

文章编号:1004-2474(2020)01-0057-06

基于压电陶瓷的等变厚度悬臂梁特性研究

杨瑞^{1,2},孙霞阳¹,杨胜兵¹,马超善¹,陈月娟¹,岳一轩¹

(1. 兰州理工大学 能源与动力工程学院,甘肃 兰州 730050;2. 风能太阳能利用技术教育部重点实验室,内蒙古 呼和浩特 010051)

摘要:以等、变厚度悬臂梁为研究对象,以单向向玻璃纤维为基体材料结合压电陶瓷片设计出智能悬臂梁模型。利用数值模拟与实验相结合的方法分析了压电陶瓷片对悬臂梁模态频率、自由端最大位移及应变分布的影响。结果表明,未加电压情况下,增加压电陶瓷铺设数目能有效增大悬臂梁固有频率,减小自由端最大位移,但对应变分布无显著影响;施加电压时,可进一步减小悬臂梁自由端最大位移,亦可减小各监测点应变值。

关键词:悬臂梁;压电材料;模态分析;静力分析;实验

中图分类号:TN384;TM22;TK83 文献标识码:A DOI:10.11977/j.issn.1004-2474.2020.01.014

Research on Characteristics of Uniform and Variable Thickness Cantilever Beam Based on Piezoelectric Ceramics

YANG Rui^{1,2}, SUN Xiayang¹, YANG Shengbing¹, MA Chaoshan¹, CHEN Yuejuan¹, YUE Yixuan¹

(1. College of Energy and Power Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. Key Laboratory of Wind Energy and Solar Energy Utilization Technology of Ministry of Education, Huhehaote, 010051, China)

Abstract: An intelligent cantilever beam model with uniform and variable thickness is designed with uniaxial glass fiber as matrix material and piezoelectric ceramic plate as the research object. The effects of piezoelectric ceramic plates on the modal frequency, the maximum displacement of the unconstrained end and strain distribution of cantilever beam are analyzed by using a method combining numerical simulation with experiment. The results show that increasing the number of PZT laying can effectively increase the natural frequency of the cantilever beam and reduce the maximum displacement of the free end, but it has no significant effect on the strain distribution. When the voltage is applied, the maximum displacement at the free end of the cantilever beam can be further reduced and the strain value at each monitoring point can also be reduced.

Key words: cantilever beam; piezoelectric materials; modal analysis; static analysis; the experiment

0 引言

对于振动控制有主动控制、半主动控制和被动控制,科学技术的快速发展使主动控制成为机械行业的中流砥柱。压电材料因其良好的频响特性、高分辨率特性、较强的抗干扰能力及力的输出能力而成为振动主动控制研究的新趋势。Korayem M H 等^[1]在微梁压电层上施加谐波电压,研究了阻尼比对振动响应的影响。Silvanavarró G 等^[2]介绍了悬臂梁自激减振器,以压电陶瓷片为作动器控制梁振动。Guoliang M 等^[3]将振动方程与模糊算法相结合进行仿真,证明了锆钛酸铅压电陶瓷(PZT)执行机构具有较好的减振效果。方远等^[4]提出了迟滞补偿控制算法,验证了经过比例、积分、微分(PID)逆

迟滞补偿后的主动控制效果比传统比例、积分、微分(PID)提高了10.083%。陈希等^[5]搭建了基于Labview的测试系统,利用压电片实现了振动主动控制。胡晓琳等^[6]基于极点配置理论,运用SIMULINK验证了压电双晶片的驱动传感特性能有效控制自由振动。

目前的研究多集中于等厚度梁,而现实中大多梁结构因不同需要并非为单一等厚度。本文以等、变厚度压电悬臂梁为研究对象,其上粘贴压电陶瓷片作为制动器,采用数值模拟与实验相结合的方法,研究压电陶瓷对等、变厚度梁模态、自由端最大位移及应变的影响。

1 压电悬臂梁动力学建模

等厚度悬臂梁的振动基本方程^[7]为

收稿日期:2019-08-29

基金项目:教育部重点实验室开放基金资助项目(2018ZD01);国家国际科技合作专项基金资助项目(2014DFR60990)

