DOI:10.13901/j.cnki.qhwxxbzk.2011.01.014

基于 Lagrange 运动方程的悬臂梁的固有频率分析

黄永玉[1,2],赵永刚[1],赵伟东[3]

(1. 兰州理工大学理学院,甘肃 兰州 730050; 2. 青海大学机械工程学院,青海 西宁 810016;
3. 青海大学土木工程学院,青海 西宁 810016)

摘要:将悬臂梁的自由振动挠度函数假设为各阶振型函数与关于时间的广义坐标乘积的线性组合,推导得到了系统动能与弯曲变形能的级数形式的表达式。运用 Lagrange 运动方程得到了悬臂梁的前4阶固有频率方程及其解。并将计算结果与解析解进行了对比,分析了高阶固有频率误差值逐步增加的原因,提出了改进方法。研究表明,只要能够选取合适的振型函数,该方法对于不同边界条件的梁(柱)结构具有广泛的适应性,有着明显的理论意义和工程意义。

关键词:悬臂梁;固有频率;假设振型法;Lagrange 运动方程

中图分类号:O34 **文献标志码**:A **文章编号**:1006-8996(2011)01-0012-04

Analysis on cantilever beam's natural frenquency based on Lagrange motion equation

HUANG Yongyu[1,2], ZHAO Yonggang[1], ZHAO Weidong[3]

(1. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. School of Mechanical Engineering, Qinghai University, Xining 810016, China; 3. School of Civil Engineering, Qinghai University, Xining 810016, China)

Abstract: Under the assumming of the free vibration defection function of a cantilever beam being the linear combination of multiple vibration mode functions with universal coordinate product about the time, the series expression of the beam's kinetic energy and bending deformation energy is deduced and obtained. Using Lagrange motion equation, the frout four-order natural frequency equation of the beam is established and its solution is obeained. Furthermore, a comparison is made between above mentioned results and its analytic solution and then, the reasons coused the natural frequency error increasing is analyzed and improred inethod is put forword too. This method has a wide application to the beam structures with various boundary conditions if an appropriate vibration mode function is adoped and this research work has a great significance in theory as well as in engineering.

Key words: cantilever beam; natural frequency; hypothetical modal method; Lagrange motion equation.

梁在机械和土木等工程领域有着广泛的应用,其振动是机械振动中最常见的振动形式之一,研究其振动特性具有很大的理论价值和实际工程应用背景。由于对连续系统(无限自由度)振动特性的研究有着很大的理论难度,除了基于分离变量法可得到一些简单模型的解析解外,在大多数情况下,则很难得到解析解。因此,在能够满足工程需要的前提下,寻求近似解成为研究工作的重点,国内外很多学者对此进行了深入的研究,并提出一些切实可行的方法。如林振庭等[1]基于 Hermite 再生核无网格近似,

收稿日期:2010-12-09

作者简介:黄永玉(1976—),男,青海大通人,副教授,兰州理工大学在读硕士研究生。研究方向:机械震动。

建立了 Euler 梁自由振动分析的伽辽金无网格离散方程，针对常见的几种典型边界条件的 Euler 梁自由振动问题，详细分析了前两阶频率的误差和收敛性，为 Euler 梁振动分析提供了一种高精度的数值方法。潘旦光等[2]利用等截面 Euler 梁的特征值和模态，将变截面 Timoshenko 梁特征方程的偏微分方程组转化为代数方程组进行求解，从而得到变截面 Timoshenko 梁的特征值和模态。吴辉琴等[3]为解决变截面连续梁的变系数控制微分方程无法得到解析解这一困难，提出了运用有限差分方法解此问题的方法，通过推导连续梁动力特性的振型方程，建立其差分格式，得到了自振频率，相应地求出了振型。对于连续系统，根据离散化思想，可以得到有重要工程应用价值的而且较为精确的结构的前几阶固有频率，如集中质量法[4]。离散化思想的另一个途径是假设振型法[5]218，该法的实质是假设振动位移是由各阶振型函数按照各自的振幅振动并线性叠加的结果，并假设振幅是时间的谐波函数与待定参数的乘积形式。文献[6]分别采用假设振型法和集中质量法对简支梁的固有频率进行了分析，并与解析解作了对比。本文直接假设振动位移是各阶振型函数与关于时间的广义坐标乘积的线性叠加，推导得到了级数形式的系统动能与势能的通式，应用 Lagrange 运动方程得到了悬臂梁的前 k 阶固有频率方程并计算了前 4 阶固有频率。并将计算结果与基于分离变量法所得到解析解进行了对比，分析了高阶固有频率误差值逐步增加的原因，并提出了改进方法。研究表明，只要能够选取合适的振型函数，该方法对于不同边界条件的梁(柱)结构具有广泛的适应性，有着明显的理论意义和工程意义。

