

# 高温超导带材超导涂层局部脱黏后的电磁力学行为分析<sup>1)</sup>

杨育梅<sup>2)</sup> 李志鹏

(兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

**摘要** 高温超导带材因其高载流能力、低交流损耗等优点, 在超导领域得到了广泛的关注, 然而在带材的应用中出现的力学问题严重阻碍了其应用. 基于此, 本文分析了受外部磁场激励 YBCO 高温超导带材在超导层局部脱黏后的电磁力学响应. 基于超导临界态 Bean 模型和弹性力学平面应变方法, 给出了超导薄膜内正应力与基底界面处切应力相关联的控制方程, 基于数值方法研究了超导薄膜内的正应力及基底界面处的切应力随外部磁场的变化规律. 结果显示: 在脱黏区域附近, 超导薄膜内的正应力和基底-薄膜界面处的切应力急剧增大, 该正应力及切应力极易引起超导层的进一步脱黏. 同时, 剪切应力在结构边缘处出现极值. 基底材料的属性, 特别是杨氏模量对结构内的应力影响显著, 在软基底材料结构中, 超导薄膜内将出现较大的正应力, 而基底材料较硬时, 在基底-薄膜界面处将出现较大的剪切应力, 这些因素均会引起超导涂层结构的力学及电学性能的退化. 本文研究可望为超导带材的加工制备及脱黏的处理提供一定的理论指引.

**关键词** 超导带材结构, 局部脱黏, 磁通钉扎力, 应力分布

中图分类号: O342 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-21-043

## ELECTROMAGNETIC MECHANICAL BEHAVIOR OF A SUPERCONDUCTING COATING FOR HTS TAPES WITH LOCAL DETACHMENT<sup>1)</sup>

Yang Yumei<sup>2)</sup> Li Zhipeng

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract** High temperature superconducting tapes has been widely investigated in the field of superconducting technology due to its outstanding advantages of high current carrying, low loss and high cost performance. However, the superconducting tape is a multi-layer structure consisting of the Hastelloy alloy substrate, the buffer layer, the YBCO superconducting layer and the protective layer. Its multi-layer structure characteristics including the difference in the properties of each material layer and the complex external field environment will cause local debonding. It is very easy to degrade the transmission performance and mechanical properties. In this paper, the mechanical response of locally

2021-01-24 收稿, 2021-03-30 录用, 2021-03-31 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11402106, 11962015).

2) 杨育梅, 副教授, 主要研究方向: 高温超导材料与结构多物理场耦合行为研究以及智能材料微米尺度多场耦合特性研究. E-mail: ymyang@lut.cn

引用格式: 杨育梅, 李志鹏. 高温超导带材超导涂层局部脱黏后的电磁力学行为分析. 力学学报, 2021, 53(5): 1345-1354

Yang Yumei, Li Zhipeng. Electromagnetic mechanical behavior of a superconducting coating for HTS tapes with local detachment.

Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(5): 1345-1354

detachment YBCO high-temperature superconducting tapes under the excitation of an external vertical magnetic field is studied. Based on the superconducting critical state Bean model and the elasticity plane strain method, the interface between the normal stress of the superconducting film and the substrate is given. The governing equations related to the shear stress, numerically calculated the normal stress in the superconducting film and the shear stress at the substrate interface with the external magnetic field. The results show that the normal stress in the superconducting film and the shear stress at the substrate film interface increase rapidly near the detachment region. At the same time, the maximum shear stress appears at the edge of the structure. The properties of the substrate material, especially the Young's modulus, has a significant effect on the stress in the structure. In the structure of soft substrate material, there is a large normal stress in the superconducting film, and when the Young's modulus of the substrate is larger, a larger shear stress appears at the substrate film interface. These factors will cause the degradation of mechanical and electrical properties of superconducting coating structure. The work may provide some theoretical guidance for fabricating the superconducting tapes and and suppression of layer debonding.

**Key words** superconducting tape structure, local detachment, flux pinning force, stress distribution

## 引 言

YBCO 高温超导带材具有较高的临界转变温度、较高的载流能力及较低的交流损耗,在高磁场下拥有良好的载流能力,因而备受科学界及超导工程技术领域的关注<sup>[1]</sup>,使其成为在液氮温区强电应用最具希望的超导材料,可望在未来超导电缆、超导发电机、超导变压器、超导限流器、STATCOM 等电力设备中得到广泛应用<sup>[2-5]</sup>。然而,超导带材为多层结构,由金属基带、缓冲层、超导层和保护层构成,各材料层性质的差异、复杂的外部场环境及自身的多层结构特性等会造成局部脱黏而极易引起其输电性能及力学性能的退化<sup>[6-10]</sup>。因此,为了推进超导带材的应用,针对其局部脱黏引起的电学及力学性能的研究就显得至关重要。Chen 等<sup>[11]</sup>提出了基于感应原理对超导带材临界电流进行脉冲测量的方法,并通过实验验证了该方法的可行性。Amemiya 等<sup>[12]</sup>对 RE-123 涂层超导体进行了重复磁场激励实验,研究了其对磁场的稳定性和再现性的影响。而考虑到超导带材所处的复杂外部场环境对其力学性能的影响,Yang 和 Wang<sup>[13-14]</sup>分析了矩形超导薄板仅受载流或仅受外部磁场激励及受承载电流和外部磁场同时作用时,超导薄板内部的电流和磁场的分布情况,给出了薄板内的电流和磁场分布的表述,获得了薄板中的应力、应变及磁致伸缩的解析表述。黑颖顿等<sup>[15]</sup>对国内外几种典型高温超导带材在 77 K 温度、0~1 T/360° 环境下的临界电流衰减情况进行了测量,并总结了其对磁场角度依赖性变化的规律。Wang 等<sup>[16]</sup>对自场下 REBCO 超导

带材中临界电流密度的变化进行了研究,并分析了在外加磁场、仅载流和外加磁场与传输电流同步施加 3 种情况下的电流密度和磁场分布。李腾腾等<sup>[17]</sup>研究了侧向压力下 BSCCO 多芯带材和 REBCO 涂层导体载流性能的变化情况,指出,相较于 77 K 温度下, BSCCO 在室温下力学性能更强,而 REBCO 带材的情形则相反。而随着研究的不断深入,层间剥离及裂纹扩展等引起了超导带材临界电流退化及力学性能丧失,这成为一个不可忽略的问题。鉴于此,Osamura 等<sup>[18]</sup>首次对 YBCO 涂层超导带材在室温下超导晶格的变化进行了准确测量,并得到了超导层的内部应变与外加应变之间的变化关系。指出,超导层在热处理后产生 -0.2% 左右的残余压应变,且该压应变与外加应变呈线性变化直至超导带材损坏。随后,Take-matsu 等<sup>[19]</sup>通过扫描电子显微镜和能谱分析对树脂浸渍过的双饼超导线圈在冷却过程中因残余热应力而引起的剥离分层现象进行了观察,确定了层间剥离发生在超导层与缓冲层之间,同时也发生在超导层内部。Shin 和 Gorospe<sup>[20]</sup>则对 YBCO 高温超导带材进行了横向拉伸剥离实验,指出加载面的大小对剥离强度产生直接影响,加载面越大,剥离强度越小,并且对剥离面位置与临界电流退化的关系进行了总结。Shi 等<sup>[21]</sup>测量了含缺陷的 REBCO 超导带在失超过程中的电压和温度曲线,分析对比了两条无缺陷带、一条无缺陷带和一条有缺陷带以及两条带缺陷的叠层 REBCO 带的最小失超能 (MQE) 和正常区沿带材的传播速度 (NZPV) 的失超特性。指出有缺陷的叠层带的最小失超能小于无缺陷带的最小失超能,

