

纳米圆形孔洞 SH 波散射的复变函数解答

吴红梅^{1,2} 欧志英²

(1 兰州理工大学 理学院 730050 兰州; 2 兰州理工大学 机电工程学院 730050 兰州)

摘要: 利用复变函数理论, 研究了平面内纳米圆形孔洞对剪切波(SH波)的散射问题。首先给出宏观尺度下平面内嵌有孔洞的入射波场和散射波场。其次考虑表面效应, 给出纳米尺度下的边界条件, 建立求解散射波函数中含有未知系数的无穷代数方程组, 并利用三角函数的正交性得出了应力场的解析解。最后通过算例分析了表面效应、量纲为一的波数对孔洞周围动应力集中因子及径向应力的影响, 结果表明: 表面效应减弱了孔洞周围的动应力集中, 但增强了对径向应力的影响, 随着表面效应的增大, 动应力集中因子单调递减而径向应力单调递增。随着量纲为一的波数的增大, 应力集中因子减小, 而径向应力在不同区间内的变化趋势不同。

关键词: SH 波的散射; 复变函数理论; 表面效应; 正交性; 动应力集中因子; 径向应力

中图分类号: O343 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.38.02.C111

1 引 言

弹性波散射理论对光学、声学、地球物理学、地震学以及材料等工程和科学研究的发展具有非常重要的意义。当弹性波在有限结构中传播时, 由于弹性波会在结构的表/界面和缺陷(孔洞、夹杂或裂纹)之间发生多重散射, 使缺陷周围的波场和应力分布变得极为复杂, 在缺陷周围应力集中的地方将会出现材料的损伤和裂纹扩展。因此, 确定动应力在缺陷附近的分布对材料结构的优化设计非常重要。故而关于弹性基体中存在缺陷体等相关散射问题一直是研究波动理论的热门话题。

通过波函数展开法、积分方程和积分变换等方法, 文献[1]系统地研究了弹性波的散射和动应力集中问题。文献[2]于 1982 年将弹性静力学中的复变

函数方法推广到二维散射问题的分析中, 该方法与多极坐标移动技术结合起来处理问题, 更能体现出它的优越性: 能够方便地求解全空间或半空间中嵌有单个或多个孔洞、夹杂和裂纹等的结构对 SH 波散射的动应力集中问题, 大大地拓宽了传统波函数展开法的应用范围。

近年来, 很多学者利用波函数展开法、复变函数法、积分方程法等研究了相关模型, 已经取得了一系列的成果。文献[3]利用复变函数法、多极坐标移动技术及傅里叶级数展开求解二维直角平面内圆形弹性夹杂对稳态入射平面 SH 波的散射问题。文献[4]研究了稳态水平剪切(SH)波作用下含有圆柱形孔洞的各向异性弹性半空间的动力响应问题, 探讨介质的各向异性对孔附近动应力的影响规律。文献[5]研究了含有直线裂纹的直角域中椭圆形夹杂对 SH 波的散射。文献[6]研究了弹性半空间中含直边

基金项目: 国家自然科学基金(11362009; 11862014)

收稿日期: 2019-12-23

修回日期: 2021-02-09

第一作者简介: 吴红梅, 女, 1980 年生, 博士, 兰州理工大学, 讲师; 研究方向——波动理论。E-mail: wuhongmei0610@126.com

通信作者: 欧志英, 男, 1970 年生, 兰州理工大学, 教授; 研究方向——界面力学。E-mail: zhiyingou@163.com

界半圆形衬砌隧道对 SH 波的散射, 得到了解析解。文献[7]讨论了球面压缩波入射下深埋三维衬砌洞室的动应力集中效应。文献[8]讨论了半空间浅腔对表面波多次散射的理论。文献[9]通过研究弹性 SH 波在各向同性非均匀介质中传播问题得到解析解。