1　悬臂梁的动能和弯曲变形能

假设等截面悬臂梁长度为 l，抗弯刚度为 EI，单位长度质量为 $\bar{m}$，则梁在系统中的动能 T 和梁弯曲变形能 V 可以表示为[5]213

$$T = \frac{1}{2}\bar{m}\int_0^l \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right]^2 \mathrm{d}x \tag{1}$$

$$V = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left[\frac{\partial y^2(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 \mathrm{d}x \tag{2}$$

式中 $y(x,t)$ 为梁的挠度函数，这里选取梁的挠度函数为

$$y(x,t) = \sum_{r=1}^{k} q_r(t)\left[1 - \cos\frac{(2r-1)\pi}{2l}x\right] \tag{3}$$

式中 $1 - \cos\dfrac{(2r-1)\pi}{2l}x$ 为悬臂梁的第 r 阶振型函数，$q_r(t)$ 为相应的广义坐标。

将(3)式对时间 t 的偏导数代入(1)式，并注意到

$$\int_0^l \cos\frac{(2r-1)\pi}{2l}x\cos\frac{(2s-1)\pi}{2l}x\mathrm{d}x = 0 \quad (r,s = 1,2,\cdots k, r \neq s)$$

积分后梁的动能为

$$T = \frac{\bar{m}l}{2}\left\{\sum_{r=1}^{k}\dot{q}_r^2\left[\frac{3}{2} + (-1)^r\frac{4}{(2r-1)\pi}\right] + \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\dot{q}_r\dot{q}_s\left[1 + (-1)^r\frac{2}{(2r-1)\pi} + (-1)^s\frac{2}{(2s-1)\pi}\right]\right\}$$
$$(r \neq s) \tag{4}$$

把(3)式对 x 的二阶偏导数代入(2)式，

积分后梁弯曲变形能为

$$V = \frac{\pi^4 EI}{64l^3}\sum_{r=1}^{k} r^4 q_r^2(t) \tag{5}$$

2　用 *Lagrange* 运动方程求解梁的固有频率

保守系统的 Lagrange 方程[7]289:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \quad (r=1,2,\cdots k) \tag{6}$$

式中 q_r 为广义坐标，$L=T-V$ 为 Lagrange 函数。

由(4) -(6) 式，得到悬臂梁自由振动的微分方程组

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{K}q(t)=0,(r=1,2,\cdots k) \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵，$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵。

若仅取(3) 式的前四项，则微分方程组(7) 化为

$$\bar{m}l\begin{bmatrix}0.2268 & 0.5756 & 0.2361 & 0.4543\\ 0.5756 & 1.9244 & 1.0849 & 1.3032\\ 0.2361 & 1.0849 & 1.2454 & 0.9636\\ 0.4543 & 1.3032 & 0.9636 & 1.3181\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \ddot{q}_3\\ \ddot{q}_4\end{bmatrix}+\frac{\pi^4 EI}{32l^3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0 & \\ 0 & 0 & 625 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2401\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{8}$$

方程组(8) 的频率方程为

$$\Delta(\omega^2)=\begin{vmatrix}\frac{\pi^4 EI}{32\bar{m}l^4\omega^2}-0.2268 & -0.5756 & -0.2361 & -0.4543\\ -0.5756 & \frac{81\pi^4 EI}{32\bar{m}l^4\omega^2}-1.9244 & -1.0849 & -1.3032\\ -0.2361 & -1.0849 & \frac{625\pi^4 EI}{32\bar{m}l^4\omega^2}-1.2454 & -0.9636\\ -0.4543 & -1.3032 & -0.9636 & \frac{2401\pi^4 EI}{32\bar{m}l^4\omega^2}-1.3181\end{vmatrix}=0$$