作者简介:杨瑞(1970-),男,河南商丘人,教授,工学博士,主要从事风力机空气动力学的研究。E-mail:1960925194@qq.com。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

弯矩为

$$M = -D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2)$$

剪力为

$$Q = -D \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (3)$$

式中: E 为杨氏模量; I 为悬臂梁截面二次矩; $D = EI$ 为抗弯刚度; ρ 为材料密度; A 为截面积; t 为时间; g 为重力加速度; y 为悬臂梁挠度。令

$$y(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

$$M = \dot{M}(x)T(t) \quad (5)$$

$$Q(x, t) = \dot{Q}(x)T(t) \quad (6)$$

$$X = \frac{X_1}{l} \quad (7)$$

$$x = \frac{x_1}{l} \quad (8)$$

$$M(x) = \dot{M}(lx) \quad (9)$$

$$Q(x) = \dot{Q}(lx) \quad (10)$$

$$k^4 = \frac{p^2 \rho A l^4}{gD} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{l_0}{l} \quad (12)$$

式中: $T(t)$ 为时间的周期函数; l 为悬臂梁总长; l_0 为各截面与悬臂梁固定端的距离; p 为周期函数圆频率。

将式(4)~(12)代入式(1)~(3)得到无量纲式的振动基本方程为

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - k^4 X = 0 \quad (13)$$

$$\frac{M(x)l}{D} = -\frac{d^2 X}{dx^2} \quad (14)$$

$$\frac{Q(x)l^2}{D} = -\frac{d^3 X}{dx^3} \quad (15)$$

任一变厚度悬臂梁示意图如图 1 所示。

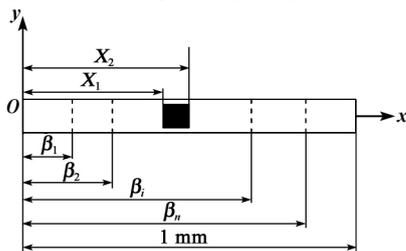


图 1 悬臂梁示意图

对变厚度悬臂梁进行离散有:

$$D_0 = D(0) \quad (0 \leq x < \beta_1) \quad (16)$$

$$\rho_0 = \rho(0) \quad (0 \leq x < \beta_1) \quad (17)$$

$$A_0 = A(0) \quad (0 \leq x < \beta_1) \quad (18)$$

$$k_0 = k(0) \quad (0 \leq x < \beta_1) \quad (19)$$

$$D_1 = D(\beta_1) \quad (\beta_1 \leq x < \beta_2) \quad (20)$$

$$\rho_1 = \rho(\beta_1) \quad (\beta_1 \leq x < \beta_2) \quad (21)$$

$$A_1 = A(\beta_1) \quad (\beta_1 \leq x < \beta_2) \quad (22)$$

$$k_1 = k(\beta_1) \quad (\beta_1 \leq x < \beta_2) \quad (23)$$

⋮

$$D_i = D(\beta_i) \quad (\beta_i \leq x < \beta_{i+1}) \quad (24)$$

$$\rho_i = \rho(\beta_i) \quad (\beta_i \leq x < \beta_{i+1}) \quad (25)$$

$$A_i = A(\beta_i) \quad (\beta_i \leq x < \beta_{i+1}) \quad (26)$$

$$k_i = k(\beta_i) \quad (\beta_i \leq x < \beta_{i+1}) \quad (27)$$

⋮

$$D_n = D(\beta_n) \quad (\beta_n \leq x < 1) \quad (28)$$

$$\rho_n = \rho(\beta_n) \quad (\beta_n \leq x < 1) \quad (29)$$

$$A_n = A(\beta_n) \quad (\beta_n \leq x < 1) \quad (30)$$

$$k_n = k(\beta_n) \quad (\beta_n \leq x < 1) \quad (31)$$

因此,变厚度梁任一元素基本方程为

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - k_i^4 X = 0 \quad (32)$$

其中

$$k_i = k_0 + \sum_{j=1}^i (x - \beta_j)^* (k_j - k_{j-1}) \quad (33)$$

$$D_i = D_0 + \sum_{j=1}^i (x - \beta_j)^* (D_j - D_{j-1}) \quad (34)$$

$$(x - \beta_i)^* = \begin{cases} 1 & (x \geq \beta_i) \\ 0 & (x < \beta_i) \end{cases} \quad (35)$$

