

文章编号: 1673-5196(2021)01-0164-09

# Winkler-Pasternak 地基上四边受压 FGM 矩形板的自由振动与屈曲特性

滕兆春, 王俊淋

(兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050)

**摘要:** 基于经典薄板理论, 利用广义 Hamilton 原理推导相应的控制微分方程并对方程进行无量纲化; 采用微分变换法(DTM)计算不同边界条件下方程的前三阶无量纲固有频率和屈曲载荷, 并将方程的求解退化为无地基功能梯度板和有地基普通材料板两种情形, 将其 DTM 解与已有文献的解进行对比, 结果一致, 表明 DTM 的适用性和精确性; 分析了边界条件、梯度指数、地基弹性刚度系数、地基剪切刚度系数、长宽比等因素对 FGM 矩形板无量纲固有频率以及临界屈曲载荷的影响. 结果表明: 在几种边界条件下, 边界约束越强, 无量纲固有频率越大; 地基弹性刚度系数、地基剪切刚度系数、长宽比的增大也会导致无量纲固有频率增大; 面内压载荷的增大会导致无量纲固有频率减小; 长宽比越大, 临界屈曲载荷越小; 梯度指数越大临界屈曲载荷越小.

**关键词:** Winkler-Pasternak 弹性地基; FGM 矩形板; 无量纲固有频率; 临界屈曲载荷; 微分变换法(DTM)

**中图分类号:** O343 **文献标志码:** A

## Free vibration and buckling characteristics of four-sides compressed FGM rectangular plates resting on Winkler-Pasternak foundation

TENG Zhao-chun, WANG Jun-lin

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** Based on the classical thin plate theory, a governing differential equation is derived by using the generalized Hamilton principle and the equation is treated to dimensionless. The differential transformation method (DTM) is then utilized to determine first three dimensionless natural frequencies and buckling loads of the equation under different boundary conditions. The solution of the equation is reduced further to two cases: functionally graded plate without foundation and common material plate with foundation. The DTM solution is compared with the solution published in literature, and both results are consistent indicating the applicability and accuracy of DTM. Finally, the effects of boundary conditions, gradient index, elastic stiffness coefficient of the foundation, shear stiffness coefficient as well as aspect ratio of the foundation on the dimensionless natural frequency and critical buckling load of the FGM rectangular plate are analyzed respectively. The results show that: under the boundary conditions studied, the stronger the boundary constraint is, the larger the dimensionless natural frequency is; the increase of elastic stiffness coefficient, shear stiffness coefficient as well as aspect ratio of the foundation will also lead to the increase of the dimensionless natural frequency; the increase of in-plane pressure load may lead to the decrease of the dimensionless natural frequency; the larger the aspect ratio, the smaller the critical buckling load; the larger the gradient index, the smaller the critical buckling load; the larger the gradient index, the smaller the critical buckling load.

**Key words:** Winkler-Pasternak elastic foundation; FGM rectangular plates; dimensionless natural frequencies; critical buckling loads; differential transform method (DTM)

收稿日期: 2019-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(11662008)

作者简介: 滕兆春(1969-), 男, 甘肃榆中人, 副教授.

随着现代社会工程建设的快速发展, 弹性地基上各类板状结构在工程中的应用前景越来越广泛<sup>[1]</sup>. 工程中常见的地基模型有: 弹性连续介质模

型、Winkler 模型、粘弹性模型、双参数模型等。Winkler 模型认为地基上某点的沉降只与该点作用的载荷有关,而与其它点的载荷无关<sup>[2]</sup>;弹性连续介质模型将地基视为完全相连的弹性体,在求解过程中通常都需要求解微分方程,在数学上较为困难。Winkler-Pasternak 地基作为一种对 Winkler 地基模型的修正<sup>[3]</sup>,同时也没有弹性连续介质地基模型在数学上遇到的困难,更接近工程中的实际情况<sup>[1]</sup>。在 Winkler 地基模型的基础上,Winkler-Pasternak 地基模型假设各弹簧之间存在相互的剪切作用,且该剪切作用通过一层只能产生竖向剪切变形而不能被压缩的剪切薄层与弹簧单元相连来实现<sup>[4]</sup>。

功能梯度材料(Functionally Graded Material, FGM)是指两种或两种以上的材料从一侧到另一侧连续变化<sup>[5]</sup>,从而使不同材料之间的性能也得以连续变化,以满足构件的不同部位对材料使用性能需求的不同,特别在减缓热应力方面其性能明显优于传统复合材料。正是因为这种优越的力学性能,使得 FGM 应用到更多的领域,特别在航空航天、核工业、光学器件等尖端领域。目前对弹性地基和 FGM 的研究也较多,诸如:Reddy 等<sup>[6]</sup>用有限元方法对热机耦合 FGM 圆柱和板结构的动力学热弹响应做了分析。蒲育等<sup>[7]</sup>在二维线弹性理论的基础上,利用 Hamilton 建立了 FGM 板面内自由振动的控制微分方程,然后采用微分求积法(Differential Quadrature Method, DQM),研究了四边弹性约束条件下 FGM 矩形板面内自由振动的无量纲频率。Latifi 等<sup>[8]</sup>在经典板理论的基础上,利用傅里叶级数展开研究了受面内载荷 FGM 矩形板在各种边界条件下的动力屈曲。Na 等<sup>[9]</sup>用有限元方法研究了功能梯度陶瓷复合材料的三维热机屈曲并分析了功能梯度材料结构的长厚比、体积分数分布和系统几何参数对 FGM 板热屈曲性能的影响。Gupta 等<sup>[10]</sup>基于非多项式高阶剪切和法向变形理论,采用有限元方法研究 Winkler-Pasternak 地基上 FGM 板的弯曲与振动问题,并分析了各种边界条件、几何条件、地基参数和两种微力学材料模型对功能梯度板弯曲和振动响应的影响。周凤玺等<sup>[11]</sup>在三维线性热弹性理论的基础上,运用 Laplace 变换和打靶法,求得了在热冲击下四边简支 FGM 矩形板的热响应,并分析了材料的组分分布和功能梯度材料的热响应行为之间的关系。Liang 等<sup>[12]</sup>利用 Laplace 变换和微分求积法求得了 FGM 圆板在双参数黏弹性地基上瞬态响应的解析解。滕兆春等<sup>[13]</sup>使用 DQM 法,数值研究了变厚度矩形板在弹性地基上横向自由振动的频率特