然而, 前述的研究都是在宏观尺度下进行的, 没有考虑纳米尺度下的表面效应。由于纳米科学和纳米技术的飞速发展, 微纳尺度的材料如纳晶材料、纳米多孔材料、微纳米机械结构等应用越来越广泛^[10-11], 相关的振动问题也越来越多。由于材料组分更加小尺度化, 裂缝、孔洞和夹杂表面原子的比表面积越来越大, 表面效应也越来越显著, 因此研究工作者利用表面弹性力学研究缺陷体的表面效应对复合材料的变形影响。基于表面弹性理论^[12], 文献[13]通过波函数展开法得到纳米孔洞对入射平面 P 波衍射的表面影响。随后, 文献[14-18]同样以波函数展开法为基础讨论纳米尺度下多孔、夹杂等平面波的散射问题。这些研究均是在柱坐标系下进行的, 对于波函数展开法与复变函数理论相结合的方法涉及甚少。

为此, 本文基于表面弹性理论及经典弹性理论, 采用波函数展开法与复变函数理论相结合的方法, 讨论纳米圆形孔洞对入射平面 SH 波的散射问题, 利用三角函数的正交性得到应力场的解析解, 并通过数值结果分析表面效应和量纲为一的波数对动应力集中因子以及径向应力的影响。

2 基本方程

根据表面弹性理论, 弹性体的表面可看作是与基体无滑动地粘连在一起, 且厚度可忽略不计的薄膜。对于基体仍然适用经典弹性理论, 但在表面上, 由于表面应力的存在而不再适用。

对基体而言, 平衡方程和本构方程与经典弹性理论方程相同, 如下式所示。

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2)$$

其中: t 为时间; ρ 为密度; μ 为剪切模量; ν 为泊松比; σ_{ij} 为基体处的应力分量; ε_{ij} 和 ε_{kk} 为应变分量; u_i 为位移分量; δ_{ij} 为 Kronecker 符号。应变与位移关系为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

由广义 Young-Laplace 方程^[19], 表/界面平衡方程为

$$(\sigma - \sigma^l) \mathbf{n} = -\nabla_s \cdot \sigma^s \quad (4)$$

其中: σ 、 σ^l 、 σ^s 分别为基体、夹杂、界面的应力; \mathbf{n} 为界面法向量; $\nabla_s \cdot \sigma^s$ 为界面散度。

表/界面本构方程为

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \tau^0 \delta_{\alpha\beta} + 2(\mu^s - \tau^0) \delta_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} + (\lambda^s + \tau^0) \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \quad (5)$$

其中: τ^0 为残余表面张力(本文不考虑残余表面张力, 即 $\tau^0 = 0$); μ^s 和 λ^s 为表面参数; $\sigma_{\alpha\beta}^s$ 为表面应力。本文中 i, j, k 取 1, 2, 3; α, β, γ 取 1, 2。

3 问题模型及理论分析

含有纳米圆柱形孔洞的无限大弹性体, 其剪切模量和密度分别为 μ 和 ρ , 圆孔半径为 a , 如图 1 所示, 建立直角坐标系 xoy 。

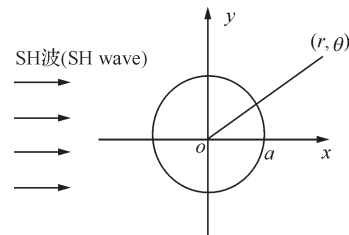


图1 纳米圆形孔洞对入射平面 SH 波的散射
Fig.1 Scattering of SH wave around nano circular cavity

对于反平面应变问题, 满足

$$u_x = u_y = 0, u_z = w(x, y) \quad (6)$$

由式(1)~(3)和式(6)得相应的运动方程为

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7)$$

应力和位移关系为

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)中, 有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9)$$