在 $x = \beta_i$ 处保证几何连续有:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X(\beta_i - \epsilon) = X(\beta_i), \lim_{\epsilon \rightarrow 0} X'(\beta_i - \epsilon) = X'(\beta_i) \quad (36)$$

在 $x = \beta_i$ 处保证物理连续有:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M(\beta_i - \epsilon)l}{D_0} = \frac{M(\beta_i)l}{D_0} \quad (37)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Q(\beta_i - \epsilon)l^2}{D_0} = \frac{Q(\beta_i)l^2}{D_0} \quad (38)$$

边界条件为:

- 1) 端点固定: $X = X' = 0$ ($x = 0$ 或 1)。
- 2) 端点简支: $X = M = 0$ ($x = 0$ 或 1)。
- 3) 端点悬空: $M = Q = 0$ ($x = 0$ 或 1)。

于是,任意变厚度悬臂梁问题转换为边界问题,其包括了式(1)、(11)、(12)及边界条件 2)。

当悬臂梁受外载荷时,动力学模型为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} \quad (39)$$

设压电陶瓷片长为 L , 宽为 b , 厚为 h_1 , 弹性模量为 E_p , 悬臂梁厚度为 h_x , 对压电陶瓷片施加电压 U , 其产生的弯矩^[8]为

$$M = KU[\omega(x-x_2) - \omega(x-x_1)] \quad (40)$$

其中

$$K = \frac{1}{2} E_p d_{31} b (h_x + h_1) \quad (41)$$

式中 $\omega(x-x_2), \omega(x-x_1)$ 为 Dirac 函数。

压电陶瓷片作动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = KU \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\omega(x-x_2) - \omega(x-x_1)] \quad (42)$$

2 智能悬臂梁数值模拟

2.1 模型材料及铺层设计

因锆钛酸铅陶瓷 $PbZr_xTi_{1-x}O_3$ ($x=0.48$, 即锆钛质量比为 52/48 (PZT-5H)) 位于准同型相界 (MPB) 附近, 具有最大介电、压电性能及最小机械品质因数, 对利用压电材料逆压电效应的研究极其有利。因此, 本文选取压电材料为 PZT-5H, 其性能参数为: 横向机电耦合系数 $K_{31}=0.38$, 纵向机电耦合系数 $K_{33}=0.76$, 厚度伸缩机电耦合系数 $K_t=0.52$, 介电常数 $\epsilon=3200$, 非极化方向压电常数 $d_{31}=275$, 极化方向压电常数 $d_{33}=620$, 泊松比 $\mu=0.36$, 介电损耗 $\tan \delta=2\%$, $\rho=7.5 \text{ kg/m}^3$ 。悬臂梁基体材料选用单轴向玻璃纤维, 其性能参数为: x 向弹性模量 $E_x=33.19 \text{ GPa}$, y 向弹性模量 $E_y=11.12 \text{ GPa}$, z 向弹性模量 $E_z=10.12 \text{ GPa}$, xy 面剪切模量 $G_{xy}=3.69 \text{ GPa}$, yz 面剪切模量 $G_{yz}=3 \text{ GPa}$, xz 面剪切模量 $G_{xz}=3 \text{ GPa}$, xy 面泊松比 $\mu_{xy}=0.23$, yz 面泊松比 $\mu_{yz}=0.11$, xz 面泊松比 $\mu_{xz}=0.11$, $\rho=1930 \text{ kg/m}^3$ 。所有样板均采用 $[0_3/\pm 45/90/\pm 45/0_3]_s$ (其中下角 3 为玻璃纤维层数, s 为对称铺层) 铺层, 等厚度悬臂梁厚为 8 mm, 变厚度悬臂梁采用线性递减铺层, 固定端为 8 mm, 自由端为 4 mm, 压电陶瓷片尺寸为 $15 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ 。