有缺陷的叠层带的法向传播速度大于无缺陷带的法向传播速度. 为了进一步揭示超导带材的分层机理, 刘君等<sup>[22]</sup>研究了具有不同缺陷高温超导带材中的电磁特性, 研究了高温超导带材在磁化过程中的应力分布和磁致伸缩行为, 指明, 缺陷尺寸和位置会对其磁化及力学性能产生较大影响. Jing 等<sup>[23]</sup>从理论上分析了存在局部脱黏的超导带材的应力和应变状态, 讨论了温度以及承载电流对超导薄膜中的正应力和界面处的剪切应力的影响. 而针对局部脱黏后的 YBCO 超导带材在外部磁场激励下的力学响应尚未研究.

因此, 本文基于超导临界态 Bean 模型和弹性力学平面应变方法, 考虑局部脱黏后的 YBCO 超导带材在外部垂直磁场下的情形, 研究了外部磁场上升和下降过程中超导薄膜内电流和磁通密度的分布, 并得到了超导体内各应力的具体数值, 详细讨论了局部脱黏的存在、磁场大小的变化及基体材质的变化对超导薄膜中正应力及界面处切应力的分布产生的影响.

### 1 模型建立及理论推导

为简化起见, 本研究考虑的超导带材结构仅包含两层: 超导薄膜层和基底层. 基于此, 考虑一个无限长 YBCO 高温超导带材涂层结构受到外部垂直磁场的作用, 如图 1 所示, 薄膜和基底在  $y$  方向的总宽度均为  $2l$ , 厚度分别为  $t_f$  和  $t_s$ , 杨氏模量分别为  $E_f$  和  $E_s$  (其中  $f$  和  $s$  分别代表薄膜层和基底层). 假设薄膜与基底局部发生脱黏, 其分离区域的宽度为  $2l_d$ , ( $l_d = l_l, l_r$ ). 其余部分完美贴合. 假设超导薄膜呈各向同性, 忽略弯曲刚度, 基底材料为非磁性弹性材料. 当结构处于外加大小  $B_a$  的垂直磁场中时, 由于高温超导体俘获磁通线的特性<sup>[24]</sup>, 超导薄膜层内将会产生感应电流  $J$  和感应磁场  $B$ , 接下来首先讨论结构内的电流及磁场的分布特征.

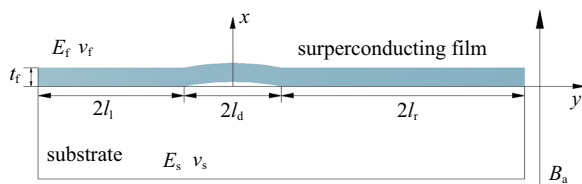


图 1 超导带材涂层结构横截面示意图

Fig. 1 Schematic diagram of cross section of superconducting coated conductor tape with local detachment

### 1.1 超导薄膜中的电流及磁场分布

当结构处于如图 1 所示的外部垂直磁场中时, 超导薄膜中会产生相应的感应电流以及磁场. 随着外加磁场  $B_a$  从零开始逐渐增大, 磁通线开始从结构的两侧逐渐渗入, 当外加磁场未达到完全渗透场时, 超导薄膜内的电流密度及磁感应强度的分布如下<sup>[25]</sup>

$$J_H(y) = -J_c, \quad -l - l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r - y_0 \quad (1)$$

$$J_H(y) = \frac{J_c}{\pi} (\psi_1 - \psi_2), \quad -y_0 - l_l + l_r < y < -l_l + l_r + y_0 \quad (2)$$

$$J_H(y) = J_c, \quad y_0 - l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r + l \quad (3)$$

其中,  $J_c$  为常数,  $y_0 = l\sqrt{1 - c_0^2}$  为超导体中磁通线的渗透位置 (这里,  $c_0 = \tanh(B_a/H_c)$ ,  $H_c = J_c/\pi$ ).  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  的详细表达见附录. 同时, 根据麦克斯韦方程, 可得此时超导体内的磁感应强度分布为

$$B_H(y) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi} (\psi_3 - \psi_4), \quad -l - l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r - y_0 \quad (4)$$

$$B_H(y) = 0, \quad -y_0 - l_l + l_r < y < -l_l + l_r + y_0 \quad (5)$$

$$B_H(y) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} (\psi_3 - \psi_4), \quad y_0 - l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r + l \quad (6)$$

随着外加磁场的进一步增大, 磁通线完全渗透到超导薄膜内, 此时, 薄膜内的感应电流和磁感应强度的分布表达式为

$$J_H(y) = -J_c, \quad -l - l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r \quad (7)$$

$$J_H(y) = J_c, \quad -l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r + l \quad (8)$$

$$B_H(y) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi} (\psi_5 - \psi_6), \quad -l - l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r \quad (9)$$

$$B_H(y) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} (\psi_5 - \psi_6), \quad -l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r + l \quad (10)$$

其中,  $\psi_5, \psi_6$  的详细表达见附录.

当外加磁场  $B_a$  从最大值  $B_0$  开始逐渐减小时, 超导薄膜边缘的电流反向, 部分磁通被排出超导体外, 薄膜内的磁通线重新分布, 此时超导体内的电流为

$$J_H(y) = J_c, \quad -l - l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r - y_1 \quad (11)$$

$$J_H(y) = -J_c - \frac{2J_c}{\pi} (\psi_1 - \psi_2), \quad -y_1 - l_l + l_r \leq y \leq -l_l + l_r - y_2 \quad (12)$$

$$J_H(y) = \frac{J_c}{\pi} (\widehat{\psi}_1 - \widehat{\psi}_2) - \frac{2J_c}{\pi} (\psi_1 - \psi_2),$$

$$-y_2 - l_1 + l_r \leq y \leq -l_1 + l_r + y_2 \quad (13)$$

$$J_H(y) = J_c - \frac{2J_c}{\pi}(\psi_1 - \psi_2),$$

$$y_2 - l_1 + l_r \leq y \leq -l_1 + l_r + y_1 \quad (14)$$

$$J_H(y) = -J_c, \quad y_1 - l_1 + l_r \leq y \leq -l_1 + l_r + l \quad (15)$$

其中,  $y_1 = l\sqrt{1 - c_1^2}$ ,  $y_2 = l\sqrt{1 - c_2^2}$ , 分别为磁场开始下降后超导薄膜内电流发生反向的位置 (这里,  $c_1 = \tanh((B_0 - B_a)/(2H_c))$ ,  $c_2 = \tanh(B_0/H_c)$ ,  $H_c = J_c/\pi$ ).  $\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2, \widehat{\psi}_3, \widehat{\psi}_4$  的详细表达见附录. 可进一步得到薄膜中的磁场分布为

$$B_H(y) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi}(\widehat{\psi}_3 - \widehat{\psi}_4) + \frac{\mu_0 J_c}{\pi}(\psi_3 - \psi_4),$$

$$-l - l_1 + l_r \leq y \leq -l_1 + l_r - y_1 \quad (16)$$

$$B_H(y) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi}(\widehat{\psi}_3 - \widehat{\psi}_4),$$

$$-y_1 - l_1 + l_r \leq y \leq -l_1 + l_r - y_2 \quad (17)$$

$$B_H(y) = 0, \quad -y_2 - l_1 + l_r \leq y \leq -l_1 + l_r + y_2 \quad (18)$$

$$B_H(y) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi}(\widehat{\psi}_3 - \widehat{\psi}_4),$$