对于稳态响应, 时间因子可与位移分离, 故可设 $w = W e^{-i\omega t}$, 则式(9)可表示为

$$\nabla^2 W + K^2 W = 0 \quad (10)$$

其中: W 为位移势函数; $K = \omega / \nu$ 为波数, ω 为圆频率, $\nu = \sqrt{\mu / \rho}$ 为波速。

基于复变函数理论, 引入复变数 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 。则式(8)和式(10)可分别表示为

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right), \sigma_{yz} = i\mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} K^2 W = 0 \quad (12)$$

其中 i 为虚数单位, $i^2 = -1$ 。

在柱坐标系 (r, θ, z) 下, 式(11)又可表示为

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right), \\ \sigma_{\theta z} &= i\mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

根据式(12), 由图 1 可知, 入射 SH 波沿着 x 轴的正方向传播, 因此入射波函数 $W^{(Inc)}$ 可表示为^[1]

$$W^{(Inc)} = W_0 e^{iKx} = W_0 e^{\frac{iK}{2}(z+\bar{z})} \quad (14)$$

散射波函数 $W^{(Sca)}$ 可表示为^[1]

$$W^{(Sca)} = \frac{1}{2} W_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(K|z|) \left[\left(\frac{z}{|z|} \right)^n + \left(\frac{\bar{z}}{|z|} \right)^{-n} \right] \quad (15)$$

其中: W_0 为入射波振幅; $H_n^{(1)}(\cdot)$ 为 n 阶第一类 Hankel 函数; a_n 为未知系数。

孔洞周围的全波为入射波与散射波之和, 即

$$W = W^{(Inc)} + W^{(Sca)} \quad (16)$$

由式(13)~式(15)以及如下公式

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[H_n^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^n \right] = \frac{K}{2} H_{n-1}^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^{n-1} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[H_n^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^n \right] = -\frac{K}{2} H_{n+1}^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^{n+1} \quad (18)$$

可得

$$\sigma_{rz}^{(Inc)} = \frac{i\mu KW_0}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) e^{\frac{iK}{2}(z+\bar{z})} \quad (19)$$

$$\sigma_{\theta z}^{(Inc)} = -\frac{\mu KW_0}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) e^{\frac{iK}{2}(z+\bar{z})} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^{(Sca)} &= \frac{\mu KW_0}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[H_{n-1}^{(1)}(K|z|) - \right. \\ &\quad \left. H_{n+1}^{(1)}(K|z|) \right] \left[\left(\frac{z}{|z|} \right)^n + \left(\frac{\bar{z}}{|z|} \right)^{-n} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{(Sca)} &= \frac{i\mu KW_0}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[H_{n-1}^{(1)}(K|z|) + \right. \\ &\quad \left. H_{n+1}^{(1)}(K|z|) \right] \left[\left(\frac{z}{|z|} \right)^n - \left(\frac{\bar{z}}{|z|} \right)^{-n} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

由式(16)得相应的总应力为

$$\sigma_{rz} = \sigma_{rz}^{(Inc)} + \sigma_{rz}^{(Sca)}, \sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^{(Inc)} + \sigma_{\theta z}^{(Sca)} \quad (23)$$

根据式(5)得表面应力 $\sigma_{\theta z}^s$ 为

$$\sigma_{\theta z}^s = 2\mu^s \varepsilon_{\theta z} \quad (24)$$

又由式(2)得总应力 $\sigma_{\theta z}$ 为

$$\sigma_{\theta z} = 2\mu \varepsilon_{\theta z} \quad (25)$$

结合式(24)和式(25)有

$$\sigma_{\theta z}^s = \frac{\mu^s}{\mu} \sigma_{\theta z} \quad (26)$$

再由式(4), 在圆孔边界 $(r = a)$ 处有

$$\sigma_{rz} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^s}{\partial \theta} \quad (27)$$

将式(26)代入(27)即得 $r = a$ 上的边界条件为

$$\sigma_{rz} = -s \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} \quad (28)$$

