow G' \rightarrow M' \rightarrow 0$ 中 G' 是 \mathbf{X} -丁投射模, 所以 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M') \leq n$. 从而

$$\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M') \leq \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(N)$$

结论得证.

命题 3 设 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 是短正合序列, 若 A, B, C 中任意两个 \mathbf{X} -丁投射维数有限, 则第三个也有限.

证明 1) 若 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(A) \leq n, \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(C) \leq m, m \leq n$. 由命题 1, 对任意平坦模 Q , 有

$$\text{Ext}_R^{n+i}(A, Q) = \text{Ext}_R^{n+i}(C, Q) = 0, i \geq 1$$

用 $\text{Hom}_R(-, Q)$ 作用正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 由长正合序列定理, 有

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Ext}_R^{n+1}(C, Q) \rightarrow \text{Ext}_R^{n+1}(B, Q) \rightarrow \\ \text{Ext}_R^{n+1}(A, Q) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

从而 $\text{Ext}_R^{n+i}(B, Q) = 0, i \geq 1$. 因此, $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(B) \leq n$, 即 B 的 \mathbf{X} -丁投射维数有限.

2) 若 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(A) \leq n, \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(B) \leq m, m \leq n$.

3) 或 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(B) \leq n, \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(C) \leq m, m \leq n$.

2)、3) 证明类似于 1), 分别可知 C 与 A 的 \mathbf{X} -丁投射维数有限. 结论得证.

定理 8 若 $\mathbf{GX}\text{-Dpd}(R) < \infty$, 则 $(\mathbf{X}\text{-DP}(R), (\mathbf{X}\text{-DP}(R))^\perp)$ 是完备遗传余挠对.

证明 显然 $\mathbf{X}\text{-DP}(R) \subseteq^\perp ((\mathbf{X}\text{-DP}(R))^\perp)$. 下

证 ${}^{\perp}((\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp}) \subseteq \mathbf{X}\text{-DP}(R)$. 设 R -模 $M \in {}^{\perp}((\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp})$, 则 $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$, 其中 R -模 $N \in (\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp}$. 因为 $\text{GX-Dpd}(R) < \infty$, 所以 $\mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) < \infty$. 由定理 7 知, 存在正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 G 是 \mathbf{X} -丁投射模并且 $\text{pd}_R(K) \leq \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) - 1$. 又因为投射模是平坦模, 故 $\text{fd}_R(K) \leq \mathbf{X}\text{-Dpd}_R(M) - 1$, 进而 $\text{Ext}_R^i(G, K) = 0$. 因此, $K \in (\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp}$. 由 $M \in {}^{\perp}((\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp})$ 知 $\text{Ext}_R^i(M, K) = 0$, 故正合列可裂, 即 $G \cong M \oplus K$. 因为 \mathbf{X} -丁投射模对直和项封闭, 所以 M 是 \mathbf{X} -丁投射模, 即 $M \in \mathbf{X}\text{-DP}(R)$. 故 $(\mathbf{X}\text{-DP}(R), (\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp})$ 是余挠对. 由 \mathbf{X} -丁投射模定义知 $\text{Ext}_R^i(M, K) = 0$, 所以

$$\text{Ext}_R^i(\mathbf{X}\text{-DP}(R), (\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp}) = 0$$

因此, $(\mathbf{X}\text{-DP}(R), (\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp})$ 是遗传余挠对. 对于正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $K \in (\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp}$, G 是 \mathbf{X} -丁投射模. 由完备余挠对定义, $(\mathbf{X}\text{-DP}(R), (\mathbf{X}\text{-DP}(R))^{\perp})$ 是完备遗传余挠对.

参考文献:

[1] DING N Q, LI Y L, MAO L X. Strongly gorenstein flat modules [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2009, 86:323-338.

[2] GILLESPIE J. Modules structures on modules over ding-chen rings [J]. Homology, Homotopy and Applications, 2010, 12(1):61-73.

[3] BENNIS D, OUARGHI K. \mathbf{X} -Gorenstein projective modules [J]. International Mathematical Forum, 2010, 10(5):487-491.

[4] YANG G, LIU Z K, LIANG L. Ding projective and Ding injective modules [J]. Algebra Colloquium, 2013, 20(4):601-612.

[5] ENOCHS E E, IACOB A, JENDA O M G. Relative homological algebra [M]. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2000.

[6] HOLM H. Gorenstein homological dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189:167-193.

[7] WANG J, LI Y X, HU J S. When the kernel of a complete hereditary cotorsion pair is the additive closure of a tilting module [J]. Journal of Algebra, 2019, 530:94-113.

[8] 吴德军, 孔芳弟. 提升模的推广 [J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(1):142-145.