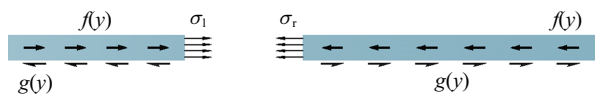
$$y_2 - l_1 + l_r \leq y \leq -l_1 + l_r + y_1 \quad (19)$$

$$B_H(y) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi}(\widehat{\psi}_3 - \widehat{\psi}_4) - \frac{\mu_0 J_c}{\pi}(\psi_3 - \psi_4),$$

$$y_1 - l_1 + l_r \leq y \leq -l_1 + l_r + l \quad (20)$$

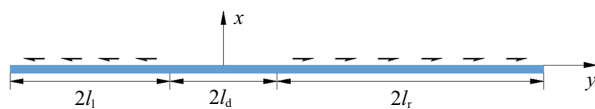
### 1.2 超导体内的磁通钉扎力及应力分布

随着磁通线逐渐渗透到超导薄膜内, 在其体内产生相应的磁通钉扎力及基底薄膜界面处的剪切力, 如图 2(a) 所示. 基于临界态 Bean 模型假定, 该钉扎力大小等于洛伦兹力, 即:  $f = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ . 由薄膜中体力  $f(\zeta)$  与基底薄膜界面处剪切应力  $g(\zeta)$  在  $y$  方向的平衡关系, 如图 2(b) 所示, 可以得到超导体内的平衡方



(a) 超导薄膜中的受力状态

(a) Force balance of the left and right part of the detached film



(b) 基底表面的受力状态

(b) Shearing stress on the interface of the substrate

图 2 超导涂层结构力学等效模型

Fig. 2 Mechanical equivalent model of superconducting coated conductor tape

程为

$$\sigma_{1f} = \int_{-2l_1-l_d}^{-l_d} (g(\zeta) + f(\zeta))d\zeta \quad (21)$$

$$\sigma_{rf} = \int_{-2l_1-l_d}^{-l_d} g(\zeta)d\zeta + \int_{-2l_1-l_d}^{l_d} f(\zeta)d\zeta \quad (22)$$

进而可以得到薄膜中正应力  $\sigma_{fy}(y)$  的表达如下

$$\sigma_{fy}(y) = \frac{1}{t_f} \int_{-2l_1-l_d}^y (g(\zeta) + f(\zeta))d\zeta,$$

$$-2l_1 - l_d < y < -l_d \quad (23)$$

$$\sigma_{fy}(y) = \frac{1}{t_f} \left( \int_{-2l_1-l_d}^{-l_d} g(\zeta) d\zeta + \int_{-2l_1-l_d}^y f(\zeta) d\zeta \right),$$

$$-l_d < y < l_d \quad (24)$$

$$\sigma_{fy}(y) = \frac{1}{t_f} \int_{-2l_1-l_d}^{-l_d} g(\zeta) d\zeta + \frac{1}{t_f} \left( \int_{l_d}^y g(\zeta) d\zeta + \int_{-2l_1-l_d}^y f(\zeta) d\zeta \right), \quad l_d < y < l_d + 2l_r \quad (25)$$

结合物理方程  $\varepsilon_{fy}(y) = \sigma_f/\bar{E}_f$ , 得到了薄膜中的正应变  $\varepsilon_{fy}$ . 其中,  $\bar{E}_f = E_f/(1 - \nu_f^2)$ , 表示平面应变下薄膜的杨氏模量. 此时, 基底中的正应变  $\varepsilon_{sy}(y)$  可用如下方程计算<sup>[26]</sup>

$$\varepsilon_{sy}(y)|_{x=0} = -\frac{2}{\pi\bar{E}_s} \left( \int_{-2l_1-l_d}^{-l_d} \frac{g(\zeta)}{y-\zeta} d\zeta + \int_{l_d}^{l_d+2l_r} \frac{g(\zeta)}{y-\zeta} d\zeta \right) \quad (26)$$

其中,  $\bar{E}_s = E_s/(1 - \nu_s^2)$ , 表示平面应变下基底的杨氏模量.

假设薄膜和其下方基底在未分离区域均完美贴合, 根据位移连续性条件, 可以得如下相容方程<sup>[25]</sup>

$$\varepsilon_{fy}(y) = \varepsilon_{sy}(y)|_{x=0},$$

$$-2l_1 - l_d < y < -l_d, \quad l_d < y < l_d + 2l_r \quad (27)$$

$$u_{fy}(l_d) - u_{fy}(-l_d) = u_{sy}(l_d) - u_{sy}(-l_d) \quad (28)$$

其中,  $u_{fy}$  表示超导薄膜中的位移,  $u_{sy}$  表示薄膜下方对应的基底中的位移. 将方程 (23)~(25) 和式 (26) 代入方程 (27) 得到

$$\frac{2}{\pi\bar{E}_s} \left( \int_{-2l_1-l_d}^{-l_d} \frac{g(\zeta)}{y-\zeta} d\zeta + \int_{l_d}^{l_d+2l_r} \frac{g(\zeta)}{y-\zeta} d\zeta \right) + \frac{1}{\bar{E}_f t_f} \int_{-2l_1-l_d}^y (g(\zeta) + f(\zeta))d\zeta = 0,$$

$$-2l_1 - l_d < y < -l_d \quad (29)$$

$$\frac{2}{\pi\bar{E}_s} \left( \int_{-2l_1-l_d}^{-l_d} \frac{g(\zeta)}{y-\zeta} d\zeta + \int_{l_d}^{l_d+2l_r} \frac{g(\zeta)}{y-\zeta} d\zeta \right) + \frac{1}{\bar{E}_f t_f} \left( \int_{-2l_1-l_d}^{-l_d} g(\zeta)d\zeta + \int_{l_d}^y g(\zeta)d\zeta \right) +$$

$$\frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-2l_d-l_d}^y f(\zeta) d\zeta = 0, \quad l_d < \zeta < l_d + 2l_t \quad (30)$$