其中 $s = \mu^s / a\mu$, s 是一个反映表/界面纳米尺度影响的参数。可以看出, 在弹性体材料给定后, s 与孔洞半径 a 成反比, 当 a 足够大时, 有 $s \ll 1$, 此时表面效应可以不考虑, 即为宏观问题。但若在纳米尺度下, a 取值很小, s 的作用就非常显著, 此时考虑表面效应是有必要的。

将式(19)~式(23)代入边界条件式(28)并化简得

$$\begin{aligned} &\left[i(1-s)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \frac{Kas}{2}(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2) \right] e^{iKa \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ ns \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[H_{n-1}^{(1)}(Ka) + H_{n+1}^{(1)}(Ka) \right] - \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[H_{n-1}^{(1)}(Ka) - H_{n+1}^{(1)}(Ka) \right] \right\} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \end{aligned} \quad (29)$$

对式(29)两边同时乘 $e^{-im\theta}$, 并在 $[0, 2\pi]$ 上积分, 利用以下公式

$$\begin{aligned} e^{iKa \cos \theta} &= J_0(Ka) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(Ka) (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \quad (30) \\ \int_0^{2\pi} e^{iKa \cos \theta} e^{-im\theta} d\theta &= \begin{cases} 2\pi J_0(Ka), & m = 0 \\ 2\pi i^m J_m(Ka), & m > 0 \\ 2\pi i^{-m} J_{-m}(Ka), & m < 0 \end{cases} \quad (31) \end{aligned}$$

其中 $J_n(\cdot)$ 为 n 阶第一类 Bessel 函数。即可求得

$$a_n = -\frac{i^n \varepsilon_n [(ns-1)J_{n-1}(Ka) + (ns+1)J_{n+1}(Ka)]}{(ns-1)H_{n-1}^{(1)}(Ka) + (ns+1)H_{n+1}^{(1)}(Ka)} \quad (32)$$

$(n=0, 1, 2, \dots)$

其中：当 $n=0$ 时， $\varepsilon_n=1$ ；当 $n>0$ 时， $\varepsilon_n=2$ 。

若不考虑表面效应的影响，即 $s=0$ ，其结果与文献[1]的结果相符，说明本文所采用的方法是正确的。最后将式(32)代入式(19)~式(23)，即可求出总应力 σ_{rz} 和 $\sigma_{\theta z}$ 。

4 数值结果分析

在纳米尺度下研究孔洞的动应力集中现象是非常重要的。对动应力集中因子 σ_{DSCF} 定义为

$$\sigma_{DSCF} = \left| \frac{\sigma_{\theta z}}{\sigma_0} \right| \quad (33)$$

其中 σ_0 为SH波在其传播方向上的应力强度， $\sigma_0 = \mu KW_0$ 。由式(32)可以看出，考虑表面效应之后，动应力集中因子 σ_{DSCF} 不仅与量纲为一的波数 Ka 有关，还与表面参数 s 有关。经过实际计算，在级数求解中取 $n=9$ ，即可满足计算精度 (10^{-6})。

为了验证本文所采用方法的正确性，动应力集中因子在本文中的数值结果与文献[1]的数值结果 ($Ka=0.2$) 的比较如图2所示，可以看出，该结果与文献[1]的结果 ($s=0$) 完全一致，表明本文所得的结果是正确的。