2.2 悬臂梁有限元模型

为探究压电陶瓷片对悬臂梁模态频率及应变分布的具体影响, 首先采用 ANSYS 软件建立正确的

有限元模型。本文共模拟 22 个悬臂梁样板, 分别是原型等、变厚度悬臂梁, 其他 20 个样板是在原样板基础上依次增加压电陶瓷片个数 (1~10 片)。拟定悬臂梁载荷施加点分别距固定端 10%、30%、50%、80%、100% 处, 所施加载荷分别为 2.5 N、5 N、7.5 N、10 N、12.5 N, 应变片粘贴于载荷施加点附近, 悬臂梁有限元模型如图 2 所示。



图 2 悬臂梁有限元模型示意图

2.3 两种方案悬臂梁模态分析

模态作为判断结构在外界激励下是否发生共振的凭据, 是所有模型结构分析的基础也是关键。实际工程中以前两阶模态频率最重要, 因此, 本文首先利用 ANSYS 软件对 22 个样板模型进行模态分析, 提取的前两阶模态 (1st, 2st) 频率如表 1 所示。为分析变厚度对悬臂梁应变产生的影响, 提取第一阶模态所对应的应变, 等厚度悬臂梁应变值从固定端至自由端呈递减分布, 变厚度悬臂梁应变值从固定端至自由端呈先增后减趋势, 在距固定端约 30% 处达到最大。

表 1 等、变厚度悬臂梁各方案模态频率对比

| 模态阶数 | 等厚度模态频率/Hz | | 变厚度模态频率/Hz | |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | 1 st | 2 st | 1 st | 2 st |
| 0 | 4.199 4 | 26.299 0 | 3.741 7 | 20.602 0 |
| 1 | 4.210 1 | 26.344 0 | 3.760 2 | 20.853 0 |
| 2 | 4.218 3 | 26.347 0 | 3.766 1 | 20.869 0 |
| 3 | 4.223 7 | 26.326 0 | 3.787 8 | 20.884 0 |
| 4 | 4.226 7 | 26.295 0 | 3.810 6 | 20.981 0 |
| 5 | 4.227 1 | 26.266 0 | 3.823 7 | 21.021 0 |
| 6 | 4.224 9 | 26.251 0 | 3.826 8 | 20.979 0 |
| 7 | 4.219 7 | 26.254 0 | 3.837 1 | 20.932 0 |
| 8 | 4.211 0 | 26.266 0 | 3.843 1 | 20.935 0 |
| 9 | 4.218 3 | 26.258 0 | 3.845 3 | 20.956 0 |
| 10 | 4.218 1 | 26.185 0 | 3.844 0 | 20.986 0 |

悬臂梁的模态频率与其厚度成正比、长度的平方成反比, 与宽度无关。由表 1 可看出, 等厚度悬臂梁整体模态频率大于变厚度悬臂梁, 这是因后者厚度线性递减所致。但无论是等厚度悬臂梁还是变厚度悬臂梁, 铺设压电陶瓷片 PZT-5H 后的频率与原模型相比模态频率均略有增大。由此可见, 铺设