根据平面应变下位移与应变的关系, 方程 (28) 可进一步化解为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-l_d}^{l_d} \left( \int_{-2l_d-l_d}^{-l_d} g(\zeta) d\zeta + \int_{-2l_d-l_d}^y f(\zeta) d\zeta \right) dy = \\ -\frac{2}{\pi \bar{E}_s} \int_{-l_d}^{l_d} \left( \int_{-2l_d-l_d}^{-l_d} \frac{g(\zeta)}{y-\zeta} d\zeta + \int_{l_d}^{l_d+2l_t} \frac{g(\zeta)}{y-\zeta} d\zeta \right) dy \end{aligned} \quad (31)$$

方程 (29)~(31) 即为界面剪切应力的控制方程. 为简化计算, 令  $k_l = (\zeta + l_t + l_d)/l_t$ ,  $k_r = (\zeta - l_t - l_d)/l_t$ ,  $\lambda_l = (y + l_t + l_d)/l_t$ ,  $\lambda_r = (y - l_t - l_d)/l_t$ ,  $g_l(k_l) = g(l_t k_l - l_t - l_d)$ ,  $g_r(k_r) = g(l_t k_r + l_t + l_d)$ . 进而对方程 (29)~(31) 进行归一化处理得<sup>[23]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi \bar{E}_s} \left( \int_{-1}^1 \frac{g_l(k_l)}{\lambda_l - k_l} dk_l + \int_{-1}^1 \frac{g_r(k_r)}{\lambda_r - k_r} dk_r \right) + \\ \frac{l_t}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-1}^{\lambda_l} g_l(k_l) dk_l = -\frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-2l_d-l_d}^y f(\zeta) d\zeta, \quad -1 < \lambda_l < 1 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi \bar{E}_s} \left( \int_{-1}^1 \frac{g_l(k_l)}{\lambda_l - k_l} dk_l + \int_{-1}^1 \frac{g_r(k_r)}{\lambda_r - k_r} dk_r \right) + \\ \frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \left( l_t \int_{-1}^1 g_l(k_l) dk_l + l_t \int_{-1}^{\lambda_r} g_r(k_r) dk_r \right) = \\ -\frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-2l_d-l_d}^y f(\zeta) d\zeta, \quad -1 < \lambda_r < 1 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi \bar{E}_s} \int_{-l_d}^{l_d} \left( \int_{-1}^1 \frac{g_l(k_l)}{\lambda_l - k_l} dk_l + \int_{-1}^1 \frac{g_r(k_r)}{\lambda_r - k_r} dk_r \right) dy - \\ \frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-l_d}^{l_d} l_t \int_{-1}^1 g_l(k_l) dk_l dy = \\ \frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-l_d}^{l_d} \int_{-2l_d-l_d}^y f(\zeta) d\zeta dy \end{aligned} \quad (34)$$

对于方程 (32)~(34) 的求解, 可以通过将  $g_l(k_l)$  和  $g_r(k_r)$  展开为第一类 Chebyshev 多项式级数的方式来获得<sup>[26-28]</sup>

$$g_l(k_l) = \frac{\bar{E}_s}{\sqrt{1-k_l^2}} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{ln} T_n(k_l), \quad -1 < k_l < 1 \quad (35)$$

$$g_r(k_r) = \frac{\bar{E}_s}{\sqrt{1-k_r^2}} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{rn} T_n(k_r), \quad -1 < k_r < 1 \quad (36)$$

其中  $c_{ln}$  和  $c_{rn}$  为未知系数. 将式 (35) 和式 (36) 分别代入方程 (32)~(34) 可得

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{ln} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-k_l^2}} \frac{T_n(k_l)}{\lambda_l - k_l} dk_l + \\ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{rn} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-k_r^2}} \frac{T_n(k_r)}{\lambda_r - k_r} dk_r + \\ \frac{\bar{E}_s l_t}{\bar{E}_{ftf}} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{ln} \int_{-1}^{\lambda_l} \frac{T_n(k_l)}{\sqrt{1-k_l^2}} dk_l = \\ -\frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-l}^y f(\zeta) d\zeta, \quad -1 < k_l < 1 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{ln} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-k_l^2}} \frac{T_n(k_l)}{\lambda_l - k_l} dk_l + \\ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{rn} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-k_r^2}} \frac{T_n(k_r)}{\lambda_r - k_r} dk_r + \\ \frac{\bar{E}_s l_t}{\bar{E}_{ftf}} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{ln} \int_{-1}^1 \frac{T_n(k_l)}{\sqrt{1-k_l^2}} dk_l + \\ \frac{\bar{E}_s l_t}{\bar{E}_{ftf}} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{rn} \int_{-1}^{\lambda_l} \frac{T_n(k_r)}{\sqrt{1-k_r^2}} dk_r = \\ -\frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-l}^y f(\zeta) d\zeta, \quad -1 < k_r < 1 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi} \int_{-l_d}^{l_d} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{ln} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-k_l^2}} \frac{T_n(k_l)}{\lambda_l - k_l} dk_l dy - \\ \frac{2}{\pi} \int_{-l_d}^{l_d} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{rn} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-k_r^2}} \frac{T_n(k_r)}{\lambda_r - k_r} dk_r dy - \\ \frac{\bar{E}_s l_t}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-l_d}^{l_d} \sum_{n=0,1,2,\dots}^N c_{ln} \int_{-1}^1 \frac{T_n(k_l)}{\sqrt{1-k_l^2}} dk_l dy = \\ \frac{1}{\bar{E}_{ftf}} \int_{-l_d}^{l_d} \int_{-l}^y f(\zeta) d\zeta dy \end{aligned} \quad (39)$$

其中,  $c_{ln}$  和  $c_{rn}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ), 为未知系数. 考虑到第一类 Chebyshev 多项式的性质<sup>[29-32]</sup>, 通过联立方程 (38)~(39) 可以求得超导薄膜中的正应力及基底薄膜界面处的剪切应力.

## 2 结果与讨论

为了更直观的描述超导薄膜及基底薄膜界面处的应力分布特征, 本节结合以上计算结果进行数值

模拟, 并讨论了外部磁场上升及下降过程中薄膜内正应力及基底薄膜界面处切应力的分布及随外部磁场的变化规律. 薄膜和基体所选取的参数均为典型参数, 其非常接近 YBCO 超导带材的实际值<sup>[23]</sup>. 分别如下:  $E_f = 157 \text{ GPa}$ ,  $\nu_f = 0.3$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu_s = 0.3$ ,  $t_f = 10 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $l = 2 \text{ cm}$ ,  $l_1 = 0.4l$ ,  $l_d = 0.01l$  和  $J_c = 3.3 \text{ MA/cm}^2$ .