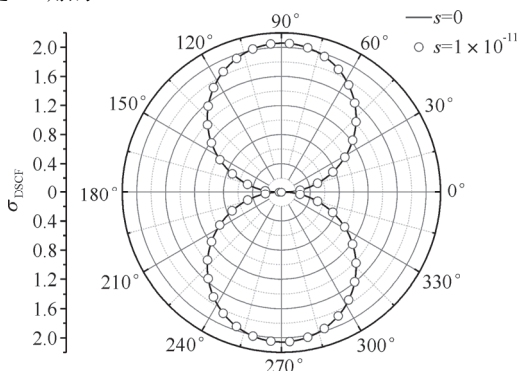


图2 本文与文献[1]的结果关于 σ_{DSCF} 的比较

Fig.2 Comparison of the present and Ref.[1]'s results for the σ_{DSCF}

在低频 ($Ka=0.2$) 的情况下，图3给出了圆孔附近低频时表面效应对动应力集中因子的影响。结果表明： σ_{DSCF} 的图形最大值出现在 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 附近，随着表面参数 s 的增大， σ_{DSCF} 在 $[0, 2\pi]$ 内逐渐减小。图4给出了低频时表面效应对径向应力的影响。其结果表明： σ_{rz} 的图形最大值出现在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 附近；随

着表面参数 s 的增大， σ_{rz} 在 $[0, 2\pi]$ 内逐渐增大。

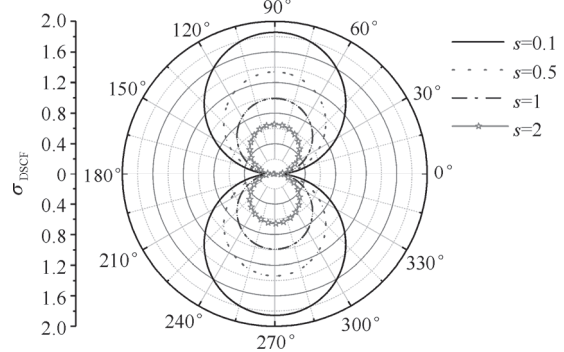


图3 低频时表面效应对动应力集中因子的影响

Fig.3 Effect of surface effect on the σ_{DSCF} with $Ka=0.2$

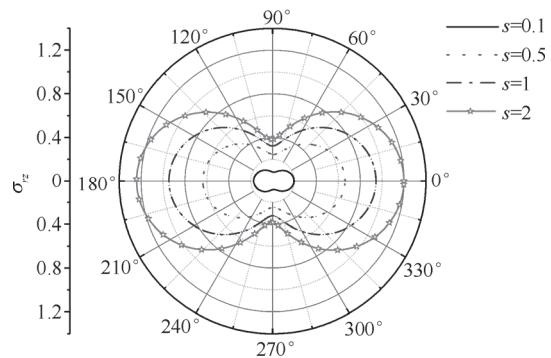


图4 低频时表面效应对径向应力的影响

Fig.4 Effect of surface effect on the σ_{rz} with $Ka=0.2$

在高频 ($Ka=\pi$) 情况下，图5给出了圆孔附近高频时表面效应对动应力集中因子的影响。结果表明：与低频 ($Ka=0.2$) 相比， σ_{DSCF} 的最大值不再出现在 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 附近；但随着表面参数 s 的增大， σ_{DSCF} 在 $[0, 2\pi]$ 内依然逐渐减小。这一结果与低频时完全相同。图6给出了高频时表面效应对径向应力的影响。结果表明： σ_{rz} 的图形最大值也发生了改变；但随着表面参数 s 的增大， σ_{rz} 在 $[0, 2\pi]$ 内依然逐渐增大。这一结果也与低频时完全相同。