性。刘丽威<sup>[14]</sup>用 DQM 研究了不同边界条件下长宽比和剪切变形对 FGM 板频率的影响。王小岗等<sup>[15]</sup>利用挠度试函数和 Galerkin 法求得四边自由的变厚度矩形板在 Winkler 弹性地基上的自振频率方程和算式。国内外学者展开的对功能梯度材料在各种载荷作用下力学响应的研究虽然较多,但鲜有关于同时考虑多种边界条件和 Winkler-Pasternak 弹性地基上四边受压功能梯度矩形板的自由振动与屈曲特性的报道。同时以上求解 FGM 板自由振动、弯曲和屈曲问题的方法虽多,例如有限元方法,适用于复杂边界条件,但需要大量的前期准备工作、密集的网络和较大的计算量,才能保证计算结果满足所需的精度<sup>[16]</sup>,DQM 又因为边界条件的限制或公式推导的繁琐,使求解变得也较为麻烦。

微分变换法(differential transform method, DTM)是一种相对于有限元等可不采用结点而通过变换迭代求解获得较高计算精度结果的一种半解析方法,它可以将边界条件和微分方程结合,将其变换成相应的代数方程求解。最初该方法被运用于电路问题的分析<sup>[17]</sup>,近年来也逐渐被用于结构的静动力学响应求解<sup>[18-21]</sup>,且编写程序简单,计算结果精度高,完全能满足工程实际的要求<sup>[22]</sup>。本文运用 DTM 对多种边界条件 Winkler-Pasternak 地基上四边受压 FGM 矩形板的自由振动和屈曲特性展开研究。

## 1 问题的描述及基本方程

### 1.1 问题的基本描述

在均匀的 Winkler-Pasternak 弹性地基上放置一块由两种材料组成的四边受压 FGM 矩形板,并建立如图 1 所示坐标系,FGM 矩形板的长宽高分别为  $a$ 、 $b$  和  $h$ ,长宽比为  $\lambda=a/b$ ,载荷  $N_y$  垂直于  $y$  轴截面,载荷  $N_x$  垂直于  $x$  轴截面, $k_w$ 、 $q_w$  分别为地基的弹性刚度系数以及剪切刚度系数, $w$  表示板横

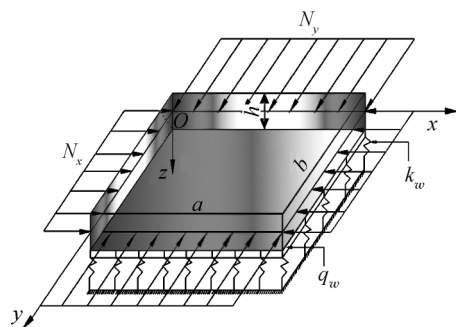


图 1 Winkler-Pasternak 弹性地基上四边受压 FGM 板的几何模型

Fig. 1 Geometric model of FGM plate under four-sided compression on Winkler-Pasternak elastic foundation

向的位移分量.  $y=0$  和  $y=b$  两处边界条件为简支 (S), 其余两对边外的边界条件为简支 (S) 或固支 (C). 以下 FGM 矩形板四条直边的边界条件表示均按  $x=0, y=b, x=a$  和  $y=0$  的顺序给出.

假设材料常数沿厚度方向遵循如下规律变化<sup>[23]</sup>:

$$P(z) = (P_c - P_m) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k + P_m \quad (1)$$

式中:  $P$  表示材料的弹性模量  $E$ 、剪切模量  $G$  或密度  $\rho$ ;  $P_c, P_m$  分别表示两种材料的物性参数;  $z$  表示沿板厚度方向的坐标;  $k$  表示梯度指数, 它取不同的值代表成分含量不一的功能梯度材料.

Winkler 地基假定地基界面上任一点的压力强度与该点的沉降量成线性变化, 则在任意时间  $t$ , 数学模型为

$$H(x, y, t) = k_w w(x, y, t) \quad (2)$$

Winkler-Pasternak 考虑各弹簧之间存在相互的剪切作用, 且弹性地基之间始终保持接触, 则在任意时间  $t$ , 地基的载荷与位移关系可表示为

$$H(x, y, t) = k_w w - q_w \nabla^2 w \quad (3)$$

式中:  $\nabla^2$  为 Laplace 算子.

### 1.2 基本方程

物理中面取薄板的正应变与正应力为零的面 ( $z=z_0$ ).

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} zE(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} \quad (4)$$

对式(4)进行积分可得

$$z_0 = \frac{E_m h^2 \psi_2}{E_m h \psi_1} = \frac{\psi_2}{\psi_1} h \quad (5)$$

式中

$$\psi_1 = 1 + \frac{E_c - E_m}{(k+1)E_m}$$

$$\psi_2 = \frac{k(E_c - E_m)}{2(k+1)(k+2)E_m}$$

位移分量:

$$\begin{aligned} u &= -(z - z_0) \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -(z - z_0) \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (6)$$

应变分量:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -(z - z_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -(z - z_0) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma &= -2(z - z_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

物理方程为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中

$$(A_{11}, A_{12}, A_{33}) = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left( 1, \nu, \frac{1-\nu}{2} \right)$$

$$A_{21} = A_{12}, \quad A_{22} = A_{11}$$

FGM 板的抗弯刚度、抗扭刚度为

$$(D_{11}, D_{12}, D_{33}) = \int_{-h/2}^{h/2} (z - z_0)^2 \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left( 1, \nu, \frac{1-\nu}{2} \right) dz \quad (9)$$