### 2.1 超导薄膜中的正应力分布

图 3 给出了当超导薄膜结构在分别受到承载电流作用、外部磁场作用以及承载电流和外部磁场共同作用时, 薄膜内的正应力分布. 从图 3 可以看出, 在上述 3 种情形下, 超导薄膜内的正应力的变化趋势较为相似. 由于受到基体材料的约束, 当承载电流和外加磁场逐渐增大时, 如图 3(a) 所示, 超导薄膜在两端受到不同程度的拉应力作用, 而在其他部位受到压应力作用. 不同之处在于, 当超导薄膜结构在受到承载电流和外加磁场共同作用时, 薄膜内的正应力不再是对称分布的, 这是由于超导薄膜内的磁通线发生了改变而造成的. 需要注意的是, 应力奇异性发生在超导薄膜中分离区域的两端, 其压应力远大于未分离区域, 并且呈线性变化, 和未分离区域相比, 存在较大差异. 而当承载电流和外加磁场从最大值开始下降时, 如图 3(b) 所示, 超导薄膜两侧的压应力先增大, 而后逐渐减小, 直至变为拉应力, 在其他部位, 又逐渐变为压应力. 应力奇异仍然发生在分离部分的左右端.

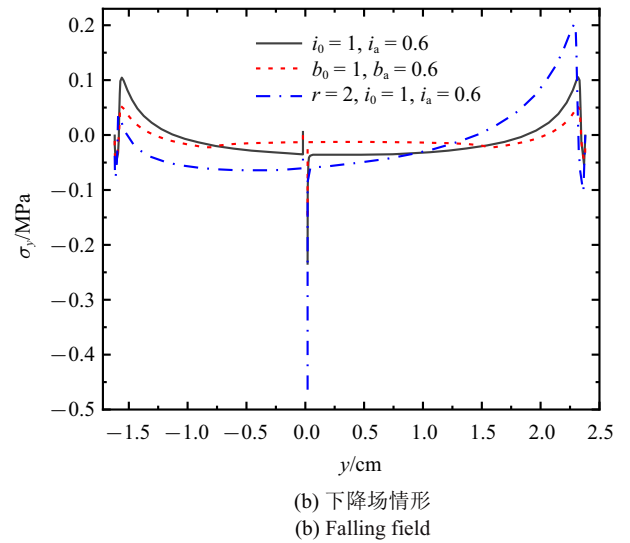
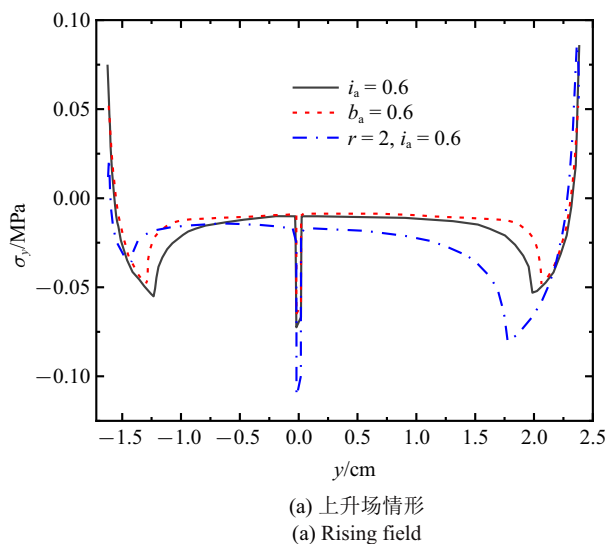


图 3 不同物理场下超导薄膜内的正应力分布  
Fig. 3 Normal stress distribution in superconducting film under different physical fields

图 4 描述了超导薄膜中正应力随外部磁场变化的分布规律. 当外加磁场从零逐渐上升时, 如图 4(a) 所示, 薄膜两侧边缘部分出现拉应力, 该拉应力随着外部磁场的增大而显著增大. 而在薄膜内部, 应力奇异发生在分离区域的末端, 该区域压应力值显著增大, 意味着该区域薄膜层极易从基底层上脱黏. 当外部磁场开始下降时, 如图 4(b) 所示, 薄膜两侧边缘出现压应力作用, 该压应力随着外部磁场的减小而逐渐减小. 随着外部磁场从最大值  $B_0$  逐渐减小至零, 薄膜内的正应力整体呈减小趋势, 而当外加磁场进

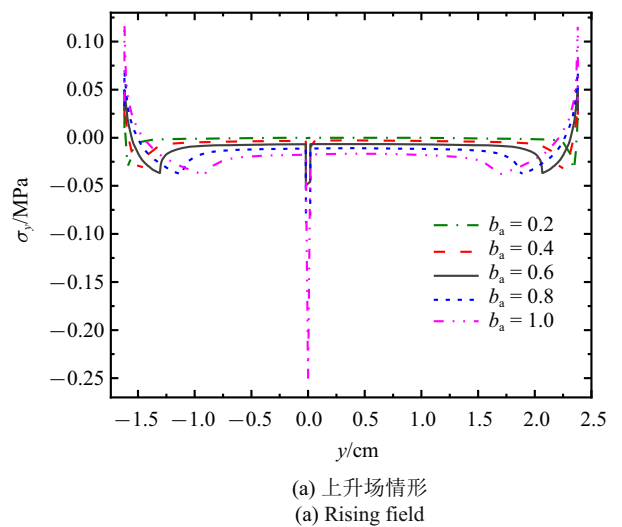


图 4 超导薄膜中的正应力分布

Fig. 4 Normal stress distribution in superconducting film



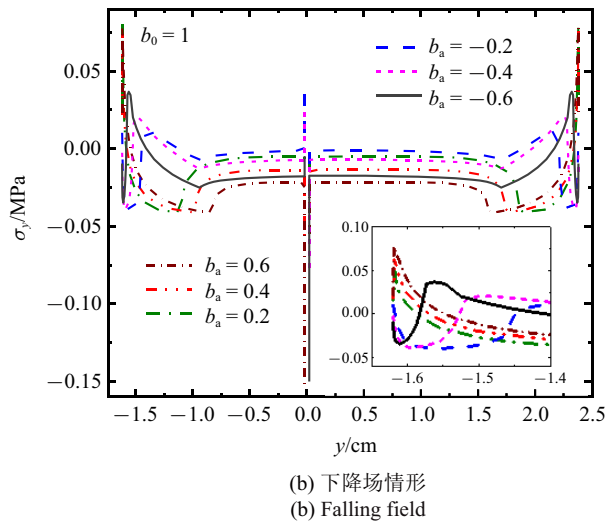


图 4 超导薄膜中的正应力分布 (续)

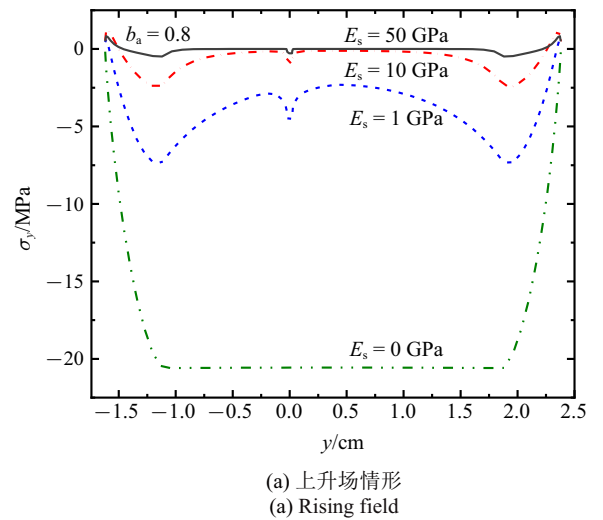
Fig. 4 Normal stress distribution in superconducting film (continued)

一步从零减小至  $-B_0$ , 薄膜内的正应力整体呈增大趋势. 这是因为当外部磁场从最大值下降时, 薄膜内俘获的磁通线开始从薄膜边缘排出, 导致薄膜内的磁通钉扎力减小, 进而引起结构内正应力的逐渐减小. 然而, 当外部磁场从零持续下降时, 磁通线开始反向进入超导薄膜内, 此时, 俘获在超导薄膜内的磁通线数量开始增多, 结构内的磁通钉扎力增大, 正应力随之增大. 应力奇异现象仍然出现在分离区域的两端, 由于超导薄膜中局部磁通密度的分布不同而导致呈现出不同的受力状态.