令

$$\xi=\frac{\pi^4 EI}{32\bar{m}l^4\omega^2} \tag{9}$$

代入上式，有

$$121\,550\,625\xi^4-30\,764\,419.949\,9\xi^3+210\,060.698\,5\xi^2-151.001\,4\xi+0.006\,866=0$$

解此四次方程得

$$\xi_1=0.2461,\xi_2=0.6193\times10^{-2},\xi_3=0.7602\times10^{-3},\xi_4=0.4875\times10^{-4} \tag{10}$$

将式(10) 代回式(9)，即可求出该悬臂梁自由振动的前四阶固有频率为

$$\omega_1=3.52\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}},\omega_2=22.17\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}},\omega_3=63.28\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}},\omega_4=249.88\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

其解析解为[1][5]192

$$\omega_1=3.52\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}},\omega_2=22.03\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}},\omega_3=61.70\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}},\omega_4=120.91\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

引入无量纲量 β_r，使得

$$\omega_r=\beta_r\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}} \quad (r=1,2,\cdots k)。$$

表1列出了1 ~4阶固有频率随挠度函数 $y(x,t)$ 所取的项数的增加而得到的近似解及其相对于解析解的误差 δ_r 的变化情况。

表 1　固有频率及其误差变化情况

Tab. 1　Situation of the natural frequency and its error variation

r	β_1	δ_1/%	β_2	δ_2/%	β_3	δ_3/%	β_4	δ_4/%
1	3.66	4	—	—	—	—	—	—
2	3.52	0	23.99	8.89	—	—	—	—
3	3.52	0	22.22	0.85	67.27	9.03	—	—
4	3.52	0	22.17	0.64	63.28	2.56	249.88	106
5	3.52	0	22.08	0.23	63.22	2.46	151.46	25.27

可见,如果只需求基频,则挠度函数仅取 2 项就可得到其精确值。当阶数 r 取到 4 时,前 3 阶固有频率已经和精确解相当接近。随着阶数的增加,误差会迅速增加。通过增加挠度函数的项数,使解的精度得到改进,阶数越低,改进的程度越快。

当然,如果系统为非保守系统,则可以使用方程的一般形式[7]288

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r\quad(r=1,2,\cdots k)$$

求解系统的固有频率,式中 Q_r 为广义力。

3　结论

(1) 对于质量均匀分布的等截面悬臂梁,运用假设振型法结合 Lagrange 运动方程,可以得到系统的固有频率方程和各阶固有频率。

(2) 随着挠度函数所取项数 r 的增加,较低阶的固有频率迅速接近相应的解析解; 阶数越低,接近的程度越快; 挠度函数仅取 2 项,就可以得到与解析解完全一致的基频; 挠度函数仅取 4 项,就可以得到足够精确的前 3 阶频率,这在工程上具有较高的应用价值。

(3) 对于变截面梁,选定合适的挠度函数后仍可使用 Lagrange 运动方程求解其固有频率,此时质量 m 和惯性矩 I 应为 x 的函数,用(1)、(2) 式时分别把质量 m 和惯性矩 I 置于积分符号内部,后续计算和等截面梁完全相同。

参考文献:

[1] 林振庭,王东东,轩军厂. Euler 梁自由振动的 Hermite 再生核无网格分析[J]. 厦门大学学报: 自然科学版,2010,49(2):223 - 226.

[2] 潘旦光,吴顺川,张维. 变截面 Timoshenko 悬臂梁自由振动分析[J]. 土木建筑与环境工程,2009(3):25 - 28.

[3] 吴辉琴,王赞芝,涂辉,等. 变截面连续梁动力特性的差分解法[J]. 广西大学学报: 自然科学版,2010(1):101 - 104.

[4] 王光远. 建筑结构的振动[M]. 北京: 科学出版社,1978:39 - 44.

[5] 张义民. 机械振动[M]. 北京: 清华大学出版社,2007:187 - 221.

[6] 黄永玉,赵永刚,赵伟东. 简支梁的固有频率分析[J]. 青海大学学报: 自然科学版,2010,28(6):20 - 23.

[7] 南京工学院,西安交通大学. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社,1986:188 - 190.

(**责任编辑**　唐宏伟)