将式(5)代入式(9), 可得

$$D_{11} = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \left( \psi_3 - 12 \frac{\psi_2^2}{\psi_1} \right) = \nu D_{12}$$

$$D_{33} = \frac{E_m h^3}{24(1+\nu)} \left( \psi_3 - 12 \frac{\psi_2^2}{\psi_1} \right)$$

式中:  $\psi_3 = 1 + \frac{3(k^2+k+2)(E_c-E_m)}{(k+3)(k+2)(k+1)E_m}$ ,  $k$  为非负实数, 当  $k \rightarrow 0$  和  $k \rightarrow \infty$  时, 功能梯度材料分别退化为抗弯刚度为  $D_c$  和  $D_m$  的材料.

## 2 控制微分方程及参数的无量纲化

由经典薄板理论可得面内受压 FGM 矩形板在 Winkler-Pasternak 弹性地基上的应变能  $U$ 、动能  $T$ 、外力引起的势能  $V$  分别表示如下:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{11} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{33} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b I_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ k_w w^2 + q_w \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

式中:  $I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = h \left( \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} + \rho_m \right)$ , 为非负实数,  $k \rightarrow 0$  和  $k \rightarrow \infty$  时, FGM 分别退化为密度为  $\rho_c$  和  $\rho_m$  的材料.

对 Winkler-Pasternak 弹性地基上面内受压 FGM 矩形板使用广义 Hamilton 原理<sup>[24]</sup>

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt = 0 \quad (13)$$

式中:  $\delta$  为变分符号;  $t$  为时间. 将式(10~12)代入式(13)可得面内受压 FGM 矩形板在 Winkler-Pasternak 弹性地基上自由振动和屈曲问题的控制微分方

程:

$$D_{11} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2(2D_{33} + D_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - q_w \nabla^2 w + k_w w = 0 \quad (14)$$

考虑 FGM 矩形板在  $y=0$  和  $y=b$  处的边界条件为简支(S), 取 FGM 矩形板的横向位移函数为

$$w(x, y, t) = \bar{w}(x) \sin(m\pi y/b) e^{i\omega t} \quad (15)$$

式中:  $\omega$  表示圆频率,  $i$  表示虚数单位,  $\bar{w}(x)$  表示  $x$  方向的振型,  $m=1, 2, 3, \dots$  表示 FGM 矩形板在  $y$  方向振动的半波数, 引入如下无量纲参数:

$$X = x/a, Y = y/b, W = \bar{w}/a, H = h/a$$

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_c h}{D_c}} N_x^* = N_x a^2 / D_c, N_y^* = N_y a^2 / D_c$$

$$Q = q_w a^2 / D_c, K = k_w a^4 / D_c$$

令:  $\eta = \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} + \rho_m$ , 将式(15)代入式(14)可得面内受压 FGM 矩形板在 Winkler-Pasternak 弹性地基上自由振动和屈曲问题的无量纲控制微分方程为

$$A_0 \frac{d^4 W}{dX^4} + A_1 \frac{d^2 W}{dX^2} + A_2 W = 0 \quad (16)$$

式中

$$A_0 = D_{11} \rho_c / \eta D_c$$

$$A_1 = -2(2D_{33} + D_{12}) m^2 \pi^2 \lambda^2 \rho_c / \eta D_c -$$

$$Q \rho_c / \eta - N_x^* \rho_c / \eta$$

$$A_2 = m^4 \pi^4 \lambda^4 \rho_c / \eta D_c - \Omega^2 + N_y^* m^2 \pi^2 \lambda^2 \rho_c / \eta +$$

$$Q m^2 \pi^2 \lambda^2 \rho_c / \eta + K \rho_c / \eta$$

考虑 FGM 矩形板在  $X=0$  和  $X=1$  处的边界条件为简支(S)或固支(C), 其无量纲形式为

$$\text{固支(C)} \quad W=0, \quad \frac{dW}{dX}=0 \quad (17)$$

$$\text{简支(S)} \quad W=0, \quad \frac{d^2 W}{dX^2}=0 \quad (18)$$

### 3 控制微分方程及边界条件的 DTM 变换

式(12)结合边界条件求其固有频率及临界屈曲载荷的解析解较为困难, 这里采用微分变换法(DTM)求其数值解. 运用 DTM 求解微分方程, 首先需要原函数可展开为 Taylor 级数, 然后经 DTM 变换法则变换, 使系统边界条件和原微分方程(组)能变换为由离散函数组成的代数方程(组), 在通过迭代解出含有未知量的多项式, 最后进行反变换, 求得该微分方程级数形式的解.

基于 Taylor 公式,  $F_r$  为原函数  $f(x)$  经过 DTM 变换后所得, 表示为

$$F_r = \frac{1}{r!} \left[ \frac{d^r f(x)}{dx^r} \right]_{x=x_0} \quad (19)$$

式(19)被称作  $f(x)$  在  $x=x_0$  时的微分变换的正变换式,  $F_r$  被称作  $f(x)$  的微分变换形式.

设函数  $f(x)$  可展开为 Taylor 级数且收敛, 此时  $F_r$  能变换为  $f(x)$ , 表示为

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (x-x_0)^r F_r \quad (20)$$

式(20)被称作微分变换的反变换形式. 由式(19)和式(20)可得

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^r}{r!} \left[ \frac{d^r f(x)}{dx^r} \right]_{x=x_0} \quad (21)$$

DTM 基于 Taylor 级数展开后不要求解函数的各阶导数, 因此计算量大大减小. 在实际应用中, 可用有限的级数表示  $f(x)$ , 则式(21)可写成

$$f(x) = \sum_{r=0}^n (x-x_0)^r F_r \quad (22)$$

与式(22)相比,  $f(x) = \sum_{r=n+1}^{\infty} (x-x_0)^r F_r$  很小, 可忽略不计, 因此求解方程时, 所需要的精度和收敛情况取决于  $n$  的值.