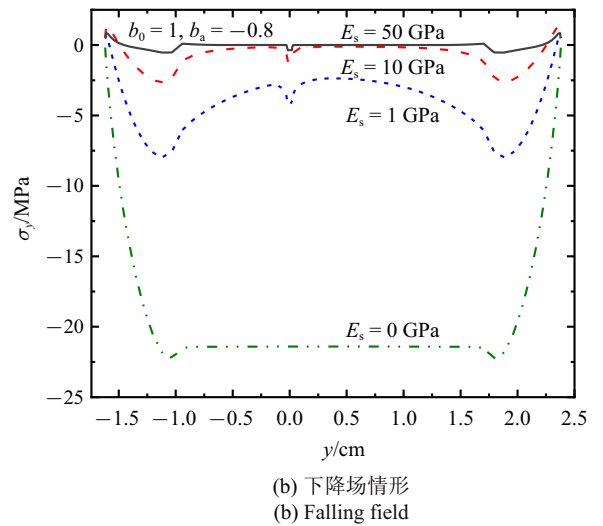
图 5 给出了基底弹性模量对薄膜内正应力的影响规律. 无论上升场还是下降场情形, 在具有较硬基底的超导薄膜两侧都出现了微小的拉应力作用, 而在其他部位, 均呈压应力状态. 当基底杨氏模量较小甚至为零时, 超导薄膜在整体上受压, 且随着杨氏模量的减小, 压应力逐渐增大. 此外, 在超导薄膜的分离区域, 由于不受基底约束而出现应力奇点.

### 2.2 基底薄膜界面处的剪切应力分布

图 6 描述了基底薄膜界面处切应力随外部磁场变化的分布规律. 当外加磁场从零逐渐上升时, 如图 6(a) 所示, 在基底薄膜界面两侧及分离区域的末端分别呈现出不同的受力状态, 且随着外部磁场的增大而显著增大, 这与磁通线从两侧向中心部位渗透的特点有关. 当外部磁场开始下降时, 如图 6(b) 所示, 基底薄膜界面左侧出现拉应力, 并与界面内侧原有的压应力相互作用而形成一个应力尖角, 其大小随着

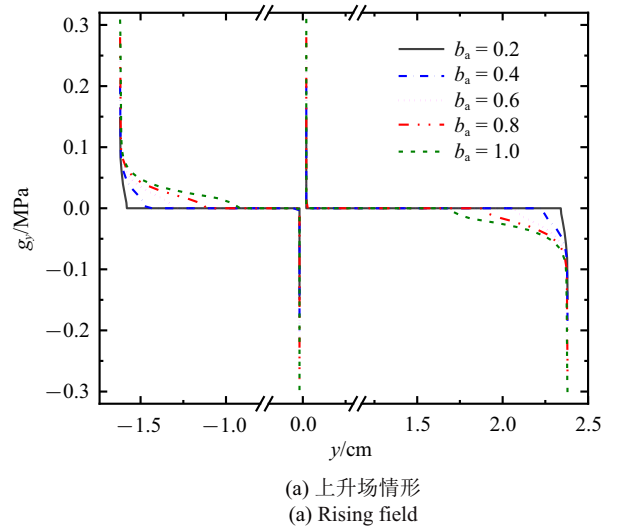


(a) 上升场情形  
(a) Rising field



(b) 下降场情形  
(b) Falling field

图 5 基底杨氏模量对薄膜内正应力的影响  
Fig. 5 Normal stress distribution in superconducting thin films with different substrates



(a) 上升场情形  
(a) Rising field

图 6 基底-薄膜界面处的切应力分布

Fig. 6 Shear stress distribution on the interface of the substrate

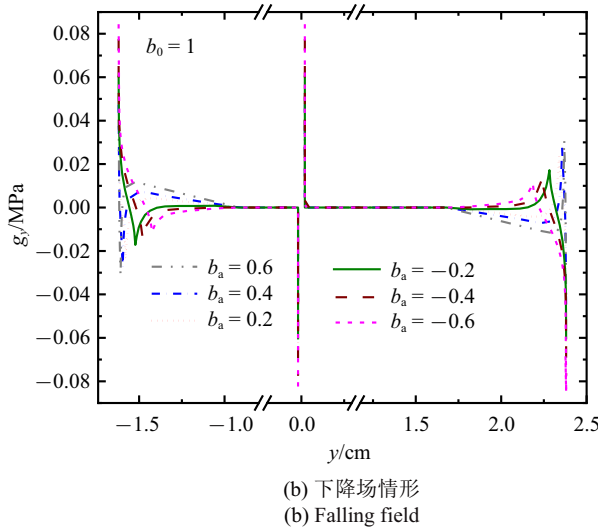


图 6 基底-薄膜界面处的切应力分布 (续)  
Fig. 6 Shear stress distribution on the interface of the substrate (continued)

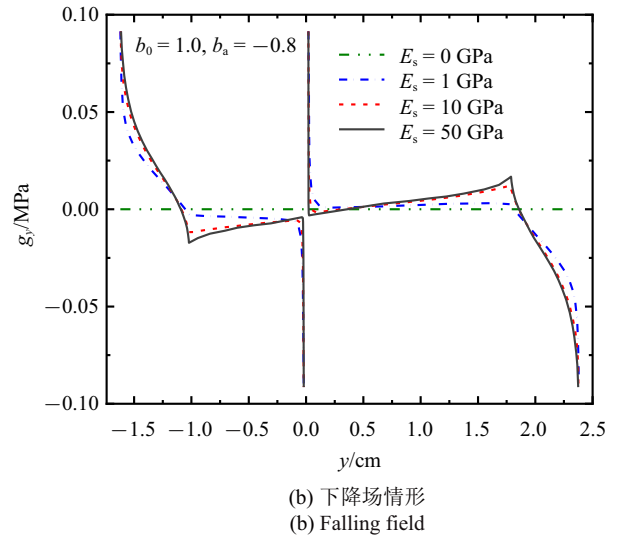
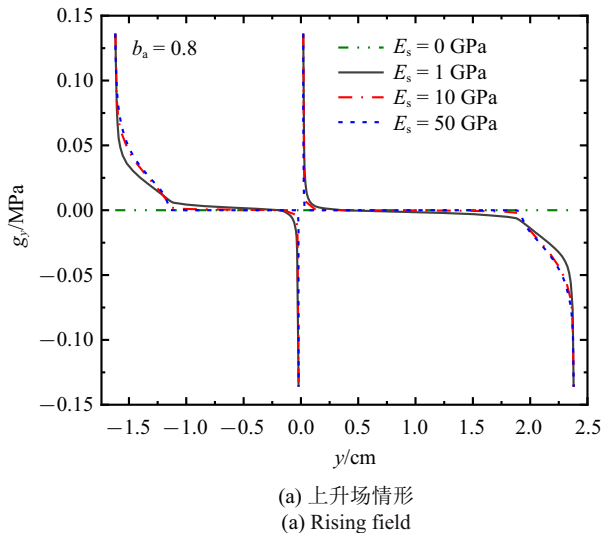


