



# 识别 Rayleigh-Stokes 方程源项的分数阶 Landweber 迭代正则化方法

杨帆\* 王乾朝 李晓晓  
(兰州理工大学理学院 兰州 730050)

**摘要:** 该文研究具有 Riemann-Liouville 时间分数阶导数的 Rayleigh-Stokes 方程未知源识别问题. 首先证明这个问题是不适定的, 并应用分数阶 Landweber 正则化方法求解此反问题. 基于条件稳定性结果, 在先验和后验正则化参数选取规则下, 分别给出精确解与正则解之间的误差估计. 最后通过数值例子说明此方法求解此类反问题的有效性和可行性.

**关键词:** Rayleigh-Stokes 方程; 反问题; 识别源项; 分数阶 Landweber 迭代正则化方法.

**MR(2010) 主题分类:** 35R25; 47A52; 35R30 **中图分类号:** O175 **文献标识码:** A

**文章编号:** 1003-3998(2021)02-427-24

## 1 引言

设  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) 是一个凸多面体区域, 其边界为  $\partial\Omega$ ,  $T > 0$  为固定时间. 本文考虑一个广义的 Rayleigh-Stokes 流体分数阶导数模型

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - (1 + \gamma {}_0^R \partial_t^\alpha) \Delta u(x, t) = f(x), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u(x, T) = g(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $\gamma > 0$  是常数,  $\varphi(x)$  是定义在  $L^2(\Omega)$  上的初始数据, 符号  ${}_0^R \partial_t^\alpha$  表示阶数为  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 的 Riemann-Liouville 分数阶导数

$${}_0^R \partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \omega_{1-\alpha}(t-\tau) u(x, \tau) d\tau, \quad \omega_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  表示 Gamma 函数.

收稿日期: 2020-03-03; 修订日期: 2020-08-04

E-mail: yfgd114@163.com; wqcfaf@163.com

基金项目: 国家自然科学基金 (11961044) 和兰州理工大学博士基金

Supported by the NSFC(11961044) and the Dr Fund of Lanzhou University of Science and Technology

在问题 (1.1) 中, 当  $f(x)$  已知时, 此问题是一个正问题. 如果  $f(x)$  是未知的, 此问题就是一个反问题. 这时, 需要使用附加条件  $u(x, T) = g(x)$  去识别未知源项  $f(x)$ . 然而, 在实际问题中,  $g(x)$  只能通过测量得到. 因此, 假设精确数据函数  $g(x)$  和测量数据函数  $g^\delta(x)$  满足

$$\|g^\delta(\cdot) - g(\cdot)\| \leq \delta, \quad (1.2)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示  $L^2(\Omega)$  范数,  $\delta > 0$  表示测量误差.

近年来, 两级加热流体 Rayleigh-Stokes 问题<sup>[1]</sup> 在描述聚合物溶液等非牛顿流体力学方面起着重要作用, 引起许多研究者的广泛关注. 关于 Rayleigh-Stokes 问题的正问题, 已得到很多研究成果. 文献 [2] 中, 作者利用 Fourier 系数变换和分数阶 Laplace 变换求解 Rayleigh-Stokes 问题的精确解. 文献 [3] 讨论了广义 Rayleigh-Stokes 问题某些振荡运动的精确解, 给出了无限平板振荡流的速度场和相应的解析表达式, 并用 Fourier 正弦变换和 Laplace 变换确定了振荡压力梯度引起的振动. 在文献 [4] 中, 作者使用分数阶导数方法求解边界上的 Rayleigh-Stokes 问题. 另外, 一些学者用数值方法研究了 Rayleigh-Stokes 问题. 文献 [5] 中, 作者利用隐式和显式差分数值方法, 得到了含有分数阶导数的二阶广义热流体 Rayleigh-Stokes 问题的数值解. 文献 [6] 中, 对于具有 Riemann-Liouville 分数阶导数的广义二阶流体分数阶 stokes 问题, 提出了一种计算未知阶数的数值方法. 文献 [7] 中, 针对广义二阶流体的 Rayleigh-Stokes 问题, 提出了一种在有界域内有效的近似数值方法. 文献 [8] 中, 研究了 Rayleigh-Stokes 第一问题的四阶空间精度数值方法. 文献 [9-10] 中, 研究具有分数阶导数的广义二阶热流体的 Rayleigh-Stokes 问题的数值解. 文献 [11] 中, 利用高阶差分格式和 Galerkin 谱技术求解多时间分数阶偏微分方程, 提出一种基于时间有限差分格式的方法, 证明离散方法的无条件稳定性和收敛性, 给出 Galerkin 谱法的误差估计. 文献 [12] 中, 作者给出一个高阶数值格式及其收敛阶, 并用它来求解时空分数阶扩散波方程, 同时证明该方法的收敛性和无条件稳定性. 文献 [13] 中, 作者详细介绍用无网格局部边界积分方程 (MLBIE) 方法分析 FGMS 的瞬态传热问题. 在时域和空域采用最小二乘法. 最后, 作者得到一个广义的 Sylvester 方程, 而不是一些线性方程, 证明该方法在计算上是非常有效的. 文献 [14] 中, 对于二维分数阶 Rayleigh-Stokes 问题, 主要讨论高阶差分格式和径向基函数无网格法, 并对两种方法进行比较. 证明差分格式的收敛性和稳定性, 以及该方法的高精度和高效率.

在实际问题中, 大多数流体运动和运输过程都是分布参数, 其中模型方程中使用的参数, 如物理参数、源项、初始条件和边界条件等都是未知的. 通过实测数据识别这些未知参数, 提出两级加热流体的 Rayleigh-Stokes 反问题. 根据目前的研究现状来看, Rayleigh-Stokes 问题反问题的研究还是有限的. 文献 [15] 中, 作者用带高斯随机扰动的滤波正则化方法来分析 Rayleigh-Stokes 反向问题. 文献 [16] 中, 作者用带高斯随机扰动的滤波正则化方法识别 Rayleigh-Stokes 问题的未知源, 给出正则解与精确解之间的误差估计, 但正则化参数是通过先验来选择的, 先验正则化参数依赖于未知的先验界. 文献 [17] 中, 作者考虑了一个带有控制参数的扩散方程的反问题. 介绍了几种识别控制参数的差分格式. 说明这些方法的无条件稳定性, 并对 CPU 时间进行了比较. 最后给出了数值实验的结果, 并说明了该反问题所需的精度和 CPU 时间.

在数学物理方程反问题领域中, 有许多处理此类问题的正则化方法. 例如, 简化的 Tikhonov 正则化方法<sup>[18-19]</sup>, Tikhonov 正则化方法<sup>[20-21]</sup>, 拟边界正则化方法<sup>[22-25]</sup>, 拟逆正则化方法<sup>[26-27]</sup>, 改进的核方法<sup>[28-29]</sup>, 一种改进的正则化方法<sup>[30]</sup>, Fourier 正则化方法<sup>[31-33]</sup>, Landweber 迭代正则化方法<sup>[34-38]</sup>, 分数阶 Landweber 迭代正则化方法<sup>[39]</sup> 等等.

本文利用分数阶 Landweber 迭代正则化方法研究分数阶 Rayleigh-Stokes 方程未知源识别. Klann, Mass 和 Ramlau 在文献 [40] 中首次提出分数阶 Landweber 正则化方法. 文献

[41] 中, 作者利用分数阶 Landweber 正则化方法处理一类算子方程反问题. 本文在先验和后验正则参数选择规则下, 给出正则解与精确解之间的误差估计, 后验正则化参数只依赖于可测数据, 而不依赖精确解的先验界. 通过数值例子, 发现分数阶 Landweber 正则化方法求解这一类反问题比 Landweber 正则化方法更有效.

本文组织结构如下. 第 2 节给出问题 (1.1) 的不适定性和问题 (1.1) 未知源识别的条件稳定性. 在第 3 节中, 利用分数阶 Landweber 正则化方法处理这个反问题, 并得到先验和后验收敛误差估计. 第 4 节通过数值算例证明 Landweber 正则化方法和分数阶 Landweber 正则化方法的有效性和可行性, 并对两种方法进行比较. 第 5 节给出本文的主要结论.

## 2 问题 (1.1) 的不适定性分析和条件稳定性结果

在这一节, 主要讨论问题 (1.1) 的不适定性分析和条件稳定性结果. 在区域  $\Omega$  上, 分别设  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  和  $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$  为  $-\Delta$  的特征值和特征函数, 并且满足

$$\begin{cases} \Delta \chi_n(x) = -\lambda_n \chi_n(x), & x \in \Omega, \\ \chi_n(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$  和  $\chi_n(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$  表示空间  $L^2(\Omega)$  中的一组标准正交基. 对于任意的  $p > 0$ , 定义空间  $H^p(\Omega)$  如下

$$H^p(\Omega) = \left\{ \phi \in L^2(\Omega) \mid \sum_{n=1}^\infty (1 + (\lambda_n)^2)^{\frac{p}{2}} |(\phi, \chi_n)|^2 < \infty \right\}, \quad (2.2)$$

其中  $(\cdot, \cdot)$  表示空间  $L^2(\Omega)$  上的内积, 则  $H^p(\Omega)$  是一个 Hilbert 空间, 范数定义如下

$$\|\phi\|_{H^p(\Omega)} := \left( \sum_{n=1}^\infty (1 + (\lambda_n)^2)^{\frac{p}{2}} |(\phi, \chi_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

根据文献 [42] 的结果, 问题 (1.1) 存在唯一的解, 解的表达式如下

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n u_n(t) \chi_n(x) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^t u_n(t - \tau) d\tau f_n(x) \chi_n(x), \quad (2.4)$$

其中  $\varphi_n = (\varphi(x), \chi_n(x))$ ,  $f_n = (f(x), \chi_n(x))$  是 Fourier 系数, 函数  $u_n(t)$  满足

$$u_n(t) = \int_0^\infty e^{-st} A_n(s) ds,$$

其中

$$A_n(s) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{\lambda_n s^\alpha \sin \alpha\pi}{(-s + \lambda_n \gamma s^\alpha \cos \alpha\pi + \lambda_n)^2 + (\lambda_n \gamma s^\alpha \sin \alpha\pi)^2}.$$

利用附加条件  $u(x, T) = g(x)$ , 根据 (2.4) 式, 可得

$$g(x) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n u_n(T) \chi_n(x) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^T u_n(T - \tau) d\tau f_n \chi_n(x). \quad (2.5)$$

因此

$$g_n = \varphi_n u_n(T) + f_n \int_0^T u_n(T - \tau) d\tau, \quad (2.6)$$

其中  $g_n = (g(x), \chi_n(x))$  是 Fourier 系数. 通过 (2.6) 式, 可以得到  $f(x)$  的精确解如下

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau} \chi_n(x), \quad (2.7)$$

其中  $h_n = g_n - \varphi_n u_n(T)$ . 为了分析问题的不适定性, 给出一些重要引理.