式(16)经 DTM 变换后可得其等价代数方程为

$$\frac{(r+4)!}{r!} A_0 \bar{W}[r+4] + \frac{(r+2)!}{r!} \times A_1 \bar{W}[r+2] + A_2 \bar{W}[r] = 0 \quad (23)$$

将式(23)移项化为递推形式有

$$A_0 \bar{W}[r+4] = - \frac{(r+2)!}{(r+4)!} \frac{A_1}{A_0} \bar{W}[r+2] - \frac{r!}{(r+4)!} \frac{A_2}{A_0} \bar{W}[r] \quad (24)$$

这里  $r=0, 1, 2, 3, \dots, n$ , DTM 边界条件变换如下:

在  $X=0$  处, 简支(S):

$$\bar{W}[0] = \bar{W}[2] = 0 \quad (25)$$

在  $X=0$  处, 固支(C):

$$\bar{W}[0] = \bar{W}[1] = 0 \quad (26)$$

在  $X=1$  处, 简支(S):

$$\sum_{r=0}^{\infty} \bar{W}[r] = 0, \quad \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) \bar{W}[r] = 0 \quad (27)$$

在  $X=1$  处, 固支(C):

$$\sum_{r=0}^{\infty} \bar{W}[r] = 0, \quad \sum_{r=0}^{\infty} r \bar{W}[r] = 0 \quad (28)$$

经式(23)迭代累加并结合边界条件式(25~28)可分别求得四边简支(SSSS)和三边简支一边固支(SSCS)的频率特征方程如下:

$$X_{11}^{(n)}(\Omega) \bar{W}[1] + X_{12}^{(n)}(\Omega) \bar{W}[3] = 0$$

$$X_{12}^{(n)}(\Omega)\overline{W}[1]+X_{22}^{(n)}(\Omega)\overline{W}[3]=0 \quad (29)$$

式中:  $X_{11}^{(n)}(\Omega), X_{12}^{(n)}(\Omega), X_{21}^{(n)}(\Omega), X_{22}^{(n)}(\Omega)$  是迭代  $n$  次以后, 得到的含有未知量无量纲固有频率  $\Omega$  的多项式, 写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} X_{11}^{(n)}(\Omega) & X_{12}^{(n)}(\Omega) \\ X_{21}^{(n)}(\Omega) & X_{22}^{(n)}(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{W}[1] \\ \overline{W}[3] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

要使其存在非零解, 则

$$\begin{vmatrix} X_{11}^{(n)}(\Omega) & X_{12}^{(n)}(\Omega) \\ X_{21}^{(n)}(\Omega) & X_{22}^{(n)}(\Omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

FGM 矩形板失稳时其固有频率应为零. 式(23)中令无量纲固有频率  $\Omega=0$ , 则此时对应的最小屈曲载荷为临界屈曲载荷  $N_{cr}$ , 其求解过程类似于  $\Omega$  的求解过程, 可得

$$\begin{vmatrix} P_{11}^{(n)}(N_{cr}) & P_{12}^{(n)}(N_{cr}) \\ P_{21}^{(n)}(N_{cr}) & P_{22}^{(n)}(N_{cr}) \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

同理在边界条件为对边简支对边固支(CSCS)和一边固支三边简支(CSSS)时, 可得到含有未知量无量纲固有频率  $\Omega$  和临界屈曲载荷  $N_{cr}$  的特征方程:

$$\begin{vmatrix} R_{11}^{(n)}(\Omega) & R_{12}^{(n)}(\Omega) \\ R_{21}^{(n)}(\Omega) & R_{22}^{(n)}(\Omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

$$\begin{vmatrix} T_{11}^{(n)}(N_{cr}) & T_{12}^{(n)}(N_{cr}) \\ T_{21}^{(n)}(N_{cr}) & T_{22}^{(n)}(N_{cr}) \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

由式(32~34), 可分别求得边界条件为 SSSS、CSSS、SSCS、CSCS 时的无量纲固有频率  $\Omega$  和临界屈曲载荷  $N_{cr}$ . 为了保证无量纲固有频率  $\Omega$  和临界屈曲载荷  $N_{cr}$  的精度, 给定:

$$|\Omega_j^{(n)} - \Omega_j^{(n-1)}| \leq \eta_1, \quad |N_{crj}^{(n)} - N_{crj}^{(n-1)}| \leq \eta_2$$

式中:  $\eta_1, \eta_2$  表示迭代误差限, 这里取  $\eta_1 = \eta_2 = 0.000001$ .

### 4 计算结果及分析

使用 MATLAB 软件编写程序能够得到由 DTM 求解的四边受压 FGM 矩形板在 Winkler-Pasternak 弹性地基上自由振动和屈曲特征值问题的无量纲固有频率  $\Omega$  和临界屈曲载荷  $N_{cr}$ , 计算需迭代项数  $n=40$ . FGM 的算例中, 各组分材料性质参照表 1, 给定  $N_y^* = \alpha N_x^*, N_x^* = -N_0^*$ , 其中  $\alpha$  为 FGM 矩形板面内两个方向压载荷比例系数. 首先为验证 DTM 的正确性和精度, 设置梯度指数  $k=0$ , 将该问题退化为普通材料矩形板, 并给定  $m=1, \nu=0.3, D_{11}=1, D_{12}=0.3, D_{33}=0.4, H=0.1$ , 表 2 为  $N_x^*=0, N_y^*=0, Q=0$  时, 在 CSCS、CSSS 边界条件下,

弹性地基上各向同性方板前 3 阶无量纲固有频率  $\Omega$ , 并将其与文献[25]的微分求积法(DQM)和文献[26]五次样条法(quintic spline technique, QST)的计算结果作对比, 结果吻合; 表 3 为均质各向同性矩形板在 CSCS、CSSS 边界条件下的临界屈曲载荷  $N_{cr}$  值, 将其与文献[24]所得计算结果对比, 结果吻合, 这表明本文所使用的 DTM 法, 精度和正确性都满足要求.