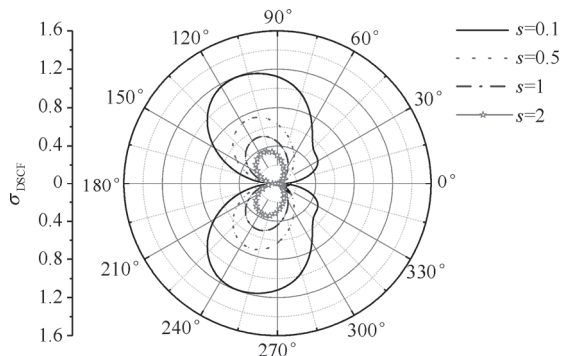


图5 高频时表面效应对动应力集中因子的影响

Fig.5 Effect of surface effect on the σ_{DSCF} with $Ka=\pi$

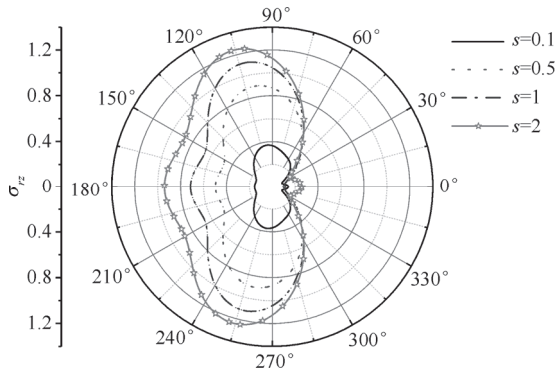


图6 高频时表面效应对径向应力的影响
Fig.6 Effect of surface effect on σ_{rz} with $Ka = \pi$

图7给出了 $[0, 2\pi]$ 内表面效应 $s = 0.5$ 时, Ka 对动应力集中因子的影响。结果表明: 当 $Ka = 0.5$ 时, σ_{DSCF} 的图形随着 Ka 的增大, σ_{DSCF} 在 $[0, 2\pi]$ 内逐渐减小。图8给出了 $[0, 2\pi]$ 内表面效应 $s = 0.5$ 时, Ka 对径向应力的影响。结果表明: 当 $Ka = 0.5$ 时, σ_{rz} 在 $\theta = 0$ 处取得最大值 0.66; 当 $Ka = 2.0$ 时, σ_{rz} 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处取得最大值 0.74; 当 $Ka = 3.5$ 时, σ_{rz} 在 $\theta = \frac{5\pi}{9}$ 处取得最大值 0.94。可以看出, 随着 Ka 的增大, 径向应力大约在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ 和 $(\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3})$ 内逐渐增大, 而在其他区间内则逐渐减小。

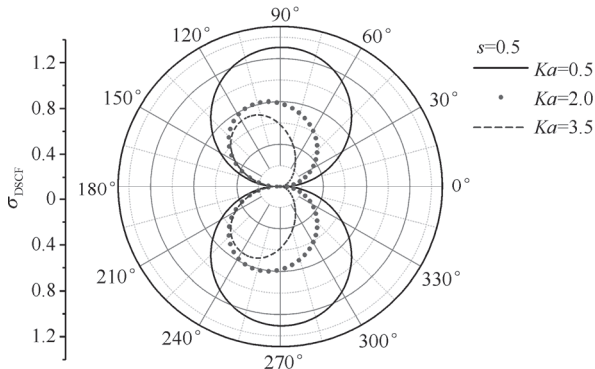


图7 Ka 对动应力集中因子的影响
Fig.7 Effect of wave number on the σ_{DSCF}

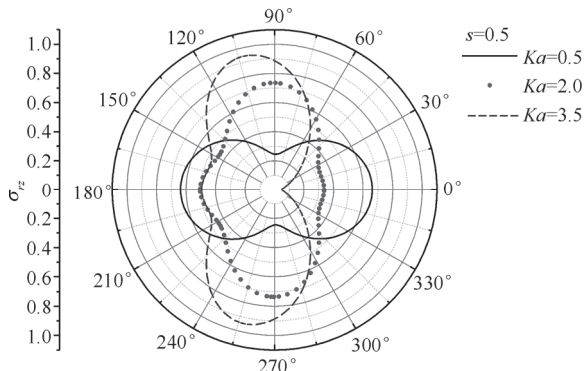


图8 Ka 对径向应力的影响
Fig.8 Effect of wave number on σ_{rz}

5 结 论

本文基于复变函数理论, 研究了纳米圆形孔洞对入射平面 SH 波的散射问题。结合经典弹性理论、表面弹性理论, 通过三角函数的正交性得出应力场的解析解, 并通过算例分析了表面效应、量纲为一的波数对孔洞周围动应力集中因子及径向应力的影响, 具体结论如下。