PZT-5H能在一定程度上提升模型刚度,增大悬臂梁固有频率,进而保障结构的安全性。

由图3可知,等厚度悬臂梁最大应变集中于固定端,而变厚度悬臂梁最大应变位于距固定端30%附近,亦可看出变厚度悬臂梁整体应变值大于等厚度悬臂梁。

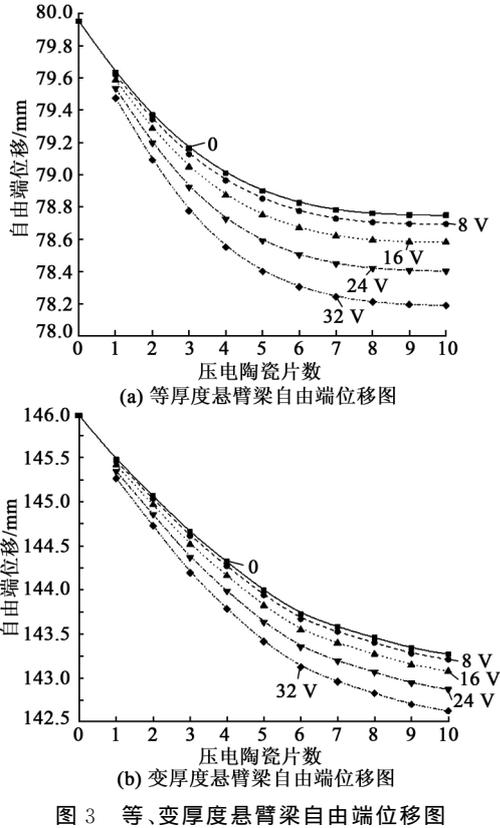


图3 等、变厚度悬臂梁自由端位移图

2.4 两种方案悬臂梁静力分析

本文对22个等、变厚度悬臂梁样板的5个载荷施加点处分别施加2.5 N、5 N、7.5 N、10 N、12.5 N的力,在多种工况下进行静力分析,以自由端处位移值作为表征量。为方便分析,以载荷施加点5处施加10 N的力为例讨论等、变厚度悬臂梁位移及应变变化情况。考虑到实验所用可变直流电源电压范围及压电陶瓷片最大承载能力限制,数值模拟分别研究了压电陶瓷片依次增加且所施加电压为0、8 V、16 V、24 V、32 V时,压电陶瓷片对悬臂梁自由端位移的抑制情况及梁各处应变的变化情况,计算结果如图3、4所示。需要指出的是,未铺设压电陶瓷的原型等厚度悬臂梁在额定工况下自由端最大位移为79.952 mm,原型变厚度悬臂梁自由端最大位移为145.974 mm。

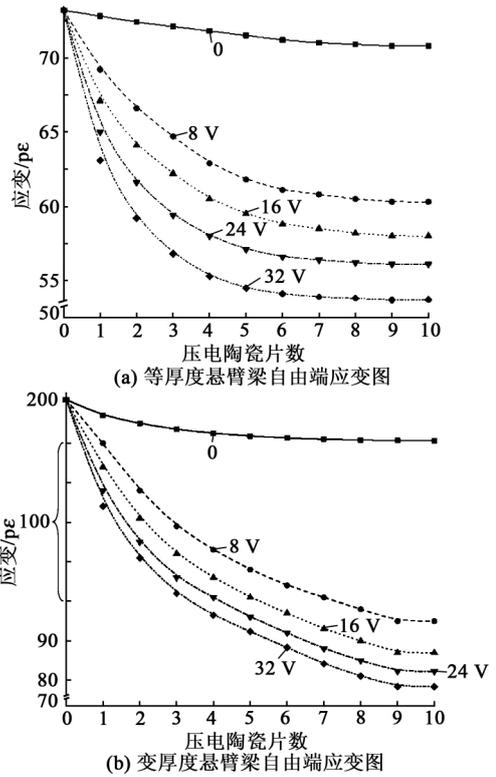


图4 等、变厚度悬臂梁自由端应变图

对比图3(a)、(b),与原型等、变厚度悬臂梁相比,在智能悬臂梁逐渐增加压电陶瓷片,但未施加电压的情况下,对刚度有明显提升作用,而施加电荷载后又可进一步增加模型刚度,减小自由端最大位移。在0~32 V电荷载区间内,等厚度悬臂梁自由端位移分别为78.71 mm、77.934 mm、77.702 mm、77.54 mm、77.16 mm,变厚度悬臂梁自由端位移分别为143.211 mm、143.17 mm、143.05 mm、142.85 mm、142.53 mm,与原模型相比有大幅降低。由图3还可知,原型等厚度悬臂梁在压电陶瓷片增加至5后,自由端位移减小趋于平缓;变厚度悬臂梁在压电陶瓷片增加至8后,自由端位移减小程度降低。结合图4(a)、(b)可知,压电陶瓷片铺设于应变较大位置对悬臂梁刚度提升及位移减小效果最佳。