**引理 2.1**<sup>[42]</sup> 对于函数  $u_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 有下列性质.

- a)  $u_n(0) = 1$ ,  $0 < u_n(t) \leq 1$ ,  $t \geq 0$ ;
- b) 当  $t \geq 0$  时,  $u_n(t)$  是完全单调的;
- c)  $\int_0^T |u_n(t)| d\tau < \frac{1}{\lambda_n}$ ,  $T > 0$ .

**引理 2.2**<sup>[16]</sup> 假设  $\alpha \in (0, 1)$ , 对于任意的  $t \in [0, T]$ , 均有如下估计成立

$$u_n(t) \geq \frac{C(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{\lambda_n},$$

其中

$$C(\gamma, \alpha, \lambda_1) = \gamma \sin \alpha \pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-sT} s^{\alpha} ds}{\gamma^2 s^{2\alpha} + \frac{s^2}{\lambda_1^2} + 1}.$$

此外, 也有如下估计成立

$$\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau \geq \int_0^T \frac{C(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{\lambda_n} d\tau = \frac{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{\lambda_n}.$$

因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , 因此  $\frac{1}{\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau} \rightarrow \infty$ . 由公式 (2.7) 可知,  $g^\delta(x)$  的微小变化会引起  $f(x)$  的巨大变化. 因此, 问题 (1.1) 是一个不适定问题.

接下来, 将给出源项  $f(x)$  的条件稳定性的结果. 设  $f(x) \in H^p(\Omega)$  满足先验界条件

$$\|f(\cdot)\|_{H^p(\Omega)} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (\lambda_n)^2)^{\frac{p}{2}} |(f, \chi_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq E, \quad (2.8)$$

其中  $E$  和  $p$  均为正常数.

**定理 2.1** 假设先验界 (2.8) 成立, 则条件稳定性结果如下

$$\|f(x)\| \leq C_1 E^{\frac{2}{p+2}} \|h(x)\|_{\frac{p}{p+2}}, \quad p > 0, \quad (2.9)$$

其中  $C_1 = (TC(\gamma, \alpha, \lambda_1))^{-\frac{p}{p+2}}$ .

**证** 通过 (2.7) 式, 并且使用 Hölder 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau} \chi_n(x) \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left( \int_0^T u_n(T - \tau) d\tau \right)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^{\frac{4}{p+2}} \cdot h_n^{\frac{2p}{p+2}}}{\left( \int_0^T u_n(T - \tau) d\tau \right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{h_n^2}{\left( \int_0^T u_n(T - \tau) d\tau \right)^{p+2}} \right)^{\frac{2}{p+2}} \left( h_n^2 \right)^{\frac{p}{p+2}} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left( \int_0^T u_n(T - \tau) d\tau \right)^{p+2}} \right)^{\frac{2}{p+2}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 \right)^{\frac{p}{p+2}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

根据引理 2.2, 可以得到

$$\frac{1}{\left(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau\right)^{p+2}} \leq \frac{1}{\left(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau\right)^2} \left(\frac{\lambda_n}{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^p. \quad (2.11)$$

根据 (2.7), (2.8) 和 (2.11) 式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau\right)^{p+2}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau\right)^2} \left(\frac{\lambda_n}{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^p \lambda_n^p f_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^p (\lambda_n^2)^{\frac{p}{2}} f_n^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^p (1 + (\lambda_n)^2)^{\frac{p}{2}} f_n^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^p E^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

根据 (2.10) 和 (2.12) 式, 有

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &\leq \left(\left(\frac{1}{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^p E^2\right)^{\frac{2}{p+2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2\right)^{\frac{p}{p+2}} \\ &= \left(\frac{1}{TC(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^{\frac{2p}{p+2}} E^{\frac{4}{p+2}} \|h(x)\|^{\frac{2p}{p+2}} = C_1^2 E^{\frac{4}{p+2}} \|h(x)\|^{\frac{2p}{p+2}}, \end{aligned}$$

其中  $C_1 = (TC(\gamma, \alpha, \lambda_1))^{-\frac{p}{p+2}}$ .

因此, 可以得到如下结果

$$\|f(x)\| \leq C_1 E^{\frac{2}{p+2}} \|h(x)\|^{\frac{p}{p+2}}, \quad p > 0.$$

定理 2.1 证毕. |

在下一节, 首先引入 Landweber 迭代正则化方法, 得到 Landweber 迭代正则解, 然后给出分数阶 Landweber 迭代正则解. 采用分数阶 Landweber 迭代正则化方法求解不适定问题 (1.1).

### 3 分数阶 Landweber 迭代正则化方法和收敛误差估计

在这一节中, 主要使用分数阶 Landweber 迭代正则化方法来解决不适定问题 (1.1). 在先验正则化参数选取规则和后验正则化参数选取规则的情况下, 得到精确解与正则解之间的收敛误差估计. 识别源项  $f(x)$  可以转化为求解以下积分方程

$$(\mathcal{K}f)(x) := \int_{\Omega} k(x, \xi) f(\xi) d\xi = h(x), \quad (3.1)$$

其中

$$k(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T u_n(T-\tau) d\tau \chi_n(x) \chi_n(\xi).$$

因为核函数  $k(x, \xi) = k(\xi, x)$ , 因此  $\mathcal{K}$  是一个自伴算子. 设  $f_1^{m, \delta}(x)$  为反演源项问题 (1.1) 的 Landweber 迭代正则解. 使用积分方程  $f_1 = (I - a\mathcal{K}^*\mathcal{K})f_1 + a\mathcal{K}^*h$  来代替方程  $\mathcal{K}f_1 = h$ , 就可以得到下列迭代格式

$$f_1^{0, \delta}(x) = 0, \quad f_1^{m, \delta}(x) = (I - a\mathcal{K}^*\mathcal{K})f_1^{m-1, \delta}(x) + a\mathcal{K}^*h^\delta(x), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.2)$$

其中  $I$  是一个单位算子,  $m$  是迭代步数, 也被称为正则化参数,  $a$  表示松弛因子, 并且满足  $0 < a < \frac{1}{\|\mathcal{K}\|^2}$ . 由于  $\mathcal{K}$  一个自伴算子, 可以通过如下式子来表示  $\mathcal{R}_m : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

$$\mathcal{R}_m = a \sum_{k=0}^{m-1} (I - a\mathcal{K}^*\mathcal{K})^k \mathcal{K}^*, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

因此, 通过简单计算可得  $f_1^{m, \delta}(x)$  的表达式如下

$$f_1^{m, \delta}(x) = \mathcal{R}_m h^\delta(x) = a \sum_{k=0}^{m-1} (I - a\mathcal{K}^*\mathcal{K})^k \mathcal{K}^* h^\delta(x).$$

利用算子  $\mathcal{K}$  的奇异值和 (3.2) 式, 可得 Landweber 迭代正则解如下

$$f_1^{m, \delta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau)^2)^m}{\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau} h_n^\delta \chi_n(x), \quad (3.3)$$

其中  $h_n^\delta = (h^\delta(x), \chi_n(x))$ .

则含有测量误差  $\delta$  的分数阶 Landweber 正则解

$$f^{m, \delta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau)^2)^m]^\beta}{\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau} h_n^\delta \chi_n(x). \quad (3.4)$$

含有精确数据的分数阶 Landweber 正则解

$$f^m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau)^2)^m]^\beta}{\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau} h_n \chi_n(x), \quad (3.5)$$

其中  $m \geq 1$  称为正则化参数,  $0 < a < \frac{1}{(\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau)^2}$ ,  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$  称为分数阶参数.

### 3.1 基于先验正则化参数选取规则的收敛误差估计

**定理 3.1** 设  $f^{m, \delta}(x)$  为分数阶 Landweber 迭代正则解, 具体的表达式通过 (3.4) 式给出. 设先验界条件 (2.8) 和假设 (1.2) 成立. 选取正则化参数为  $m = [b]$ , 其中

$$b = \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{4}{p+2}}, \quad (3.6)$$

则得到下列收敛误差估计

$$\|f^{m, \delta}(\cdot) - f(\cdot)\| \leq C_2 E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}}, \quad (3.7)$$

其中  $[b]$  表示小于或等于  $b$  的最大整数,  $C_2 := \sqrt{a} + \left(\frac{p}{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^{\frac{p}{2}}$  是正常数.