- 1) 表面效应减弱了孔洞周围的动应力集中现象, 随着表面效应的增大, 动应力集中因子单调递减。当固定其他变量, 孔洞半径足够大时, 可忽略表面效应。
- 2) 表面效应增强了径向应力的影响, 随着表面效应的增大, 径向应力单调递增。当固定其他变量, 孔洞半径越小, 径向应力越大。
- 3) 当固定表面效应时, 随着量纲为一的波数的增大, 应力集中因子减小, 而径向应力分区域增大或减小。
- 4) 随着表面效应、量纲为一的波数的改变, 应力集中因子及径向应力的极大值所对应的位置也随之发生改变。

本文基于复变函数理论给出的推导过程和计算结果对于解决相关模型在微纳尺度下弹性波的散射问题有一定的理论参考价值。

参 考 文 献 (References)

- [1] PAO Y H, MOW C C. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations[M]. New York: Crane Russak, 1973.
- [2] LIU Diankui, GAI Bingzheng, TAO Guiyuan. Applications of the method of complex functions to dynamic stress concentrations[J]. Wave motion, 1982, 4(3): 293-304.
- [3] 史文谱, 陈瑞平, 张春萍. 直角平面内弹性圆夹杂对入射平面 SH 波的散射[J]. 应用力学学报, 2007, 24(1): 154-159. (SHI Wenpu, CHEN Ruiping, ZHANG Chunping. Scattering of circular inclusion in right-angle plane to incident plane SH-wave[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2007, 24(1): 154-159(in Chinese)).
- [4] 陈志刚. SH 波作用下各向异性弹性半空间中浅埋圆孔附近的动应力集中研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(3): 899-905. (CHEN Zhigang. Dynamic stress concentration around shallow cylindrical cavity by SH wave in anisotropically elastic half-space[J]. Rock and soil mechanics, 2012, 33(3): 899-905(in Chinese)).
- [5] 丁晓浩, 齐辉, 赵元博. 含有直线裂纹的直角域中椭圆形夹杂对