对比图4(a)、(b)可知,仅在增加压电陶瓷数目时,等、变厚度悬臂梁应力分布未发生变化。施加电荷载后,应变明显减小,且随着电荷载的增大呈线性变化。

3 实验验证

3.1 实验平台搭建

为验证上述研究的有效性,本文在数值模拟基础上设计了等、变厚度悬臂梁的特性测试实验,整体实验测试平台如图5所示。实验采用DH3816静态应变测试系统、WY-50位移传感器、SG1732可变直

流电源(模拟输入电压为 0~32 V)、砝码及应变采集软件。实验所用原材料为 TC-191DC 不饱和聚酯树脂、EWR200/02 无碱玻璃纤维、V388 固化剂、CN/3800600 促进剂及脱模蜡。4 个实验样板按手糊工艺法进行制作,分原型等厚度样板,原型变厚度样板、智能等、变厚度样板(压电陶瓷片数从 1~10 依次增加),力与电压的加载方式同模拟保持一致。

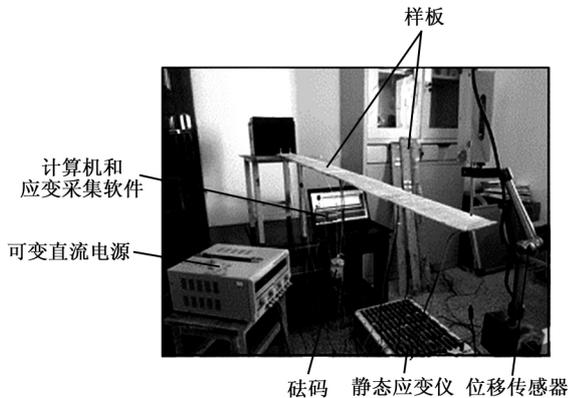


图 5 实验测试平台

3.2 实验数据处理

实验过程中为尽量减小误差,在相同外界条件下对每个测量点重复测量 3 次,取平均值作为最终测试结果。鉴于模拟值与实验值数据较多,以 0、16 V、32 V 时的模拟值和实验值进行对比展示,说明压电陶瓷片的实际效果,如图 6、7 所示。