图 7 基底杨氏模量对超导体界面处的剪切应力分布的影响  
Fig. 7 Shear stress distribution at the interface of superconductors with different substrates

外部磁场的减小而逐渐减小. 随着外部磁场从最大值  $B_0$  逐渐减小至零, 基底薄膜界面处的切应力整体呈减小趋势, 而当外加磁场进一步从零减小至  $-B_0$ , 基底-薄膜界面处的切应力整体呈增大趋势.

图 7 给出了基底弹性模量对基底-薄膜界面处的剪切力的影响规律. 可以看出, 无论是上升场还是下降场情形, 基底-薄膜界面处切应力整体呈现出左侧受拉, 右侧受压的状态, 且对于杨氏模量较大的基底, 由于对薄膜具有更强的约束作用, 其界面处的切应力呈现出更加剧烈的变化. 而当杨氏模量为零时, 表示无基底情形, 切应力为零.



### 3 结论

本文基于超导临界态 Bean 模型, 结合弹性力学解决平面应变问题的方法, 研究了处于垂直外加磁场下, 存在局部脱黏的 YBCO 高温超导薄膜中的正应力及基底-薄膜界面处切应力的大小及分布特征. 结果显示:

(1) 磁场强度的变化对薄膜中的正应力及基底薄膜界面处的切应力大小及分布产生直接影响. 对于较高的磁场环境, 薄膜承受较大的正应力及界面切应力, 且应力极值始逐现在薄膜及基底薄膜界面两侧. 因此, 薄膜边缘是极易发生脱黏的区域.

(2) 在脱黏区域末端会出现应力集中现象, 这将加剧带材间裂纹的扩展及层间剥离的发生.

(3) 基底材质的变化对薄膜中正应力及基底-薄膜界面处切应力产生显著影响. 当基底的杨氏模量较小时, 薄膜经受较大的正应力; 而对于基底较硬的情形, 基底-薄膜界面处的剪切应力在分离区域附近及两侧的变化将更加剧烈. 因此, 通过综合考虑超导带材所处的外部工作环境、生产工艺及基底材料的性质, 可以有效避免超导带材层间剥离的发生, 保障其在实际中的安全应用.

### 参 考 文 献

1 Meissner W, Ochsenfeld R. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 1933, 21(44): 787-788



- 2 王骁磊, 袁文, 张腾等. 第二代高温超导带材的连接技术研究进展. 低温与超导, 2020, 48(11): 41-50 (Wang Xiaolei, Yuan Wen, Zhang Teng, et al. Research progress in the connection technology of the second generation HTS strip. *Cryogenics & Superconductivity*, 2020, 48(11): 41-50 (in Chinese))
- 3 王秋良. 高磁场超导磁体科学. 北京: 科学出版社, 2008 (Wang Qiuliang. High Magnetic Field Superconducting Magnet Science. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 4 蔡传兵, 池长鑫, 李敏娟等. 强磁场用第二代高温超导带材研究进展与挑战. 科学通报, 2019, 64(8): 827-844 (Cai Chuanbing, Chi Changxin, Li Minjuan, et al. Advance and challenge of secondary-generation high-temperature superconducting tapes for high field applications. *Chinese Science Bulletin*, 2019, 64(8): 827-844 (in Chinese))
- 5 彭向峰, 李录贤. 超弹性材料本构关系的最新研究进展. 力学学报, 2020, 52(5): 1221-1234 (Peng Xiangfeng, Li Luxian. State of the art of constitutive relations of hyperelastic materials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(5): 1221-1234 (in Chinese))
- 6 王银顺. 基于第二代高温超导带材的高载流超导体研究进展. 电工电能新技术, 2017, 36(11): 21-35 (Wang Yinshun. Recent status and development of high current conductor made from 2g HTS tapes. *Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy*, 2017, 36(11): 21-35 (in Chinese))
- 7 赵跃, 张智巍, 朱佳敏等. 面向实用化的第二代高温超导带材研究进展. 电工电能新技术, 2017, 36(10): 69-75 (Zhao Yue, Zhang Zhiwei, Zhu Jiamin, et al. Progress of second generation high temperature superconductors for practical applications. *Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy*, 2017, 36(10): 69-75 (in Chinese))
- 8 阎伟华, 蔡传兵, 周迪帆. 基于第二代高温超导带材的磁体研究进展与挑战. 物理, 2019, 48(11): 733-748 (Yan Weihua, Cai Chuanbing, Zhou Difan. Progress and challenges in the development of magnets based on second-generation high temperature superconducting tapes. *Physics*, 2019, 48(11): 733-748 (in Chinese))
- 9 李群. 材料构型力学及其在复杂缺陷系统中的应用. 力学学报, 2015, 47(2): 197-214 (Li Qun. Material configurational mechanics with application to complex defects. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(2): 197-214 (in Chinese))
- 10 曹明月, 张启, 吴建国等. 缝合式 C/SiC 复合材料非线性本构关系及断裂行为研究. 力学学报, 2020, 52(4): 1095-1105 (Cao Mingyue, Zhang Qi, Wu Jianguo, et al. Study on nonlinear constitutive relationship and fracture behavior of stitched C/SiC composites. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(4): 1095-1105 (in Chinese))
- 11 Chen YW, Li XF, Chen DC, et al. A critical current measurement method for strip hard superconductors utilizing pulsed current. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2020, 30(4): 1-5
- 12 Amemiya N, Sogabe Y, Takayama S, et al. AC loss and shielding-current-induced field in a coated-conductor test magnet for accelerator applications under repeated excitations. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2020, 30(4): 1-5
- 13 Yang YM, Wang XZ. Flux-pinning-induced stress and magnetostriction in a superconducting strip under combination of transport current and magnetic field. *Journal of Applied Physics*, 2017, 122(11): 115103
- 14 Yang YM, Wang XZ. Magnetization and magnetoelastic behavior of a functionally graded rectangular superconductor slab. *Journal of Applied Physics*, 2014, 116(2): 023901
- 15 黑颖顿, 罗书山, 谭亚雄等. 高温超导带材在磁场环境下的角度依赖性研究. 云南电力技术, 2020, 48(5): 85-88 (Hei Yingdun, Luo Shushan, Tan Yaxiong, et al. Study on Angle dependence of high temperature superconducting tapes under magnetic field. *Yunnan Electric Power*, 2020, 48(5): 85-88 (in Chinese))
- 16 Wang L, Wang Q. Analysis of current and magnetic distributions in REBCO superconducting coated conductors in self- and external fields. *Journal of Superconductivity & Novel Magnetism*, 2014, 27(5): 1159-1166
- 17 李腾腾, 雷鸣, 羊新胜等. 侧向压力下高温超导带材性能研究. 低温与超导, 2020, 48(7): 39-43 (Li Tengting, Lei Ming, Yang Xinsong, et al. Study on the performance of high temperature superconducting tapes under lateral pressure. *Cryogenics & Superconductivity*, 2020, 48(7): 39-43 (in Chinese))
- 18 Osamura K, Sugano M, Machiya S, et al. Internal residual strain and critical current maximum of a surrounded Cu stabilized YBCO coated conductor. *Superconductor Science and Technology*, 2009, 22(6): 32-32
- 19 Takematsu T, Hu R, Takao T, et al. Degradation of the performance of a YBCO-coated conductor double pancake coil due to epoxy impregnation. *Physica C: Superconductivity & Its Applications*, 2010, 470(17-18): 674-677
- 20 Shin HS, Gorospe A. Characterization of transverse tensile stress response of critical current and delamination behaviour in GdBCO coated conductor tapes by anvil test. *Superconductor Science & Technology*, 2014, 27(2): 2-3
- 21 Shi JT, Yang XS, Xu M, et al. Effect of defects on the quench properties of stacked REBCO tapes. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2020, 31(1): 4700105
- 22 刘君, 黄晨光, 雍华东等. 含缺陷高温超导带材的磁化和力学特性分析. 北京工业大学学报, 2018, 44(3): 439-448 (Liu Jun, Huang Chenguang, Yong Huadong, et al. Numerical simulation of magnetization and mechanical properties for high temperature superconducting strip with defect. *Journal of Beijing University of Technology*, 2018, 44(3): 439-448 (in Chinese))
- 23 Jing Z, Yong HD, Zhou YH. Shear and transverse stress in a thin superconducting layer in simplified coated conductor architecture with a pre-existing detachment. *Journal of Applied Physics*, 2013, 114(3): 033907
- 24 Yang YM, Wang XZ. Stress and magnetostriction in an infinite hollow superconducting cylinder with a filling in its central hole. *Physica C: Superconductivity and Its Applications*, 2013, 485(1): 58-63
- 25 Brandt EH, Indenbom M. Type-II-superconductor strip with current in a perpendicular magnetic field. *Physical Review B Condensed Matter*, 1993, 48(17): 12893-12906
- 26 Freund LB. Substrate curvature due to thin film mismatch strain in the nonlinear deformation range. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 2000, 48(6-7): 1159-1174
- 27 Zhang XC, Xu BS, Wang HD, et al. Analytical modeling of edge effects on the residual stresses within the film/substrate systems. *Journal of Applied Physics*, 2006, 100(11): 113525
- 28 Lanzoni L. Analysis of stress singularities in thin coatings bonded to a semi-infinite elastic substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48(13): 1915-1926