**证** 利用三角不等式可得

根据 (1.2) 式, 可得

$$\begin{aligned} \|f^{m,\delta}(\cdot) - f^m(\cdot)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m]^\beta}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} h_n^\delta \chi_n(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m]^\beta}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} h_n \chi_n(x) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m]^\beta}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} (h_n^\delta - h_n) \chi_n(x) \right\|^2 \\ &\leq \sup_{n \geq 1} (C_2(n))^2 \delta^2, \end{aligned}$$

其中  $C_2(n) := \frac{[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m]^\beta}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau}$ . 因为  $\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau$  是算子  $\mathcal{K}$  的奇异值, 并且  $0 < a < \frac{1}{\|\mathcal{K}\|^2}$ , 因此  $0 < a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2 < 1$ . 根据 Bernoulli 不等式, 可得

$$\begin{aligned} 1 - \left(1 - a \left(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau\right)^2\right)^m &\leq \sqrt{1 - \left(1 - a \left(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau\right)^2\right)^m} \\ &\leq \sqrt{am} \int_0^T u_n(T-\tau)d\tau, \end{aligned}$$

从而  $C_2(n) \leq \sqrt{am}$ , 即

$$\|f^{m,\delta}(\cdot) - f^m(\cdot)\| \leq \sup_{n \geq 1} C_2(n) \delta \leq \sqrt{am} \delta. \tag{3.9}$$

由 (2.8) 式, 可得

$$\begin{aligned} \|f^m(\cdot) - f(\cdot)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m]^\beta}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} h_n \chi_n(x) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} h_n \chi_n(x) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m]^\beta - 1]}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} h_n \chi_n(x) \right\|^2 \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[[1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m] - 1]}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} h_n \chi_n(x) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} (\lambda_n)^{-\frac{\beta}{2}} (\lambda_n)^{\frac{\beta}{2}} h_n \chi_n(x) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m (\lambda_n)^{-\frac{\beta}{2}} (\lambda_n)^{\frac{\beta}{2}} \frac{h_n}{\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau} \chi_n(x) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m (\lambda_n)^{-\frac{\beta}{2}} (\lambda_n)^{\frac{\beta}{2}} f_n \chi_n(x) \right\|^2 \\ &\leq \sup_{\lambda_n > 0} \left( (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^m (\lambda_n)^{-\frac{\beta}{2}} \right)^2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^{\frac{\beta}{2}} f_n \chi_n(x) \right\|^2 \\ &\leq \sup_{\lambda_n > 0} (C_3(\lambda_n))^2 E^2, \end{aligned}$$

其中  $C_3(\lambda_n) := (1 - a(\int_0^T u_n(T - \tau)d\tau)^2)^m (\lambda_n)^{-\frac{p}{2}}$ .

根据引理 2.2, 有

$$C_3(n) \leq \left(1 - \frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{(\lambda_n)^2}\right)^m (\lambda_n)^{-\frac{p}{2}}.$$

设  $H(s) := \left(1 - \frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{s^2}\right)^m s^{-\frac{p}{2}}$ ,  $s := \lambda_n$ .

假设  $s_0$  满足  $H'(s_0) = 0$ , 可得

$$s_0 = \left(\frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)(4m + p)}{p}\right)^{\frac{1}{2}},$$

因此

$$\begin{aligned} H(s) \leq H(s_0) &= \left(1 - \frac{p}{4m + p}\right)^m \left(\frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)(4m + p)}{p}\right)^{-\frac{p}{2}} \\ &\leq \left(\frac{p}{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^{\frac{p}{4}} (m + 1)^{-\frac{p}{4}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

则

$$\|f^m(\cdot) - f(\cdot)\| \leq \sup_{\lambda_n \geq 0} C_3(n)E \leq H(s)E \leq \left(\frac{p}{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^{\frac{p}{4}} (m + 1)^{-\frac{p}{4}} E. \quad (3.11)$$

结合 (3.6), (3.8), (3.9) 与 (3.11) 式, 可得

$$\|f^{m,\delta}(\cdot) - f(\cdot)\| \leq C_2 E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}},$$

其中  $C_2 = \sqrt{a} + \left(\frac{p}{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^{\frac{p}{4}}$ . 定理 3.1 证毕. |

### 3.2 基于后验正则化参数选取规则的收敛误差估计

在这一节, 主要考虑 Morozov 不一致原理<sup>[43]</sup> 作为后验正则化参数选取规则, 并给出在后验正则化参数选取规则下的收敛误差估计.

假设  $\tau > 1$  是一个固定的常数. 后验正则化参数选取规则如下: 当满足

$$\|\mathcal{K}f^{m,\delta}(\cdot) - h^\delta(\cdot)\| \leq \tau\delta \quad (3.12)$$

的  $m = m(\delta) \in \mathbb{N}_0$  第一次出现时, 迭代停止, 其中  $\|h^\delta\| \geq \tau\delta$  是常数.

**引理 3.1** 令  $\rho(m) = \|\mathcal{K}f^{m,\delta}(\cdot) - h^\delta(\cdot)\|$ , 可以得到如下性质.

- a)  $\rho(m)$  是一个连续函数;
- b)  $\lim_{m \rightarrow 0} \rho(m) = \|h^\delta\|$ ;
- c)  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \rho(m) = 0$ ;
- d) 对于任何  $m \in (0, +\infty)$ ,  $\rho(m)$  是一个严格单调递减的函数.

**证** 根据  $\rho(m)$  的表达式

$$\rho(m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} ([1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T - \tau)d\tau)^2)^m]^\beta - 1)^2 (h_n^\delta)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

可以看出, 四个性质显然成立. 引理 3.1 证毕. |

(C)注 3.1 根据引理 3.1 可知, 通过 (3.12) 式选取的  $m$  是唯一的. All rights reserved. <http://www.cnki.net>



**引理 3.2** 假设先验界条件 (2.8) 和假设 (1.2) 成立. 对于固定的  $\tau > 1$ , 如果通过 Morozov 不一致原理 (3.12) 式选取正则化参数, 那么正则化参数  $m = m(\delta)$  需要满足如下表达式

$$m \leq \left( \frac{p+2}{2aT^2C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)} \right) \left( \frac{1}{\tau-1} \right)^{\frac{4}{p+2}} \left( \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{4}{p+2}}. \tag{3.13}$$

证 因为  $|1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2| < 1$ , 根据 (1.2) 式, 有

$$\begin{aligned} \tau\delta \leq \| \mathcal{K}f^{m-1, \delta} - h^\delta \| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left( [1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1}]^\beta - 1 \right) h_n^\delta \chi_n(x) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left( (1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1}) - 1 \right) h_n^\delta \chi_n(x) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1} (h_n^\delta - h_n) \chi_n(x) \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1} h_n \chi_n(x) \right\| \\ &\leq \delta + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1} h_n \chi_n(x) \right\|, \end{aligned}$$

则

$$\tau\delta \leq \delta + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1} h_n \chi_n(x) \right\|. \tag{3.14}$$

根据 (2.8) 式, 有

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1} h_n \chi_n(x) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1} \int_0^T u_n(T-\tau)d\tau (\lambda_n)^{-\frac{p}{2}} (\lambda_n)^{\frac{p}{2}} f_n \chi_n(x) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1} \int_0^T u_n(T-\tau)d\tau (\lambda_n)^{-\frac{p}{2}} (1 + (\lambda_n)^2)^{\frac{p}{2}} f_n \chi_n(x) \right\| \\ &\leq \sup_{n \geq 1} C_4(\lambda_n) E, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中  $C_4(\lambda_n) := (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau)d\tau)^2)^{m-1} \int_0^T u_n(T-\tau)d\tau (\lambda_n)^{-\frac{p}{2}}$ .

根据引理 2.1 和引理 2.2, 可得

$$C_4(\lambda_n) \leq \left( 1 - \frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{(\lambda_n)^2} \right)^{m-1} (\lambda_n)^{-(\frac{p}{2}+1)}.$$

令  $I(s) := (1 - \frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{s^2})^{m-1} s^{-(\frac{p}{2}+1)}$ ,  $s := \lambda_n$ .

根据  $I(s)$  的表达式, 有

$$I'(s) = (m-1) \left( 1 - \frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{s^2} \right)^{m-2} \cdot 2T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1) s^{-3-(\frac{p}{2}+1)}$$

假设  $s_1$  满足  $I'(s_1) = 0$ , 可得

$$\begin{aligned} & (m-1) \left(1 - \frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{s_1^2}\right)^{m-2} \cdot 2T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1) s_1^{-3-(\frac{p}{2}+1)} \\ & - \left(\frac{p}{2}+1\right) s_1^{-(\frac{p}{2}+1)-1} \cdot \left(1 - \frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{s_1^2}\right)^{m-1} = 0, \\ & 2(m-1)T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1) s_1^{-2} = \left(\frac{p}{2}+1\right) \left(1 - \frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}{s_1^2}\right), \\ & s_1^2 = \left(\frac{4m+p-2}{p+2}\right) T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1), \end{aligned}$$

即

$$s_1 = \left(\frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)(4m+p-2)}{p+2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此

$$I(s_1) = \left(1 - \frac{p+2}{4m+p-2}\right)^{m-1} \left(\frac{T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)(4m+p-2)}{p+2}\right)^{-\frac{p+2}{4}} \quad (3.16)$$

$$\leq \left(\frac{p+2}{2T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^{\frac{p+2}{4}} m^{-\frac{p+2}{4}}. \quad (3.17)$$

根据 (3.15) 和 (3.16) 式, 有

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau) d\tau)^2)^{m-1} h_n \chi_n(x) \right\| \\ & \leq \sup_{n \geq 1} C_4(n) E \leq I(s_1) E \leq \left(\frac{p+2}{2T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^{\frac{p+2}{4}} m^{-\frac{p+2}{4}} E. \end{aligned} \quad (3.18)$$