为了进一步验证本文有关 FGM 的计算精确, 考虑取不同梯度指数  $k$ , 并将问题退化为无地基、无载荷的情形. 表 4 给出了由  $Al/Al_2O_3$  组成的 FGM 方板在 SSSS 边界条件下的前 2 阶无量纲固有频率值, 并与文献[27]的计算结果对比, 计算结果吻合, 这表明本文对功能梯度材料的计算正确.

以下算例中若无特殊说明, FGM 板均由  $Si_3N_4/SUS304$  组成. 图 2 给出了不同边界条件下  $K=200, Q=20, N_0^*=5, \alpha=2$  时, FGM 方板的梯度指数  $k$  对其无量纲固有频率的影响. 由图 2 可知: 随着梯度指数  $k$  的增大, FGM 方板前 3 阶无量纲固有频率均减小, 且梯度指数在  $0\sim 1$  范围内变化时, 频率显著减小, 此后逐渐趋向于定值, 这一点符合 FGM 材料性质随着梯度指数的增加, 由一种材料过渡到另一种材料的事实.

表 1 材料力学性能

Tab. 1 Mechanical properties of materials

材料	$E/GPa$	$\rho/(kg \cdot m^{-3})$	$\nu$
Al	70	2 700	0.3
$Al_2O_3$	380	3 800	0.3
SUS304	208	8 166	0.3
$Si_3N_4$	322	2 370	0.3

表 2 均质各向同性方板无量纲固有频率的比较

$$(\Omega^2 = a^5 \omega^2 \rho H / D_{11})$$

Tab. 2 Comparison of dimensionless natural frequencies for homogeneous isotropic rectangular plates

$$(\Omega^2 = a^5 \omega^2 \rho H / D_{11})$$

边界条件	$K$	$\Omega$	DTM 解	DQM 解 <sup>[25]</sup>	QST 解 <sup>[26]</sup>
CSCS	0	$\Omega_1$	28.950 8	28.950 9	28.950
		$\Omega_2$	69.327 0	69.327 0	69.380
	0.01	$\Omega_1$	30.954 0	30.954 0	30.953
		$\Omega_2$	70.187 1	70.187 1	70.189
CSSS	0	$\Omega_1$	23.646 3	23.646 3	23.647
		$\Omega_2$	58.646 3	58.646 4	58.688
	0.01	$\Omega_1$	26.060 4	26.060 5	26.061
		$\Omega_2$	59.660 6	59.660 7	59.702

表 3 均质各向同性矩形板临界屈曲载荷的比较

**Tab. 3 Comparison of critical buckling loads for homogeneous isotropic rectangular plates**

边界条件	$\lambda$	方法	(K,Q)			
			(0, 0)	(0, 0.002)	(0.02, 0)	(0.02, 0.002)
CSCS	0.5	DTM	229.871 0	371.382 2	327.139 3	468.650 6
		DQM <sup>[25]</sup>	229.871 0	371.388 2	327.139 0	468.651 0
	1	DTM	84.922 5	137.914 0	109.239 6	162.231 0
		DQM <sup>[25]</sup>	84.922 5	137.914 0	109.240 0	162.231 0
CSSS	0.5	DTM	121.743 3	255.206 4	219.011 68	352.474 8
		DQM <sup>[25]</sup>	121.743 0	255.206 0	219.012 0	352.474 8
	1	DTM	56.653 6	107.635 3	80.970 7	131.952 3
		DQM <sup>[25]</sup>	56.653 6	107.635 0	80.971 0	131.952 0

表 4 不同梯度指数  $k$  下四边简支 FGM 矩形板无量纲固有频率的比较 ( $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho_c/E_c/h}$ )

Tab. 4 Comparison of dimensionless natural frequencies for FGM rectangular plates with different gradient index  $k$  ( $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho_c/E_c/h}$ )

$h/a$	$\Omega$	$k=0.5$	$k=0.5$	$k=1$	$k=1$	$k=2$	$k=2$	$k=5$	$k=5$
0.05	$\Omega_1$	3.317 3†	3.317 3	2.835 2†	2.835 2	2.577 7†	2.577 7	2.442 5†	2.442 4
	$\Omega_2$	5.919 8†	5.919 7	4.522 8†	4.522 8	4.111 5†	4.111 5	3.893 9†	3.893 9
0.1	$\Omega_1$	3.098 3†	3.098 2	2.793 7†	2.793 5	2.538 6†	2.538 6	2.399 8†	2.399 8
	$\Omega_2$	4.899 7†	4.899 7	4.419 2†	4.419 2	4.014 2†	4.014 2	3.788 1†	3.778 0

注: † 表示文献[27]的结果.

图 3 给出了不同边界条件下  $Q=20, N_0^*=5, \alpha=2$ , 梯度指数  $k=1$  时, 无量纲弹性刚度系数  $K$  对 FGM 方板无量纲固有频率的影响. 由图 3 可知: 在长宽比、梯度指数、无量纲剪切刚度系数和载荷一定时, 无量纲弹性刚度系数的增大使得 FGM 矩形板

的整体刚度增大, 进而导致板的固有频率也增大.