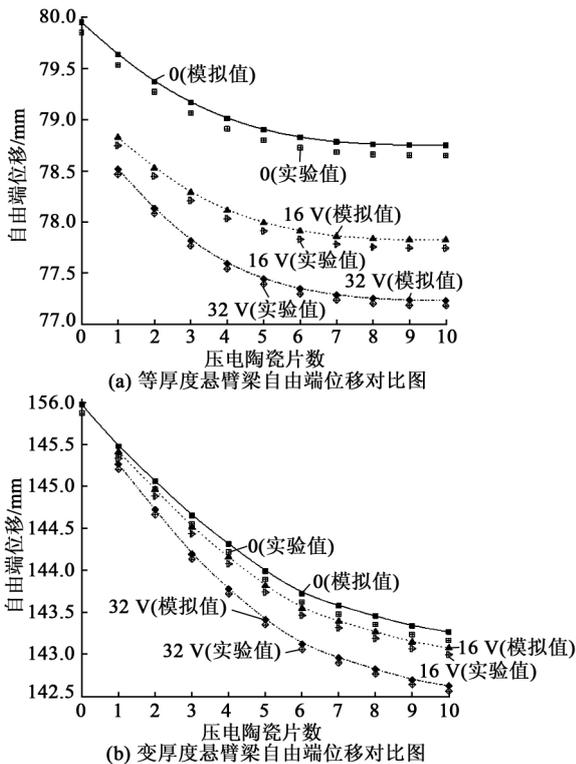


图 6 等、变厚度悬臂梁自由端位移对比图

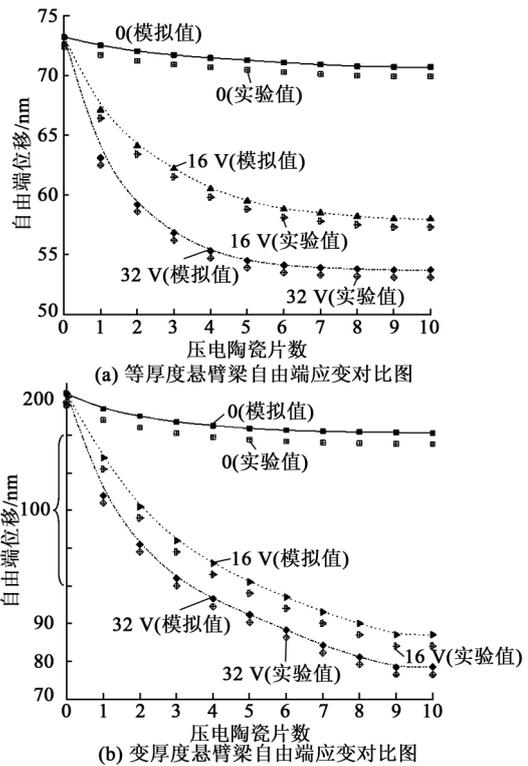


图 7 等、变厚度悬臂梁自由端位移对比图

对压电陶瓷片施加电压使其产生变形,即对悬臂梁施加反力抑制梁的变形。从图 6、7 可看出,实验值与模拟值比较,其值整体小于模拟值,这是因为压电陶瓷的变形不是在瞬间完成,相较于电压的增大有滞后性。整体来看,实验值与仿真值结果吻合较好,偏差小于 10%,说明数值模拟的正确性及实验的有效性,为后续悬臂梁的瞬态研究提供了参考依据。

4 结束语

在主动控制下,以单轴向玻璃纤维为基体材料结合压电陶瓷片设计出智能悬臂梁模型。通过数值模拟与实验相结合的方法探讨了压电陶瓷片对等、变厚度悬臂梁自由端位移及应变的影响。结果表明,智能悬臂梁能有效提升模型刚度,增大固有频率;静力分析无电压作用时,增加压电陶瓷片数可减小自由端最大位移,但对应变分布无显著影响;有电压作用时,悬臂梁自由端位移进一步减小,且各监测点应变值相应减小。这证实了主动控制的可行性,为后续悬臂梁动态研究打下了基础。

参考文献:

[1] KORAYEM M H, ALIPOUR A, YOUNESIAN D. Vibration suppression of atomic-force microscopy cantilevers covered by a piezoelectric layer with tensile force [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(9): 4135-4144.

(下转第 70 页)

通过工艺研究获得了满足 TCSAW 要求的高密度、无孔隙的平坦 SiO₂ 薄膜。在此基础上研制了 TCSAW 滤波器样品,其常温中心频率为 1 362.5 MHz,在 -55~85 °C 内频率漂移仅 388.2 kHz,频率温度系数仅 $-2.035 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ 。

参考文献:

[1] HASHIMOTO K Y, KADOTA M, NAKAO T, et al. Recent development of temperature compensated SAW devices[C]//[S. l.]: Proc IEEE Ultrason Symp, 2011;

(上接第 61 页)

[2] SILVANAVARRO G, ABUNDISFONG H F, VAZQUE B. Application of a passive/active autoparametric cantilever beam absorber with PZT actuator for Duffing systems[J]. Proc Spie, 2011, 8688(3): 165-170.
 [3] GUOLIANG M, MINGLONG X, SHUWEN Z, et al. Active vibration control of an axially moving cantilever structure using PZT actuator[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2018, 31(5): 04018049.
 [4] 方远, 刘树勇, 杨理华, 等. 压电陶瓷片迟滞补偿建模及悬臂梁主动控制研究[J]. 噪声与振动控制, 2018, 38(2): 25-29.
 [5] 陈希, 王海, 陶伟, 等. 基于压电陶瓷的柔性机械臂主动振动控制实验研究[J]. 传感技术学报, 2017, 30(5):