结合 (3.14) 和 (3.18) 式, 可得

$$m \leq \left(\frac{p+2}{2T^2 a C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right) \left(\frac{1}{\tau-1}\right)^{\frac{4}{p+2}} \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{4}{p+2}}.$$

引理 3.2 证毕. |

**引理 3.3** 根据 (1.2) 和 (3.12) 式, 有

$$\|\mathcal{K}(f^m(\cdot) - f(\cdot))\| \leq (\tau+1)\delta. \quad (3.19)$$

证

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(f^m(\cdot) - f(\cdot))\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} ([1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau) d\tau)^2)^m]^\beta - 1) h_n \chi_n(x) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} ([1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau) d\tau)^2)^m]^\beta - 1) (h_n - h_n^\delta) \chi_n(x) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} ([1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T-\tau) d\tau)^2)^m]^\beta - 1) h_n^\delta \chi_n(x) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a(\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau)^2)^m (h_n - h_n^\delta) \chi_n(x) \right\| \\ & \quad + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} ([1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau)^2)^m]^\beta - 1) h_n^\delta \chi_n(x) \right\| \\ & \leq (\tau + 1)\delta. \end{aligned} \tag{3.20}$$

引理 3.3 证毕. |

**定理 3.2** 设  $f^{m,\delta}(x)$  是 (3.4) 式给定的问题 (1.1) 的分数阶 Landweber 迭代正则解. 设先验界条件 (2.8) 和假设 (1.2) 均成立. 如果正则化参数  $m = m(\delta)$  的选取规则满足 Morozov 不一致原理 (3.12), 则得到如下误差估计

$$\|f^{m,\delta}(\cdot) - f(\cdot)\| \leq C_5 E \frac{\delta^2}{\tau^{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}}, \tag{3.21}$$

其中  $C_5 := (\frac{p+2}{2T^2 C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)})^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{\tau-1})^{\frac{2}{p+2}} + C_1(\tau + 1)^{\frac{p}{p+2}}$  是正常数.

**证** 利用三角不等式可得

$$\|f^{m,\delta}(\cdot) - f^m(\cdot)\| \leq \|f^{m,\delta}(\cdot) - f^m(\cdot)\| + \|f^m(\cdot) - f(\cdot)\|. \tag{3.22}$$

根据引理 3.3 和 (3.9) 式, 可得

$$\|f^{m,\delta}(\cdot) - f^m(\cdot)\| \leq \sqrt{am}\delta \leq \left(\frac{p+2}{2T^2 C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau-1}\right)^{\frac{2}{p+2}} E \frac{\delta^2}{\tau^{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}}. \tag{3.23}$$

利用先验界条件 (2.8), 有

$$\begin{aligned} \|f^m(\cdot) - f(\cdot)\|_{H^p(\Omega)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{\frac{p}{2}} [1 - (1 - a(\int_0^T u_n(T - \tau) d\tau)^2)^m]^\beta - 1 \right\| f_n \chi_n(x) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (\lambda_n)^2)^{\frac{p}{2}} f_n \chi_n(x) \right\| \leq E. \end{aligned}$$

此外, 根据定理 2.3 和引理 3.4, 有

$$\|f^m(\cdot) - f(\cdot)\| \leq C_1(\tau + 1)^{\frac{p}{p+2}} E \frac{\delta^2}{\tau^{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}}. \tag{3.24}$$

结合 (3.22), (3.23) 和 (3.24) 式, 可得

$$\|f^{m,\delta}(\cdot) - f(\cdot)\| \leq C_5 E \frac{\delta^2}{\tau^{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}},$$

其中  $C_5 = (\frac{p+2}{2T^2 C^2(\gamma, \alpha, \lambda_1)})^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{\tau-1})^{\frac{2}{p+2}} + C_1(\tau + 1)^{\frac{p}{p+2}}$ .

定理 3.2 证毕. |

### 4 数值例子

在这一部分, 通过几个数值例子来证明 Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的有效性和可行性.

设  $\Omega = (0, 1)$ ,  $T = 1$ . 首先, 通过解决正问题 (4.1) 来确定终止数据  $g(x)$ .

$$\begin{cases} \partial_t^R u(x, t) - (1 + \gamma_0^R \partial_t^\alpha) \Delta u(x, t) = f(x), & x \in (0, 1), t \in (0, 1), \alpha \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in (0, 1), \\ u(x, 1) = g(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (4.1)$$

其中  $f(x), \varphi(x)$  是给定的.

其次, 利用有限差分法离散问题 (4.1). 此外, 介绍了两种离散格式, 即后向差分格式 (BD) 和 Crank-Nicolson 差分格式 (C-N), 这两种离散格式都是无条件稳定的. 定义

$$t_k = k\Delta t (k = 0, 1, \dots, N), \quad x_i = i\Delta x (i = 0, 1, \dots, M), \quad (4.2)$$

其中  $\Delta t = \frac{1}{N}$  时间方向的步长,  $\Delta x = \frac{1}{M}$  是空间方向的步长.

首先给出 BD 迭代格式. 第一步, 利用 Grünwald-Letnikov 公式离散 Riemann-Liouville 算子 [45]

$${}_0^R \partial_t^\alpha u(x, t) |_{x_i, t_k} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{[tk/h]} \varpi_j^{(\alpha)} u(x_i, t_k - jh) + \mathcal{O}(h^q), \quad (4.3)$$

其中  $[tk/h]$  表示  $tk/h$  的整数部分,  $\varpi_j^{(\alpha)}$  是生成函数  $\varpi(z, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \varpi_j^{(\alpha)} z^j$  的系数.

在 (4.3) 式中, 当  $q = 1$  并且  $\varpi(z, \alpha) = (1 - z)^\alpha$  时, 它被称为简化的 Grünwald-Letnikov 公式 [45]. 在这种情况下, 通常用递推公式

$$\varpi_0^{(\alpha)} = 1, \quad \varpi_j^{(\alpha)} = (1 - \frac{\alpha + 1}{j}) \varpi_{j-1}^{(\alpha)} \quad (4.4)$$

来计算系数  $\varpi_j^{(\alpha)} = (-1)^j (j^\alpha)$ .

如果  $h = \Delta t$ , 方程 (4.3) 可用网格点

$${}_0^R \partial_t^\alpha u(x, t) |_{x_i, t_k} = \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=0}^k \varpi_j^{(\alpha)} u_i^{k-j} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (4.5)$$

计算的  $u(x, t)$  来表示.

第二步, 需要使用反向差分公式来离散微分算子

$$\partial_t u(x, t) |_{x_i, t_k} = \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (4.6)$$

与

$$\partial_{xx} u(x, t) |_{x_i, t_k} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \quad (4.7)$$

根据 (4.5)–(4.7) 式, 可以得到问题 (4.1) 的 BD 迭代形式, 表达式如下

$$u_i^k = u_i^{k-1} + \mu_1 \delta_x^2 u_i^k + \mu_2 \sum_{j=0}^k \varpi_j^{(\alpha)} \delta_x^2 u_i^{k-j} + f_i, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (4.8)$$

其中  $\mu_1 = \Delta t / (\Delta x)^2$ ,  $\mu_2 = \gamma_0 (1 - \alpha) / (\Delta x)^2$  与  $\delta_x^2 u_i^k = u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k$ . <http://www.cnki.net>

接下来, 将给出问题 (4.1) 的第二种迭代格式, 即 Crank-Nicolson 迭代方法. Crank-Nicolson 迭代法具有二阶精度. 因此, 对于  $t \in [0, T]$ , 可以在节点  $U_{n-1}$  和  $U_n$  之间进行线性插值. 根据文献 [46], 可以得到问题 (4.1) 的 Crank-Nicolson 迭代格式如下

$$h(u_i^{k+1} - u_j^k) - p(u_{i+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) - q \sum_{i=0}^{\infty} \omega_k^\alpha (u_{i-1}^{k+1} - 2u_{i-1}^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) = f_i, \quad (4.9)$$

其中  $k = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $i = 1, 2, \dots, M-1$ ,  $h = \frac{1}{\Delta t}$ ,  $p = \frac{1}{(\Delta x)^2}$ ,  $q = \frac{\gamma}{(\Delta t)^\alpha \alpha (\Delta x)^2}$  与  $\omega_0^{(\alpha)} = 1$ ,  $\omega_k^{(\alpha)} = (1 - \frac{\alpha+1}{k})\omega_{k-1}^{(\alpha)}$ .

采用 BD 迭代法和 Crank-Nicolson 迭代法, 用 MATLAB 软件编程运行, 可以得到函数  $g$ , 就可以解决一个反问题.

最后, 通过如下表达式得到 Landweber 正则解

$$f_1^{m,\delta} = a \sum_{k=0}^{m-1} (I - a\mathcal{K}^*\mathcal{K})^k \mathcal{K}^* g^\delta,$$

通过如下表达式得到分数阶 Landweber 正则解

$$f^{m,\delta} = a \sum_{k=0}^{m-1} (I - (I - a\mathcal{K}^*\mathcal{K})^k)^\beta \mathcal{K}^* g^\delta,$$

其中  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ .

在实际应用中, 数据  $g$  只能通过测量得到. 这样, 就会产生一定的测量误差. 在数值模拟中, 对数据  $g$  加上随机扰动, 通过随机扰动产生噪声数据  $g^\delta$ , 即

$$g^\delta = g + \varepsilon \cdot \text{randn}(\text{size}(g)),$$

其中函数  $\text{randn}(\cdot)$  表示生成平均值为 0 且方差为 1 的随机数,  $\varepsilon$  表示相对误差. 绝对误差  $\delta$  表示为

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{i=1}^{M+1} (g_i - g_i^\delta)^2}.$$

为了验证数值解的准确性, 使用以下方法计算相对均方根误差

$$\eta(f) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n (f^{m,\delta}(x_i) - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n f(x_i)^2} \right)^{1/2},$$

其中  $n$  表示测试点的总数.