图 4 给出了不同边界条件下  $K=200, N_0^*=5, \alpha=2$ , 梯度指数  $k=1$  时, 无量纲剪切刚度系数  $Q$  对 FGM 方板无量纲固有频率的影响. 由图 4 可知: 在长宽比、梯度指数、无量纲弹性刚度系数以及载荷一

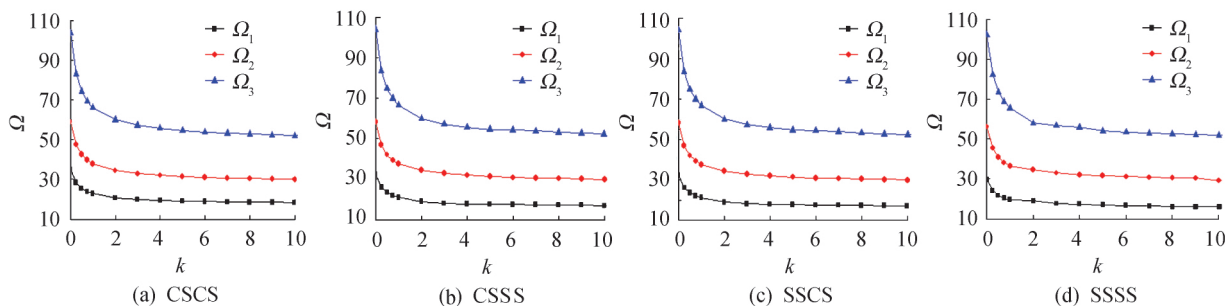


图 2 不同边界条件下梯度指数与 FGM 方板前三阶无量纲固有频率之间的关系曲线

Fig. 2 Relationship between first three dimensionless natural frequencies of FGM square plates and gradient index as boundary condition is different

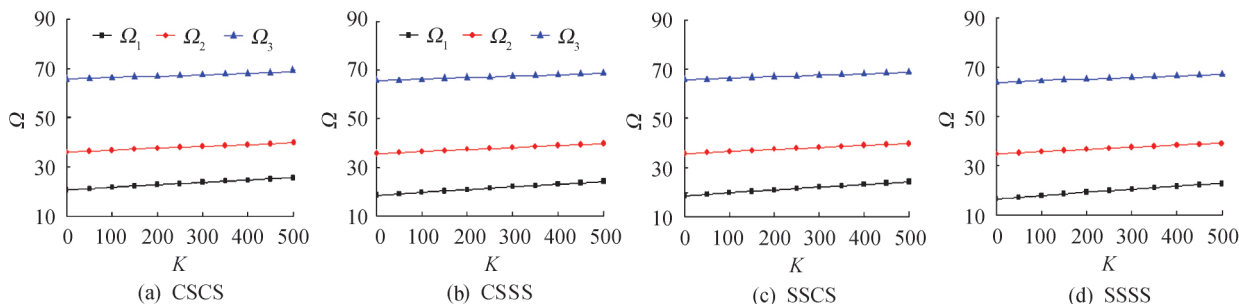


图 3 不同边界条件下无量纲弹性刚度系数与 FGM 方板前三阶无量纲固有频率之间的关系

Fig. 3 Relationship between first three dimensionless natural frequencies of FGM square plates and dimensionless elastic stiffness coefficient as boundary condition is different

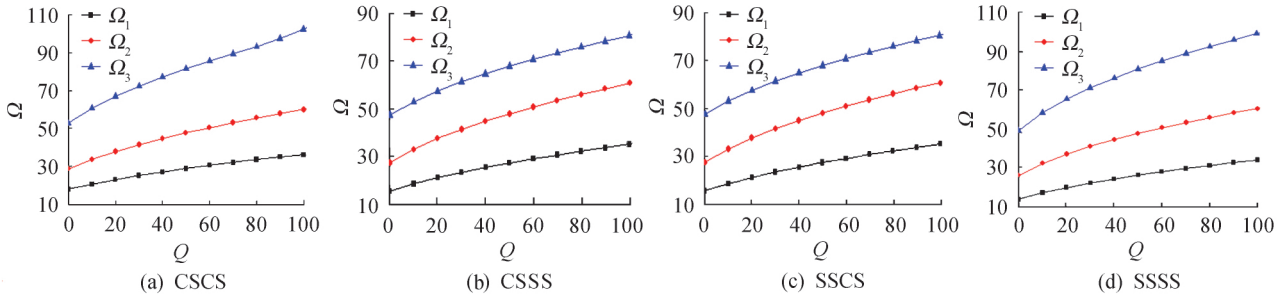


图 4 不同边界条件下无量纲剪切刚度系数与 FGM 方板前 3 阶无量纲固有频率之间关系

Fig. 4 Relationship between first three dimensionless natural frequencies of FGM square plates and shear stiffness of foundation as boundary condition is different

定时, FGM 方板前 3 阶无量纲固有频率随着无量纲剪切刚度系数 Q 的增大而增大. 这一点与无量纲弹性刚度系数一样, 随着 Q 的增大, FGM 矩形板整体刚度增大, 导致板的固有频率也增大.

图 5 给出了不同边界条件下  $\alpha = 2, N_0^* = 5, K = 200, Q = 20$ , 梯度指数  $k = 1$  时, 长宽比  $\lambda$  对 FGM 矩形板无量纲固有频率的影响. 由图 5 可知: 在梯度指数、无量纲弹性刚度系数、无量纲剪切刚度系数以及载荷一定时, FGM 矩形板前 3 阶无量纲固有频率会随着长宽比的变化而变化, 这是因为板尺寸的变化会导致板刚度有所变化, 进而使频率也发生变化. 在本文所研究的四种边界条件下, FGM 板

的无量纲固有频率随着长宽比的增大而增大, 且高阶频率变化更显著.

由图 2~图 5 可知: 在无量纲弹性刚度系数、无量纲剪切刚度系数、外载荷、长宽比一定时, CSCS 边界的固有频率最大、CSSS 或 SSCS 的固有频率次之、SSSS 的固有频率最小. 这表明边界条件约束越强, FGM 矩形板的无量纲固有频率就越大.