- 29 Wang XD, Meguid SA. On the electroelastic behaviour of a thin piezoelectric actuator attached to an infinite host structure. *International Journal of Solids & Structures*, 2000, 37(23): 3231-3251
- 30 Sokolovsky VL, Prigozhin L, Kozyrev AB. Chebyshev spectral method for superconductivity problems. *Superconductor Science and Technology*, 2020, 33(8): 1-13
- 31 Alaca BE, Saif MTA, Sehitoglu H. On the interface debond at the edge of a thin film on a thick substrate. *Acta Materialia*, 2002, 50(5): 1197-1209
- 32 谷岩, 张耀明. 双材料界面裂纹复应力强度因子的正则化边界元法. *力学学报*, 2021, 53(2): 1-10 (Gu Yan, Zhang Yaoming. Boundary element analysis of complex stress intensity factors of bimaterial interface cracks. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(2): 1-10 (in Chinese))

附录

参数  $\psi_1, \psi_2, \widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2, \psi_3, \psi_4, \widehat{\psi}_3, \widehat{\psi}_4, \psi_5, \psi_6$  的具体表达如下

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \arctan \left[ \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{b^2 - (y + l_1 - l_r)^2}} \right] + \\ &\arctan \left[ \frac{y + l_1 - l_r}{l} \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{b^2 - (y + l_1 - l_r)^2}} \right] \\ \psi_2 &= \arctan \left[ \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{b^2 - (-y - l_1 + l_r)^2}} \right] + \\ &\arctan \left[ \frac{-y - l_1 + l_r}{l} \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{b^2 - (-y - l_1 + l_r)^2}} \right] \\ \widehat{\psi}_1 &= \arctan \left[ \sqrt{\frac{l^2 - \widehat{b}^2}{\widehat{b}^2 - (y + l_1 - l_r)^2}} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\arctan \left[ \frac{y + l_1 - l_r}{l} \sqrt{\frac{l^2 - \widehat{b}^2}{\widehat{b}^2 - (y + l_1 - l_r)^2}} \right] \\ \widehat{\psi}_2 &= \arctan \left[ \sqrt{\frac{l^2 - \widehat{b}^2}{\widehat{b}^2 - (-y - l_1 + l_r)^2}} \right] + \\ &\arctan \left[ \frac{-y - l_1 + l_r}{l} \sqrt{\frac{l^2 - \widehat{b}^2}{\widehat{b}^2 - (-y - l_1 + l_r)^2}} \right] \\ \psi_3 &= \operatorname{arctanh} \left[ \frac{\sqrt{((y + l_1 - l_r)^2 - b^2)(l^2 - b^2)}}{l(y + l_1 - l_r) - b^2} \right] \\ \psi_4 &= \operatorname{arctanh} \left[ \frac{\sqrt{((-y - l_1 + l_r)^2 - b^2)(l^2 - b^2)}}{l(-y - l_1 + l_r) - b^2} \right] \\ \widehat{\psi}_3 &= \operatorname{arctanh} \left[ \frac{\sqrt{((y + l_1 - l_r)^2 - \widehat{b}^2)(l^2 - \widehat{b}^2)}}{l(y + l_1 - l_r) - \widehat{b}^2} \right] \\ \widehat{\psi}_4 &= \operatorname{arctanh} \left[ \frac{\sqrt{((-y - l_1 + l_r)^2 - \widehat{b}^2)(l^2 - \widehat{b}^2)}}{l(-y - l_1 + l_r) - \widehat{b}^2} \right] \\ \psi_5 &= \arctan \left[ \sqrt{\frac{l^2}{-(y + l_1 - l_r)^2}} \right] + \\ &\arctan \left[ \frac{y + l_1 - l_r}{l} \sqrt{\frac{l^2}{-(y + l_1 - l_r)^2}} \right] \\ \psi_6 &= \arctan \left[ \sqrt{\frac{l^2}{-(-y - l_1 + l_r)^2}} \right] + \\ &\arctan \left[ \frac{-y - l_1 + l_r}{l} \sqrt{\frac{l^2}{-(-y - l_1 + l_r)^2}} \right] \end{aligned}$$

其中,  $b = y_0, \widehat{b} = y_2$ .