先验正则化参数是建立在精确解的光滑条件上的, 这在实际问题中是很难给出的. 下面的例子基于后验正则化参数选择规则 (3.12) 来验证 Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的有效性和稳定性.

通过简单计算, 在式 (2.1) 中, 对于  $n = 1, 2, \dots$ , 可以得到  $\lambda_n = (n\pi)^2$  与  $\chi_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$ . 在 (4.1), (2.8), (3.12) 与 (3.4) 式中, 分别设  $\gamma = 1$ ,  $p = 2$ ,  $\tau = 1.01$  与  $\beta = 0.55$ . 令  $M = 100$ ,  $N = 40$ , 给出以下三个数值例子.

(C) 例 9.1-2 考虑光滑函数  $f(x) = (x(1-x))^\alpha \sin(5\pi x)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $\varphi(x) \neq 0$ . Rights reserved. <http://www.cnki.net>

### 例 2 考虑分段光滑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 4(x - \frac{1}{4}), & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ -4(x - \frac{3}{4}), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases} \quad \varphi(x) = 2x, x \in [0, 1].$$

### 例 3 考虑一个非光滑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/3], \\ 1, & x \in (1/3, 2/3], \\ 0, & x \in (2/3, 1]. \end{cases} \quad \varphi(x) = 0.$$

图 1-2 分别展示了例 1 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  的情况下, 对于不同的相对误差水平  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  和 Landweber 迭代正则解  $f_1^{m,\delta}(x)$  在 BD 和 C-N 两种迭代形式下的比较. 图 3-4 分别展示了例 1 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  的情况下, 对于不同的相对误差水平  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  和分数阶 Landweber 迭代正则解  $f^{m,\delta}(x)$  在 BD 和 C-N 两种迭代形式下的比较.

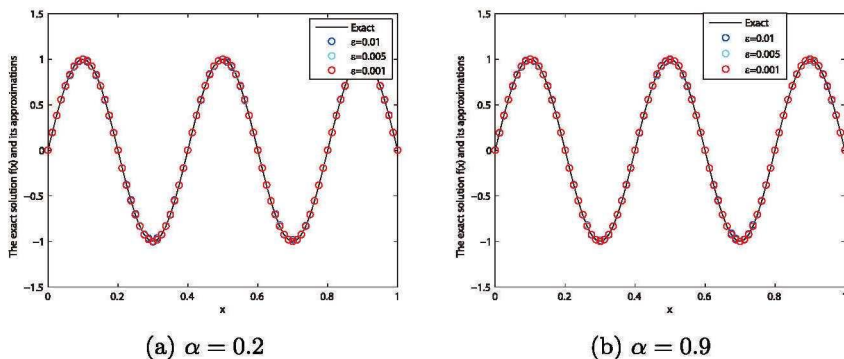


图 1 例 1 在 BD 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与 Landweber 正则解  $f_1^{m,\delta}(x)$  的比较

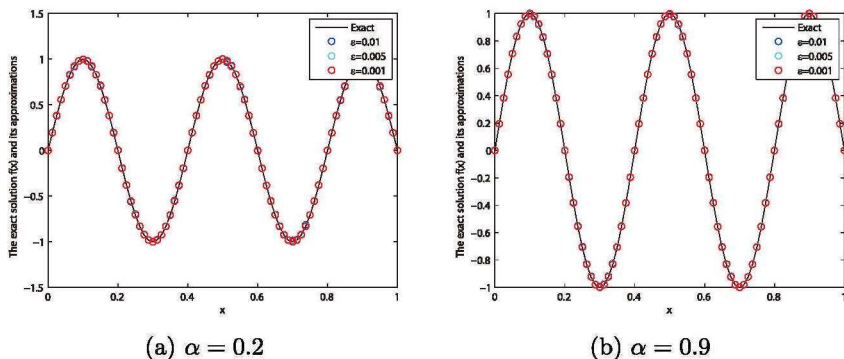


图 2 例 1 在 C-N 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$

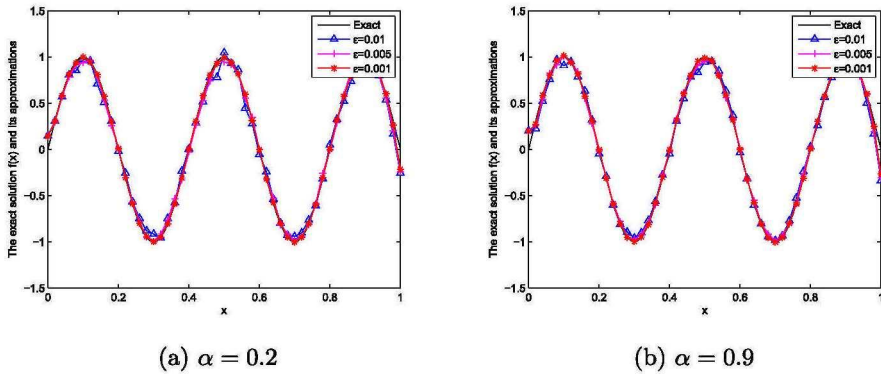


图 3 例 1 在 BD 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与分数阶 Landweber 正则解  $f^{m,\delta}(x)$  的比较

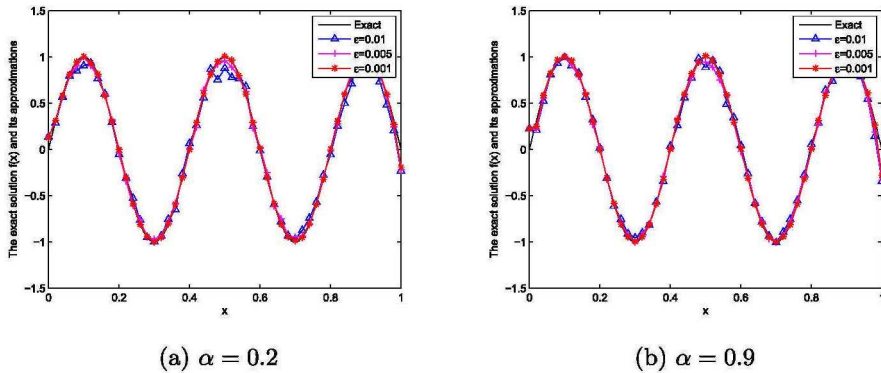


图 4 例 1 在 C-N 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与分数阶 Landweber 正则解  $f^{m,\delta}(x)$  的比较

表 1 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 1 的精确解与正则解之间的相对均方根误差

$\alpha$			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	
$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	0.0099	0.0083	0.0075	
		C-N	0.0072	0.0052	0.0041	
	分数阶 Landweber	BD	0.0088	0.0076	0.0061	
		C-N	0.0063	0.0048	0.0039	
$\eta(f)$	$\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	0.0042	0.0039	0.0034
		C-N	0.0041	0.0035	0.0025	
	分数阶 Landweber	BD	0.0038	0.0035	0.0021	
		C-N	0.0031	0.0028	0.0011	
$\varepsilon = 0.001$	Landweber	BD	0.0025	0.0019	7.9678e-04	
		C-N	0.0020	0.0011	5.5690e-04	
	分数阶 Landweber	BD	0.0018	0.0010	7.1943e-04	
		C-N	0.0011	8.7631e-04	4.6982e-04	

表 1 显示了例 1 在 BD 和 C-N 两种迭代形式下, 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$ , Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的相对均方根误差的比较. 表 2 显示了例 1 在 BD 和 C-N 两种迭代形式下, 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$  Landweber 迭代正则化方法和分数阶

Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的迭代步数的比较. 表 3 显示了例 1 在 BD 和 C-N 两种迭代形式下, 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$ , Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的 CPU 运行时间的比较.

表 2 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 1 的精确解与正则解之间的迭代次数

$\alpha$			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	
迭代步数 (m)	$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	24027	9658	30
			C-N	25556	31634	37652
	分数阶 Landweber	BD	19683	6514	21	
		C-N	21423	23963	29685	
	$\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	46820	21349	34
			C-N	27941	30652	39541
分数阶 Landweber	BD	39870	12981	29		
	C-N	19685	23916	33921		
$\varepsilon = 0.001$	Landweber	BD	79686	38679	44	
		C-N	35719	42387	52802	
分数阶 Landweber	BD	68765	27695	38		
	C-N	26985	34796	44348		

表 3 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 1 的精确解与正则解之间的 CPU 时间

$\alpha$			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	
CPU 时间 (unit: s)	$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	480.54	193.16	0.60
			C-N	511.12	632.68	753.04
	分数阶 Landweber	BD	393.66	130.28	0.42	
		C-N	428.46	479.26	593.70	
	$\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	936.40	426.98	0.68
			C-N	558.82	613.04	790.82
分数阶 Landweber	BD	797.40	259.62	0.58		
	C-N	393.70	478.32	678.42		
$\varepsilon = 0.001$	Landweber	BD	1593.72	773.58	0.88	
		C-N	714.38	847.74	1056.04	
分数阶 Landweber	BD	1375.30	553.90	0.76		
	C-N	539.70	695.92	886.96		

从表 1-3 中可以发现, 在 BD 和 C-N 两种迭代格式下, 无论是 Landweber 迭代正则化方法还是分数阶 Landweber 迭代正则化方法, 相对均方根误差  $\eta(f)$  随着  $\alpha$  的增大而减小, 随着  $\varepsilon$  的减小而减小. 对于迭代步数  $m$  而言, 在 BD 迭代格式下, 随着  $\alpha$  的增大而减小, 随着  $\varepsilon$  的减小而增大, 但在 C-N 迭代格式下, 随着  $\alpha$  的增大而增大, 随着  $\varepsilon$  的减小而增大. 同样, 对于 CPU 时间, 在 BD 迭代格式下, 随着  $\alpha$  的增大而减小, 随着  $\varepsilon$  的减小而增大, 但在 C-N 迭代格式下, 随着  $\alpha$  的增大而增大, 随着  $\varepsilon$  的减小而增大. 此外, 无论是相对均方根误差  $\eta(f)$ 、迭代步数  $m$ , 还是 CPU 时间, 分数阶 Landweber 迭代正则化方法所得结果均小于 Landweber 迭代正则化方法所得结果.