图 6 给出了不同边界条件下,  $K = 200, Q = 20, \alpha = 0.5$ , 梯度指数  $k = 1$  时面内压载荷对 FGM 矩形板无量纲固有频率的影响. 由图 6 可知: 在梯度指数、无量纲弹性刚度系数、无量纲剪切刚度系数一定时, FGM 矩形板前 3 阶无量纲固有频率会随着面内

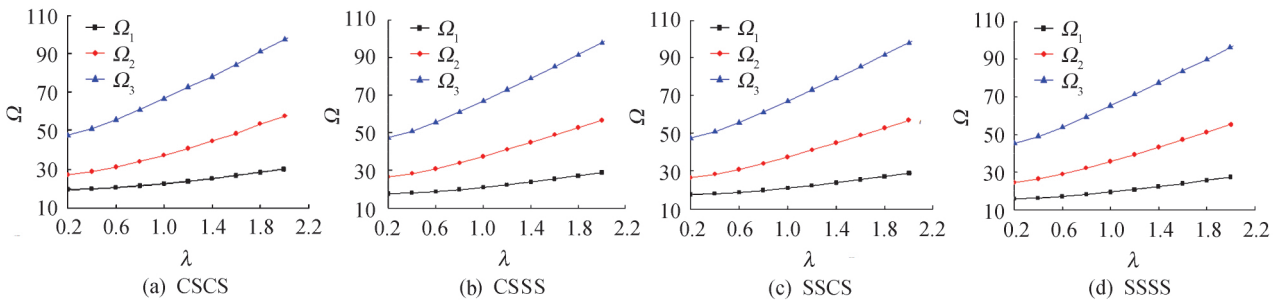


图 5 不同边界条件下长宽比与 FGM 矩形板前 3 阶无量纲固有频率之间的关系曲线

Fig. 5 Relationship between first three dimensionless natural frequencies of FGM rectangular plates and length-width ratio as boundary condition is different

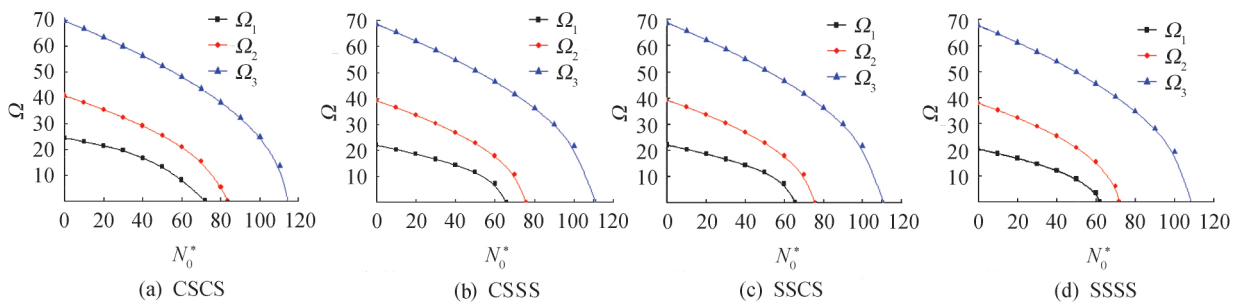


图 6 不同边界条件下屈曲载荷与 FGM 方板前 3 阶无量纲固有频率之间的关系曲线

Fig. 6 Relationship between first three dimensionless natural frequencies of FGM square plates and buckling loads as boundary condition is different

压载荷的增大而减小, 且能减小至 0. 由弹性稳定性

理论可知, 当结构失稳时, 其振动周期会无限大, 此



时结构的固有频率为零. 故当频率  $\Omega=0$  时, 最小的  $N_0^*$  即为 FGM 矩形板的临界屈曲载荷  $N_{cr}$ , 同时约束刚性比强边界条件下临界屈曲载荷大.

图 7 为 CSCS 和 CSSS 两种边界条件下  $K=200$  和  $Q=20$  时, 长宽比  $\lambda$  对临界屈曲载荷的影响曲线. 由图 7 可知: 在梯度指数、无量纲弹性刚度系数、无量纲剪切刚度系数、边界条件一定时, 临界屈曲载荷随着长宽比的增大而减小; 当长宽比小于 2 时, 屈曲载荷  $N_{cr}$  随着长宽比的变化更显著; 长宽比大于 2 时, 屈曲载荷  $N_{cr}$  随着长宽比的变化更趋于平缓; 长宽比、无量纲弹性刚度系数、无量纲剪切刚度系数、边界条件一定时, 临界屈曲载荷随着梯度指数的增大而减小.

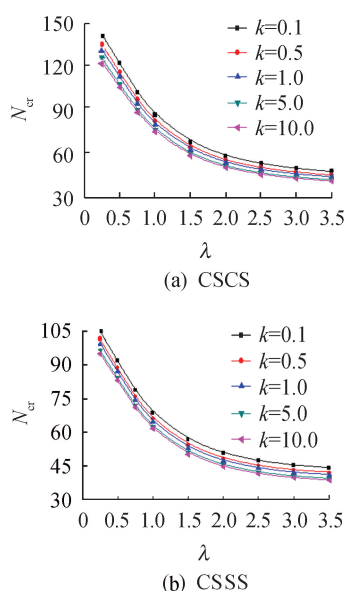


图 7 不同梯度指数下长宽比与临界屈曲载荷之间的关系曲线

Fig. 7 Relationship between critical buckling loads and length-width ratio at different gradient indexes

## 5 结论

本文在经典薄板理论和广义 Hamilton 原理的基础上, 推导了四边受压 FGM 矩形板在 Winkler-Pasternak 弹性地基上的自由振动与屈曲控制微分方程并进行无量纲化. 使用 DTM 对无量纲控制微分方程及其边界条件进行变换, 利用 MATLAB 软件对计算过程进行编程, 计算出不同边界条件下四边受压 FGM 矩形板在 Winkler-Pasternak 弹性地基上自由振动的无量纲固有频率和临界屈曲载荷并对其特性进行分析. 考虑 FGM 矩形板的边界条件为对边简支和其余两边为简支或固支的任意组合, 因此本文能解决 FGM 矩形板相对较多的边界条

件, 并得到以下结论:

1) FGM 矩形板的无量纲固有频率随着梯度指数的增大而减小, 且  $k$  处于 0 到 1 之间, 频率减小更显著, 后逐渐趋于稳定.