(上接第 66 页)

[2] ROUNDY S, WRIGHT P K, RABAEY J. A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes [J]. Computer Communications, 2003, 26(11): 1131-1144.
 [3] ZHAO H, TAO Y, NIU Y, et al. Harvesting energy from asphalt pavement by piezoelectric generator[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Materials Science Edition), 2014, 29(5): 933-937.
 [4] ZHAO H, LING J, YU J. A comparative analysis of piezoelectric transducers for harvesting energy from asphalt pavement[J]. Journal of the Ceramic Society of Japan, 2012, 120(1404): 317-323.
 [5] CHUA H G, KOK B C, GOH H H. Modelling and design analyses of a piezoelectric cymbal transducer (PCT) structure for energy harvesting application[J]. WIT Transactions on Ecology and the Environment, 2014, 186: 103-114.
 [6] 黄斌. 基于堆栈式压电换能器的路面能量收集技术研究[D]. 北京: 交通运输部公路科学研究院, 2016.
 [7] 黄斌, 魏亚, 路凯翼, 等. 堆栈式压电换能器在路面振动环境中的输出效能研究[J]. 公路交通科技, 2016, 33(8): 37-43.
 [8] 杨海露. 基于压电技术的路面变形能量收集系统研究

79-86.

[2] HASHIMOTO K Y, OMORI T, YAMAGUCHI M. Extended FEM/SDA software for characterising surface acoustic wave propagation in multi-layered structures [C]//[S. l.]: IEEE Ultrasonics Symposium, 2007: 711-714.
 [3] NAKAMURA K, KAZUMI M, SHIMIZU H. SH-TYPE and rayleigh-type surface waves on rotated Y-cut LiTaO₃ [C]//[S. l.]: Proc IEEE Ultrason Symp, 1977: 819-822.
 CHEN Xi, WANG Hai, TAO Wei, et al. Experimental study on active vibration control of flexible manipulators based on piezoelectric ceramics [J]. Journal of Transduction Technology, 2017, 30(5): 777-781.
 [6] 胡晓琳, 张婷. 基于自校正 PID 控制的智能悬臂梁振动控制[J]. 噪声与振动控制, 2019(2): 21-26.
 HU Xiaolin, ZHANG Ting. Vibration control of intelligent cantilever beam based on self-correction PID control[J]. Noise and Vibration Control, 2019(2): 21-26.
 [7] 叶开沅, 童晓华, 纪振义. 非均匀变厚度梁的动力响应的一般解[J]. 应用数学和力学, 1992(9): 753-764.
 [8] 杨宏斌. 柔性悬臂梁振动主动控制的实验研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2012.

及应用[D]. 北京: 北京科技大学, 2018.

[9] YANG H, WANG L, ZHOU B, et al. A preliminary study on the highway piezoelectric power supply system[J]. International Journal of Pavement Research and Technology, 2018, 11(2): 168-75.
 [10] JASIM A, YESNER G, WANG H, et al. Laboratory testing and numerical simulation of piezoelectric energy harvester for roadway applications[J]. Applied Energy, 2018, 224: 438-447.
 [11] ZHAO H, JIAN Y U, LIANG J M. Finite element analysis of Cymbal piezoelectric transducers for harvesting energy from asphalt pavement[J]. Journal of the Ceramic Society of Japan, 2010, 118(1382): 909-915.
 [12] KIM H W, BATRA A, PRIYA S, et al. Energy harvesting using a piezoelectric cymbal transducer in dynamic environment[J]. Jpn J Appl Phys, 2004, 43(9): 6178-6183.
 [13] OTTMAN G K, HOFMANN H F, LESIEUTRE G A. Optimized piezoelectric energy harvesting circuit using step-down converter in discontinuous conduction mode [J]. IEEE Trans on Power Electronics, 2003, 18(2): 1988-1994.
 [14] 段大鹏, 江秀臣, 孙才新, 等. 基于正交分解的介质损耗因数数字测量算法[J]. 中国电机工程学报, 2008(7): 127-133.