图 5-6 分别展示了例 2 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  的情况下, 对于不同的相对误差水平  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  和 Landweber 迭代正则解  $f_1^{m,\delta}(x)$  在 BD 和 C-N 两种迭代形式下的比较. 图 7-8 分别展示了例 2 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  的情况下, 对于不同的相对误差水平  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  和分数阶 Landweber 迭代正则解  $f^{m,\delta}(x)$  在 BD 和 C-N 两种迭代形式下的比较.

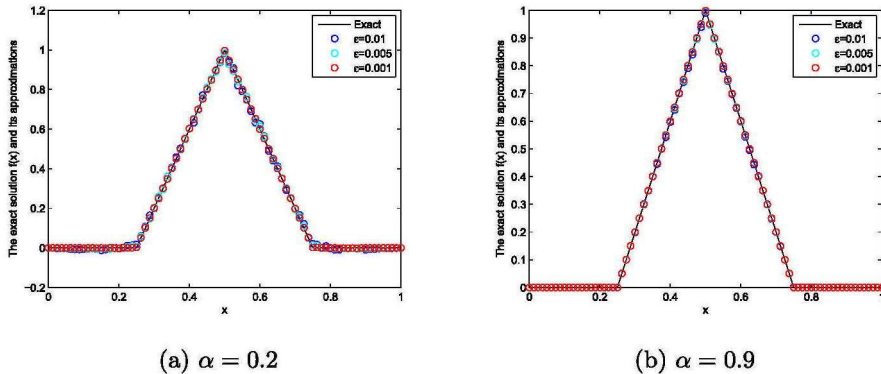


图 5 例 2 在 BD 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与 Landweber 正则解  $f_1^{m,\delta}(x)$  的比较

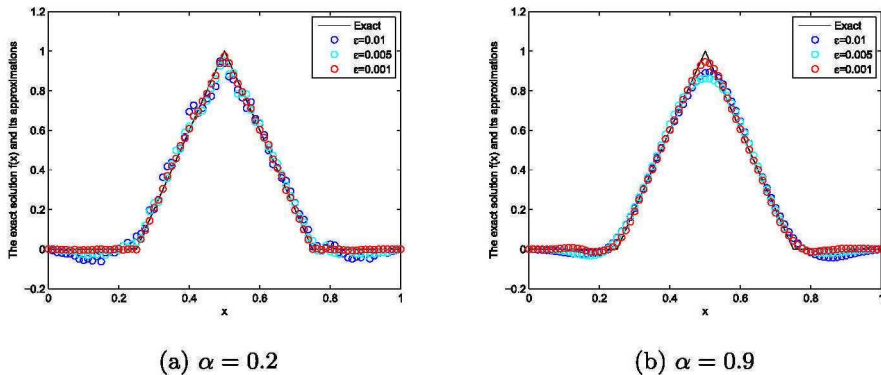


图 6 例 2 在 C-N 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与 Landweber 正则解  $f_1^{m,\delta}(x)$  的比较

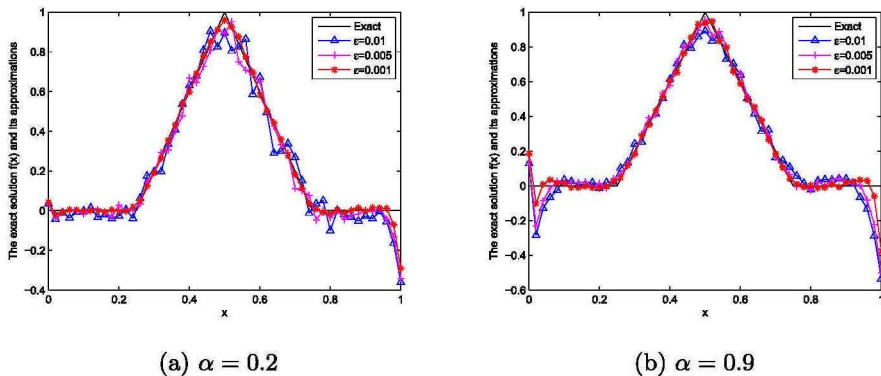
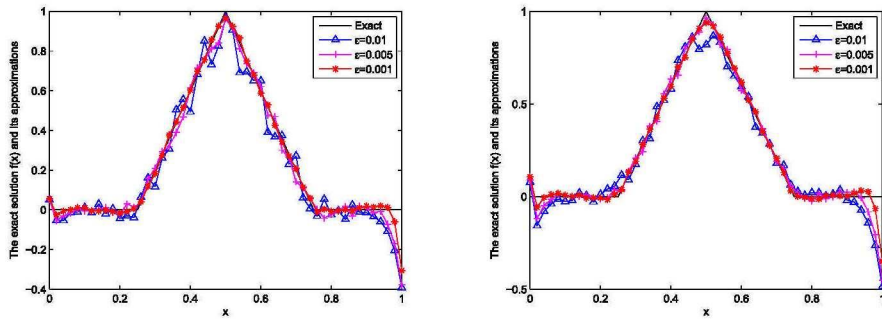


图 7 例 2 在 BD 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与分数阶 Landweber 正则解  $f^{m,\delta}(x)$  的比较



(a)  $\alpha = 0.2$

(b)  $\alpha = 0.9$

图 8 例 2 在 C-N 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与分数阶 Landweber 正则解  $f^{m,\delta}(x)$  的比较

表 4 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 2 的精确解与正则解之间的相对均方根误差

$\alpha$			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	0.0243	0.0128	0.0088
		C-N	0.1039	0.0864	0.0747
	分数阶 Landweber	BD	0.0208	0.0106	0.0075
		C-N	0.0931	0.0705	0.0628
$\eta(f)$ $\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	0.0155	0.0116	0.0076
		C-N	0.0838	0.0725	0.0634
	分数阶 Landweber	BD	0.0191	0.0103	0.0063
		C-N	0.0786	0.0596	0.0413
$\varepsilon = 0.001$	Landweber	BD	0.0033	0.0019	8.6476e-04
		C-N	0.0589	0.0362	0.0295
	分数阶 Landweber	BD	0.0021	0.0011	6.5483e-04
		C-N	0.0412	0.0268	0.0105

表 5 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 2 的精确解与正则解之间的迭代次数

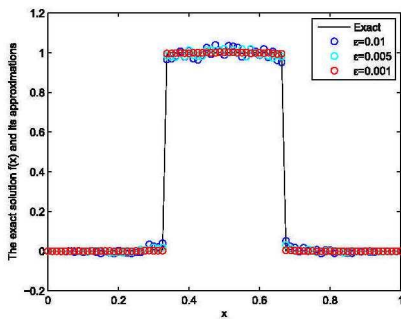
$\alpha$			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	22348	6987	29
		C-N	3717	5816	7425
	分数阶 Landweber	BD	16534	3768	19
		C-N	2674	4168	6123
迭代步数 (m) $\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	34258	12368	33
		C-N	6670	8126	11198
	分数阶 Landweber	BD	22369	6879	26
		C-N	4396	6021	8934
$\varepsilon = 0.001$	Landweber	BD	79463	39654	41
		C-N	15285	86956	131965
	分数阶 Landweber	BD	54986	21685	33
		C-N	13210	69663	113824

表 6 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 2 的精确解与正则解之间的 CPU 时间

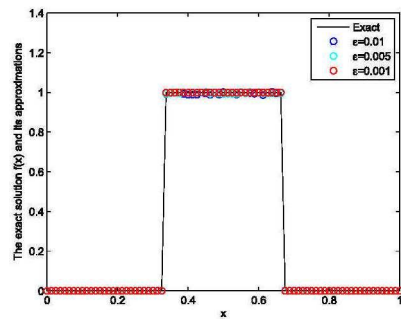
$\alpha$				$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	
CPU 时间 (unit: s)	$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	446.96	139.74	0.58	
			C-N	74.34	116.32	148.50	
		分数阶 Landweber	BD	330.68	75.36	0.38	
			C-N	53.48	83.36	122.46	
		$\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	685.16	247.36	0.66
				C-N	133.4	162.52	223.96
	分数阶 Landweber		BD	447.38	137.58	0.52	
			C-N	87.92	120.42	178.68	
	$\varepsilon = 0.001$		Landweber	BD	1589.26	793.08	0.82
				C-N	305.70	1739.12	2639.3
		分数阶 Landweber	BD	1099.72	433.70	0.66	
			C-N	264.20	1393.26	2276.48	

表 4 显示了例 2 在 BD 和 C-N 两种迭代形式下, 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$ , Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的相对均方根误差的比较. 表 5 显示了例 2 在 BD 和 C-N 两种迭代形式下, 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$ , Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的迭代次数的比较. 表 6 显示了例 2 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$ , Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的 CPU 运行时间的比较.