- SH 波的散射[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2016, 49(4): 415-421. (DING Xiaohao, QI Hui, ZHAO Yuanbo. Scattering of SH-wave by elliptic inclusion in right-angle plane with beeline crack[J]. Journal of Tianjin University(science and technology), 2016, 49(4): 415-421(in Chinese)).
- [6] 张海, 杨国岗, 刘中宪, 等. 弹性半空间中含直边界半圆形衬砌隧道对 SH 波的散射解析解[J]. 应用力学学报, 2017, 34(2): 243-249. (ZHANG Hai, YANG Guogang, LIU Zhongxian, et al. An analytical solution to scattering of plane SH waves by a semi-circle lined tunnel in elastic half-space boundary[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2017, 34(2): 243-249(in Chinese)).
- [7] 刘中宪, 王楚楚, 蒋坪临, 等. 球面压缩波入射下深埋三维衬砌洞室的动应力集中效应[J]. 应用力学学报, 2017, 34(5): 904-911. (LIU Zhongxian, WANG Chuchu, JIANG Pinglin, et al. The dynamic stress concentration effect of deeply buried three-dimensional lining cavity under the spherical compression wave[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2017, 34(5): 904-911(in Chinese)).
- [8] PHAN H, CHO Y, LI W. A theoretical approach to multiple scattering of surface waves by shallow cavities in a half-space[J]. Ultrasonics, 2018, 88: 16-25.
- [9] BEDNARIK M, CERVENKA M, LOTTON P, et al. Analytical solutions for elastic SH-waves propagating through an isotropic inhomogeneous layer[J]. Composite structures, 2019, 220(15): 875-887.
- [10] AVOURIS P, HERTEL T, MARTEL R, et al. Carbon nanotubes: nanomechanics, manipulation, and electronic devices[J]. Applied surface science, 1999, 141(3): 201-209.
- [11] 李庆华, 赵昕, 徐世焯. 纳米二氧化硅改性超高韧性水泥基复合材料冲击压缩试验研究[J]. 工程力学, 2017, 34(2): 85-93. (LI Qinghua, ZHAO Xin, XU Shilang. Impact compression properties of nano-SiO₂ modified ultra high toughness cementitious composites using a split hopkinson pressure bar[J]. Engineering mechanics, 2017, 34(2): 85-93(in Chinese)).
- [12] GURTIN M E, MURDOCH A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. Archive for rational mechanics and analysis, 1975, 57(4): 291-323.
- [13] WANG G F, WANG T J, FENG X Q. Surface effects on the diffraction of plane compressional waves by a nanosized circular hole[J]. Applied physics letters, 2006, 89(23): 231923-1-231923-3.
- [14] WANG G F. Multiple diffraction of plane compressional waves by two circular cylindrical holes with surface effects[J]. Journal of applied physics, 2009, 105(1): 013507-1-013507-6.
- [15] RU Y, WANG G F, WANG T J. Diffractions of elastic waves and stress concentration near a cylindrical nano-inclusion incorporating surface effect[J]. Journal of vibration and acoustics, 2009, 131: 061011-1-061011-7.
- [16] RU Y, WANG G F, SU L C, et al. Scattering of vertical shear waves by a cluster of nanosized cylindrical holes with surface effect[J]. Acta mechanica, 2013, 224(5): 935-944.
- [17] 汝艳, 曹小杉. SH 波诱发的阵列纳米孔洞周围的弹性波散射和动应力集中[J]. 应用力学学报, 2015, 32(4): 597-603. (RU Yan, CAO Xiaoshan. Dynamic stress concentration around nanosized cylindrical holes induced by SH-waves[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2015, 32(4): 597-603(in Chinese)).
- [18] 吴红梅, 欧志英. 直角平面角点圆弧形弹性纳米夹杂对稳态平面 SH 波的散射[C]. 中国力学大会-2017 暨庆祝中国力学学会成立 60 周年大会论文集. 北京: 中国力学学会, 2017: 1044-1050. (WU Hongmei, OU Zhiying. Scattering of SH-wave by circular-arc nano-inclusion at the corner in right-angle plane[C]. The Chinese Congress of Theoretical and Applied Mechanics-2017 and proceedings of the 60th anniversary conference of The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics. Beijing: The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics, 2017: 1044-1050(in Chinese)).
- [19] CHEN T, CHIU M S, WENG C N. Derivation of the generalized Young-Laplace equation of curved interfaces in nanoscaled solids[J]. Journal of applied physics, 2006, 100(7): 074308-1-074308-5.

(编辑: 李萍)

Complex variable function solution for SH wave scattering in nano circular hole

Wu Hongmei^{1,2} Ou Zhiying²

(1 School of Science, Lanzhou University of Technology, 730050, Lanzhou, China;

2 School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, 730050, Lanzhou, China)

Abstract: The scattering of shear waves (SH waves) by nano-circular hole in plane is studied by using complex function theory. Firstly, the incident wave field and the scattered wave field are presented. Secondly, considering

the surface effect, the boundary condition is given, and the infinite algebraic equations are established to solve the unknown coefficients of the scattering wave function. By using the orthogonality of trigonometric function, the analytic solution of stress field is obtained. Finally, the influence of surface effect and non dimensional wave number on the dynamic stress concentration factor and the radial stress around the hole are analyzed by some examples, the numerical results show that the surface effect weakens the dynamic stress concentration but enhances the radial stress around the hole. With the increases of wave number, the stress concentration factor decreases and the variation trend of radial stress is different in different intervals.

Keywords: *scattering of SH-waves, the complex variable function theory, surface effect, orthogonality, dynamic stress concentration factor, radial stress.*