2) FGM 矩形板的无量纲固有频率随着无量纲弹性刚度系数、无量纲剪切刚度系数和长宽比的增大而增大, 且高阶频率增大更明显; 边界条件约束越强, FGM 矩形板的无量纲固有频率越大.

3) FGM 矩形板的无量纲固有频率随着面内压载荷的增大而减小, 且能减小至 0, 此时对应的压载荷即为 FGM 矩形板的临界屈曲载荷.

4) FGM 矩形板的临界屈曲载荷随着长宽比和梯度指数的增加而减小, 且当长宽比小于 2 时, 屈曲载荷随着长宽比的变化更显著.

5) 本文采用的 DTM 法, 编写程序简单, 计算精度高, 特别是对特征值问题具有明显的优势, 研究可为 FGM 矩形板的设计及分析提供有效的依据.

### 参考文献:

- [1] 黄义, 何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] 袁鸿, 李善倾, 刘人怀. Pasternak 地基上简支板振动问题的准格林函数方法 [J]. 应用数学和力学, 2007, 28(7): 757-762.
- [3] 盛宏玉, 高荣誉. 一种改进的 Pasternak 地基模型及层合地基板的解析解 [J]. 土木工程学报, 2006, 39(1): 87-91.
- [4] 刘小文, 沈细中, 刘祖德. 复合地基上板的变形分析 [J]. 人民长江, 2004, 35(2): 39-40.
- [5] 马涛, 赵忠民, 刘良祥, 等. 功能梯度材料的研究进展及应用前景 [J]. 化工科技, 2012, 20(1): 71-75.
- [6] REDDY J N, CHIN C D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates [J]. Journal of Thermal Stresses, 1998, 21: 593-626.
- [7] 蒲育, 赵海英, 滕兆春. 四边弹性约束 FGM 矩形板面内自由振动的 DQM 求解 [J]. 振动与冲击, 2016, 35(17): 58-65.
- [8] LATIFI M, FARHATNIA F, KADKHODAEI M. Buckling analysis of rectangular functionally graded plates under various edge conditions using Fourier series expansion [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2013, 41: 16-27.
- [9] NA K S, KIM J H. Three-dimensional thermomechanical buckling analysis for functionally graded composite plates [J]. Composite Structures, 2006, 73(4): 413-422.
- [10] GUPTA A, TALHA M, SEEMANN W. Free vibration and flexural response of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using nonpolynomial higher-order shear and normal deformation theory [J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2018, 25(6): 523-532.
- [11] 周凤玺, 李世荣. 功能梯度材料矩形板的三维瞬态热弹性分析 [J]. 工程力学, 2009, 26(8): 59-64.
- [12] LIANG X, WANG Z, WANG L, et al. Semi-analytical solution for three-dimensional transient response of functionally



- graded annular plate on a two parameter viscoelastic foundation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(12): 2649-2663.
- [13] 滕兆春, 丁树声, 郑鹏君. 弹性地基上变厚度矩形板自由振动的 GDQ 法求解 [J]. *应用力学学报*, 2014, 31(2): 236-241.
- [14] 刘丽威. 弹性地基上功能梯度梁、板的动力学特性分析 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2012.
- [15] 王小岗, 赵以弘. Winkler 地基上变厚度自由矩形板固有频率的 Galerkin 解法 [J]. *青海大学学报(自然科学版)*, 2001, 19(2): 4-6.
- [16] 滕兆春, 衡亚洲, 崔盼, 等. 变刚度 Winkler 地基上受压非均匀矩形板的自由振动与屈曲特性 [J]. *振动与冲击*, 2019, 38(3): 258-266.
- [17] 赵家奎. 微分变换及其在电路中的应用 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1988.
- [18] 滕兆春, 刘露, 衡亚洲. 非均匀 Winkler-Pasternak 弹性地基上正交各向异性矩形板自由振动的 DTM 分析 [J]. *兰州理工大学学报*, 2018, 44(3): 166-172.
- [19] SEMNANI S, ATTARNEJAD R, FIROUZJAEI R. Free vibration analysis of variable thickness thin plates by two-dimensional differential transform method [J]. *Acta Mechanica*, 2013, 224(8): 1643-1658.
- [20] OZGUMUS O O, KAYA M O. Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM [J]. *Meccanica*, 2010, 45(1): 33-42.
- [21] MUKHTAR F M. Free vibration analysis of orthotropic plates by differential transform and Taylor collocation methods based on a refined plate theory [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2017, 87(1): 15-40.
- [22] 滕兆春, 昌博, 付小华. 弹性地基上转动功能梯度材料 Timoshenko 梁自由振动的微分变换法求解 [J]. *中国机械工程*, 2018, 29(10): 1147-1152.
- [23] ELISHAKOFF I, PENTARAS D, GENTILINI C. *Mechanics of functionally graded material structures* [M]. Singapore: World Scientific, 2015.
- [24] RAO S S. *Vibration of continuous systems* [M]. Second Edition, Hoboken: John Wiley & Sons, 2019.
- [25] LAL R, SAINI R. Buckling and vibration analysis of non-homogeneous rectangular Kirchhoff plates resting on two-parameter foundation [J]. *Meccanica*, 2015, 50(4): 893-913.
- [26] LAL R, DHANPATI. Transverse vibrations of non-homogeneous orthotropic rectangular plates of variable thickness: A spline technique [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306(1/2): 203-214.
- [27] HOSSEINI-HASHEMI S, FADAEI M, ATASHIPOUR S R. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, 53(1): 11-22.