从表 4-6 可以看出, 在 BD 和 C-N 迭代格式下, 无论是 Landweber 迭代正则化方法还是分数阶 Landweber 迭代正则化方法, 相对均方根误差  $\eta(f)$  随着  $\alpha$  的增大而减小, 随着  $\varepsilon$  的减小而减小. 对于 CPU 时间, 在 BD 迭代格式下, 会随着  $\alpha$  的增大而减少, 随着  $\varepsilon$  的减小而增大, 但是 C-N 迭代格式随着  $\alpha$  的增大而增大, 随着  $\varepsilon$  的减小而增大. 类似地, 对于迭代步数  $m$ , BD 迭代格式随着  $\alpha$  的增大而减小, 随着  $\varepsilon$  的减小而增大, 但在 C-N 迭代格式下, 随着  $\alpha$  的增大而增大, 随着  $\varepsilon$  的减小而增大. 此外, 无论是相对均方根误差  $\eta(f)$ 、迭代步数  $m$ , 还是 CPU 时间, 分数阶 Landweber 迭代正则化方法所得结果均小于 Landweber 迭代正则化方法所得结果.

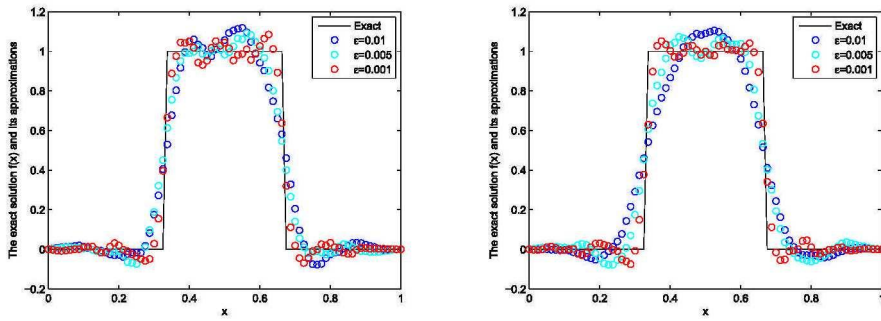


(a)  $\alpha = 0.2$



(b)  $\alpha = 0.9$

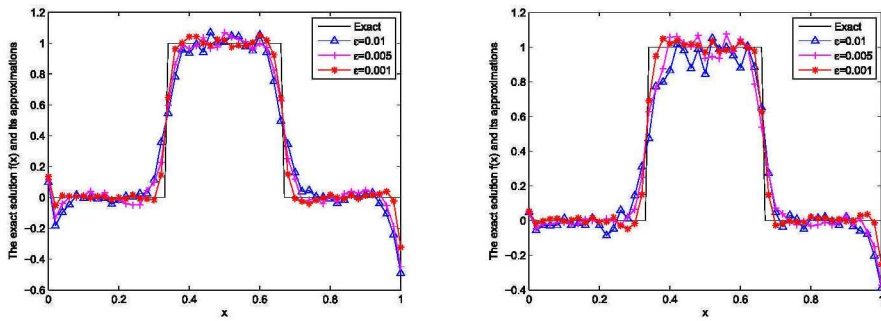
图 9 例 3 在 BD 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$



(a)  $\alpha = 0.2$

(b)  $\alpha = 0.9$

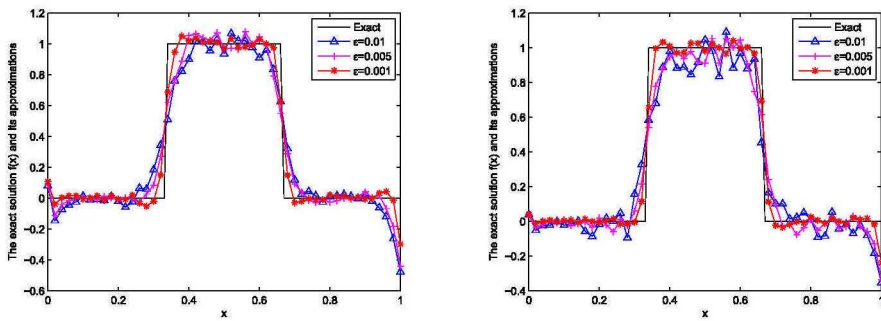
图 10 例 3 在 C-N 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与 Landweber 正则解  $f_1^{m,\delta}(x)$  的比较



(a)  $\alpha = 0.2$

(b)  $\alpha = 0.9$

图 11 例 3 在 BD 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与分数阶 Landweber 正则解  $f^{m,\delta}(x)$  的比较



(a)  $\alpha = 0.2$

(b)  $\alpha = 0.9$

图 12 例 3 在 C-N 迭代格式下, 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  下对于  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  与分数阶 Landweber 正则解  $f^{m,\delta}(x)$  的比较

图 9-10 分别展示了例 3 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  的情况下, 对于不同的相对误差水平  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  和 Landweber 迭代正则解  $f_1^{m,\delta}(x)$  在 BD 和 C-N 两种迭代形式下的比较. 图 11-12 分别展示了例 3 在  $\alpha = 0.2, 0.9$  的情况下, 对于不同的相对误差水平  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  的精确解  $f(x)$  和分数阶 Landweber 迭代正则解  $f^{m,\delta}(x)$  在 BD 和 C-N 两种迭代形式下的比较.

表 7 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 3 的精确解与正则解之间的相对均方根误差

$\alpha$			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	0.0287	0.0196	0.0100
		C-N	0.1867	0.2375	0.2735
	分数阶 Landweber	BD	0.0234	0.0165	0.0008
		C-N	0.1529	0.2143	0.2568
$\eta(f)$ $\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	0.0176	0.0102	0.0050
		C-N	0.1679	0.2139	0.2228
	分数阶 Landweber	BD	0.0153	0.0088	0.0016
		C-N	0.1428	0.1796	0.1928
$\varepsilon = 0.001$	Landweber	BD	0.0068	0.0036	0.0010
		C-N	0.0924	0.1428	0.1522
	分数阶 Landweber	BD	0.0053	0.0018	2.5638e-04
		C-N	0.0723	0.1256	0.1347

表 8 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 3 的精确解与正则解之间的迭代次数

$\alpha$			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	47906	21398	29
		C-N	4837	8878	19844
	分数阶 Landweber	BD	31695	10321	18
		C-N	2968	5367	16482
迭代步数 (m) $\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	74840	46709	33
		C-N	10244	168704	52632
	分数阶 Landweber	BD	62390	30987	28
		C-N	7688	11326	40986
$\varepsilon = 0.001$	Landweber	BD	121803	76895	42
		C-N	238323	638825	788528
	分数阶 Landweber	BD	98465	54326	37
		C-N	196524	419168	568238

表 9 对于不同的  $\alpha$  和  $\varepsilon$ , 例 3 的精确解与正则解之间的 CPU 时间

$\alpha$			$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
$\varepsilon = 0.01$	Landweber	BD	958.12	427.96	0.58
		C-N	96.74	177.56	396.88
	分数阶 Landweber	BD	639.30	206.42	0.36
		C-N	59.36	107.34	329.64
CPU 时间 (unit: s) $\varepsilon = 0.005$	Landweber	BD	1496.80	934.18	0.66
		C-N	204.88	3374.08	1052.64
	分数阶 Landweber	BD	1247.80	619.74	0.56
		C-N	153.76	226.52	819.72
$\varepsilon = 0.001$	Landweber	BD	2436.06	1537.90	0.84
		C-N	4766.46	12776.50	15770.56
	分数阶 Landweber	BD	1969.30	1086.52	0.74
		C-N	3930.48	8383.86	11364.76

表 7 显示了例 3 在 BD 和 C-N 两种迭代形式下, 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$ , Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的相对均方根误差的比较. 表 8 显示了例 3 在 BD 和 C-N 两种迭代形式下, 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$ , Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的迭代次数的比较. 表 9 显示了例 3 对于不同的  $\varepsilon = 0.01, 0.005, 0.001$  和  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.9$ , Landweber 迭代正则化方法和分数阶 Landweber 迭代正则化方法的精确解与正则解之间的消耗的 CPU 时间的比较.

从表 7-9 可以看出, 在 BD 和 C-N 迭代格式下, 对于不同的  $\varepsilon$  和  $\alpha$ , 分别给出了两种正则化方法的精确解与正则解之间的相对均方根误差  $\eta(f)$ , 迭代步数  $m$ , CPU 时间的比较. 与例 1 和例 2 相比, 不同的是在 C-N 迭代格式下, 相对均方根误差  $\eta(f)$  随着  $\alpha$  的增大而增大, 迭代步数  $m$  更大, CPU 时间更长. 这是因为例 3 是一个不光滑的函数.

从表 1-9 可以看出, 本文采用的两种差分格式是有效的, 结果是可以接受的. 对于相对均方根误差  $\eta(f)$ , BD 迭代格式得到的数值相对小于 C-N 迭代格式得到的数值. 对于迭代步数  $m$  和 CPU 时间, 总体而言, 在 C-N 迭代格式下, 迭代步数  $m$  较大, CPU 时间较长. 进一步说明了 BD 迭代格式的优越性. 此外, 对于光滑函数, 数值结果相对较小. 综上所述, 以上三个例子充分表明分数阶 Landweber 迭代正则化方法比 Landweber 迭代正则化方法更有效.

## 5 结论

本文研究 Rayleigh-Stokes 方程的源项识别反问题. 采用分数阶 Landweber 迭代正则化方法解决此类反问题 (1.1). 基于条件稳定性结果, 分别在先验和后验正则化参数选择规则下得到相应的误差估计. 利用三个数值例子验证分数阶 Landweber 迭代正则化方法和 Landweber 迭代正则化方法处理此反问题的有效性和稳定性. 通过误差估计 (3.7) 和 (3.21), 发现分数阶 Landweber 迭代正则化方法优于 Tikhonov 正则化方法, 并且这两种正则化方法得到的误差估计 (3.7) 和 (3.21) 不出现饱和效应. 但是用 Tikhonov 正则化方法来处理这个问题, 误差估计就会产生饱和现象 (所谓饱和现象是在 Tikhonov 正则化方法中, (3.7) 和 (3.21) 并不适用于所有的  $p > 0$ , 而只适用于一些  $0 < p < p_0$ , 其中  $p_0$  是一个正常数). 另外, 数值算例也说明分数阶 Landweber 迭代正则化方法比 Landweber 迭代正则化方法更有效.

## 参 考 文 献

- [1] Fetecau C. The Rayleigh-Stokes problem for heated second grade fluids. *Int J Nonlin Mech*, 2002, **37**: 1011-1015
- [2] Shen F, Tan W, Zhao Y, et al. The Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative model. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2006, **7**: 1072-1080
- [3] Khan M, Anjum A, Qi H, et al. On exact solutions for some oscillating motions of a generalized Oldroyd-B fluid. *Z Angew Math Phys*, 2010, **61**: 133-145
- [4] Khan M. The Rayleigh-Stokes problem for an edge in a viscoelastic fluid with a fractional derivative model. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2009, **10**: 3190-3195
- [5] Chen C M, Liu F, Burrage K, et al. Numerical methods of the variable-order Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative. *J Appl Math*, 2013, **204**: 340-351
- [6] Yu B, Jiang X Y, Qi H T. An inverse problem to estimate an unknown order of a Riemann-Liouville fractional derivative for a fractional Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid. *Acta Mechanica Sinica*, 2015, **31**: 153-161
- [7] Zhuang P H, Liu Q X. Numerical method of Rayleigh-Stokes problem for heated generalized second grade fluid with fractional derivative. *Appl Math Model*, 2009, **30**: 1533-1546

- [8] Chen C M, Liu F, Burrage K, et al. Numerical methods with fourth-order spatial accuracy for variable-order nonlinear Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid. *Comput Math Appl*, 2011, **62**: 971–986
- [9] Wu C. Numerical solution for Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative. *Appl Numer Math*, 2009, **59**: 2571–2583
- [10] Mohebbi A, Abbaszadeh M, Dehghan M. Compact finite difference scheme and RBF meshless approach for solving 2D Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivatives. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2013, **264**: 163–177
- [11] Dehghan M, Safarpour M, Abbaszadeh M. Two high-order numerical algorithms for solving the multi-term time fractional diffusion-wave equations. *J Comput Appl Math*, 2015, **290**: 174–195
- [12] Dehghan M, Abbaszadeh M, Deng W. Fourth-order numerical method for the space time tempered fractional diffusion-wave equation. *Appl Math Lett*, 2017, **73**: 120–127
- [13] Mirzaei D, Dehghan M. New implementation of MLBIE method for heat conduction analysis in functionally graded materials. *Eng Anal Bound Elem*, 2012, **36**: 511–519
- [14] Mohebbi A, Abbaszadeh M, Dehghan M. Compact finite difference scheme and RBF meshless approach for solving 2D Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivatives. *Comput Method Appl M*, 2013, **264**: 163–177
- [15] Nguyen H L, Nguyen H T, Mokhtar K. Identifying initial condition of the Rayleigh-Stokes problem with random noise. *Math Method Appl Sci*, 2019, DOI: 10.1002/mma.5455
- [16] Nguyen A L, Hoan Luu V C, Nguyen H L. Identification of source term for the Rayleigh-Stokes problem with Gaussian random noise. *Math Method Appl Sci*, 2018, DOI: 10.1002/mma.5101
- [17] Dehghan M. An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation. *Appl Math Model*, 2001, **25**: 743–754
- [18] Wang J, Wei T, Zhou Y. Optimal error bound and simplified Tikhonov regularization method for a backward problem for the time-fractional diffusion equation. *J Comput Appl Math*, 2015, **279**: 277–292
- [19] Yang F, Li X X, Li D G, et al. The simplified Tikhonov regularization method for solving a Riesz-Feller Space-Fractional backward diffusion problem. *Math Comput Sci*, 2017, **11**: 91–110
- [20] Wang J G, Wei T, Zhou Y B. Tikhonov regularization method for a backward problem for the time-fractional diffusion equation. *Appl Math Model*, 2013, **37**: 8518–8532
- [21] Yang F, Zhang P, Li X X, et al. Tikhonov regularization method for identifying the space-dependent source for time-fractional diffusion equation on a columnar symmetric domain. *Adv Differ Equ*, 2020, DOI: 10.1186/s13662-020-2542-1
- [22] Feng L X, Eldén L. Solving a Cauchy problem for a 3D elliptic PDE with variable coefficients by a quasi-boundary-value method. *Inverse Probl*, 2014, **30**: 015005
- [23] Wei T, Wang J. A modified quasi-boundary value method for an inverse source problem of the time-fractional diffusion equation. *Appl Numer Math*, 2014, **78**: 95–111
- [24] Yang F, Sun Y R, Li X X, et al., The quasi-boundary regularization value method for identifying the initial value of heat equation on a columnar symmetric domain. *Numer Algor*, 2019, **82**: 623–639
- [25] Yang F, Zhang Y, Liu X, Li X X. The quasi-boundary value method for identifying the initial value of the space-time an fractional diffusion equation. *Acta Math Sci*, 2020, **40**: 641–658
- [26] Qian A, Xiong X T, Wu Y. On a quasi-reversibility regularization method for a Cauchy problem of the Helmholtz equation. *J Comput Appl Math*, 2010, **233**: 1969–1979
- [27] Yang F, Fu C L. The quasi-reversibility regularization method for identifying the unknown source for time fractional diffusion equation. *Appl Math Model*, 2015, **39**: 1500–1512
- [28] Yang F, Fu J L, Li X X. A potential-free field inverse schrödinger problem: optimal error bound analysis and regularization method. *Inverse Probl Sci Engin*, 2020, **28**: 1209–1252
- [29] Yang F, Fu J L, Li X X. A potential-free field inverse time-fractional Schrödinger problem: Optimal error bound analysis and regularization method. *Math Meth Appl Sci*, 2020, <https://doi.org/10.1002/mma.6826>
- [30] Yang F, Fu C L, Li X X. A mollification regularization method for unknown source in time-fractional diffusion equation. *Int J Comput Math*, 2006, **91**: 1516–1534
- [31] Xiong X T, Fu C L, Li H F. Fourier regularization method of a sideways heat equation for determining surface heat flux. *Math Anal Appl*, 2006, **317**: 331–348
- [32] Li X X, Lei J L, Yang F. An a posteriori Fourier regularization method for identifying the unknown source of the space-fractional diffusion equation. *Inequal Appl*, 2004, **2004**: 1–13.

- [33] Yang F, Fu C L, Li X X, et al. The Fourier regularization method for identifying the unknown source for the modified Helmholtz equation. *Acta Math Sci*, 2014, **34**: 1040–1047
- [34] Yang F, Ren Y P, Li X X. Landweber iteration regularization method for identifying unknown source on a columnar symmetric domain. *Inverse Probl Sci Eng*, 2018, **26**: 1109–1129
- [35] Yang F, Liu X, Li X X. Landweber iteration regularization method for identifying unknown source of the modified Helmholtz equation. *Bound Value Probl*, 2017, **2017**: 1–16
- [36] Yang F, Zhang Y, Li X X. Landweber iterative method for identifying the initial value problem of the time-space fractional diffusion-wave equation. *Numer Algor*, 2020, **83**: 1509–1530
- [37] Yang F, Wang N, Li X X. Landweber iterative method for an inverse source problem of time-fractional diffusion-wave equation on spherically symmetric domain. *J Appl Ana Comput*, 2020, **10**: 514–529
- [38] Yang F, Zhang Y, Li X X, Ma C Y. Landweber iteration regularization method for identifying the initial value problem of the time-space fractional diffusion-wave equation. *Advances in Difference Equations*, 2017, Article Number: 388
- [39] Yang F, Pu Q, Li X X. The fractional Landweber method for identifying the space source term problem for time-space fractional diffusion equation. *Numer Algor*, 2020, doi:10.1007/s11075-020-01006-4
- [40] Klann E, Maass P, Ramlau R. Two-step regularization methods for linear inverse problems. *Inverse Ill-posed Probl*, 2006, **14**: 583–607
- [41] Klann E, Ramlau R. Regularization by fractional filter methods and data smoothing. *Inverse Probl*, 2008, **24**: 025018
- [42] Bazhlekova E, Jin B, Lazarov R, et al. An analysis of the Rayleigh-Stokes problem for a generalized second-grade fluid. *Number Math*, 2015, **131**: 1–31
- [43] Engl H W, Hanke M, Neubauer A. *Regularization of Inverse Problem*. Boston: MA, Kluwer Academic, 1996
- [44] Dehghan M, Abbaszadeh M. A finite element method for the numerical solution of Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivatives. *Eng Comput-Germany*, 2017, **33**: 587–605
- [45] Yuste S B. Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations. *J Comput Phys*, 2006, **216**: 264–274
- [46] Irene K. A posteriori error analysis for the Crank-Nicolson method for linear Schrödinger equations. *Esaim-Math Model Num*, 2011, **45**: 761–778

## Fractional Landweber Iterative Regularization Method to Identify Source Term for the Rayleigh-Stokes Equation

Yang Fan Wang Qianchao Li Xiaoxiao

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050)

**Abstract:** In this paper, the inverse problem of identifying the unknown sources for the Rayleigh-Stokes equation with a Riemann-Liouville fractional derivative in time is considered. We prove that such a problem is ill-posed and apply the fractional Landweber method to solve this inverse problem. Based on the results of conditional stability, under the priori and posteriori regularization parameters choice rules, the error estimates between the exact solution and the regularization solution are given respectively. Finally, several numerical examples are given to illustrate the effectiveness and feasibility of these methods.

**Key words:** Rayleigh-Stokes equation; Inverse problem; Identifying unknown source problem; Fractional Landweber iterative regularization method.

**MR(2010) Subject Classification:** 35R25; 47A52; 35R30