

二维非对称受限编码信道容量的证明

巩慧叶, 张远平, 李 鹏

(兰州理工大学, 计算机与通信学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 为了判断二维非对称受限编码的信道容量是否为正, 提出了扫描方法。若满足限制 (d_1, k_1, d_2, k_2) 矩阵中的每个位置都可以通过已知的标志来决定并且被扫描, 则限制 (d_1, k_1, d_2, k_2) 的信道容量为 0。通过对特定二维受限编码信道容量的证明, 验证了扫描方法比代数与组合方法更为有效。同时采用证明信道容量大于零常用的技术, 找到满足 (d_1, k_1, d_2, k_2) 受限的两个 $m \times n$ 矩阵, 若两矩阵在各种变形下都满足 (d_1, k_1, d_2, k_2) 限制, 则信道容量 $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} \geq \frac{1}{mn}$ 。这一方法对信道容量为正的区城进行扩展。

关键词: 二维受限编码; 非对称限制; 信道容量; 扫描方法; 正的容量区域

中图法分类号: TN911.22 **文献标识号:** A **文章编号:** 1000-7024 (2012) 02-0445-05

Proof for channel capacity of two-dimensional asymmetric constrained code

GONG Hui-ye, ZHANG Yuan-ping, LI Peng

(School of Computer and Communication, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: To determine whether the channel capacity of two-dimensional asymmetric constrained code is positive or zero, scanning method is proposed. If each location in (d_1, k_1, d_2, k_2) -constrained matrix can be determined by known signs and is able to be scanned, then channel capacity is 0. Some specific constraints are used to verify scanning method is more validated than algebraic and combinatorial methods. The common technology for proofing channel capacity positive is used to find two distinct $m \times n$ matrices satisfying (d_1, k_1, d_2, k_2) constraints. If these two matrices satisfy (d_1, k_1, d_2, k_2) constraints under each transformation, then the channel capacity $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} \geq \frac{1}{mn}$. This method is used to expand positive capacity region.

Key words: two-dimensional constrained code; asymmetric constraints; channel capacity; scanning method; positive capacity region

0 引言

受到噪声干扰的信道是比较常见的, 它使得传输的信息发生差错, 如高斯信道, 目前关于高斯信道的研究是比较多的^[1-2]。但还有一类常见的信道, 称之为受限信道, 这类信道对于许可的输入序列有一定的限制。为了在数据序列中获得信号的同步, 必须对信道中所传输的数据序列加以限制, 从而传输可靠有效的数据。随着光存储技术的不断发展, 许多先进的光存储和数字记录信道被相继提出, 多维光存储已成为提高信息记录密度和读写速度的重要途径, 为了满足特定的多维光存储信道的需要, 研究人员提出了相应的二维受限编码。受限编码无处不在, 磁存储与

光存储以及数字记录中都有使用到受限编码^[3-5]。通过对传输数据进行有效合理的编码从而达到信道容量的最大值。二元序列受限编码中最为常见的是所谓 RLL (d, k) 序列, 即相邻的两个 1 之间至少有 d 个 0 至多有 k 个 0。衡量通信系统性能的一个关键性指标为信道容量, 即单位时间内信道上所能传输的最大信息量, 它给出了通信系统传输信息的极限。一个 $m \times n$ 的 0/1 矩阵如果在水平方向上满足一维的 (d_1, k_1) 限制, 在竖直方向上满足一维的 (d_2, k_2) 限制, 则这一矩阵满足 (d_1, k_1, d_2, k_2) 限制, 其信道容量可以表示为 C_{d_1, k_1, d_2, k_2} 。若令表示 (d_1, k_1, d_2, k_2) 这一限制, 则其信道容量为

$$C(\Theta) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(n, m/\Theta)}{nm}$$

收稿日期: 2011-02-06; 修订日期: 2011-04-10

作者简介: 巩慧叶 (1985-), 女, 山西屯留人, 硕士研究生, 研究方向为信息论、编码理论、矩阵分析等; 张远平 (1966-), 男, 安徽无为, 博士, 教授, 研究方向为算法设计与分析、信息论、编码理论、矩阵分析、图论、组合数学等; 李鹏 (1985-), 男, 山东临沂人, 硕士研究生, 研究方向为算法设计与分析、外存存储算法等。E-mail: hygong0202@126.com

式中： $N(n, m/\Theta)$ ——满足受限 Θ 的 $m \times n$ 矩阵的个数， mn ——示线性排列。如果在水平与竖直方向上同时满足 (d, k) 限制，即 $d=d_1=d_2, k=k_1=k_2$ 则这种限制被称为对称限制，信道容量定义为

$$C_{d,k} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N_{m,n}^{(d,k)}}{mn}$$

由此很容易得出：对于所有的 $d \geq 0, C_{d,d} = 0$ 。Calkin 和 Wilf 证明了 $C_{1,\infty}$ 的存在，并利用转移矩阵的方法计算出上下界为： $0.587891 \leq C_{1,\infty} \leq 0.588339$ 。Calkin 和 Wilf 通过计算转移矩阵的特征值来计算受限编码的信道容量，但是由于转移矩阵的阶数呈指数式增长，因而现在重在研究通过低阶的矩阵特征值来求解受限编码的信道容量。信道容量的求解从图论的角度实际上是对于任意给定的正整数 k ，计算特定图中长度为 k 的路径数目，以及分析它的渐近性。受限编码的信道容量研究可以转化为一些特定的图谱问题研究^[6]。而通过计算图的邻接矩阵的最大特征值可以得出受限系统的信道容量。关于图谱的问题在文献^[7]中都有相关的描述。Ashley 和 Marcus 首先发现 $C_{1,2} = 0$ 。Kato 和 Zeger 证明了二维对称受限编码信道容量的存在，并采用代数与组合的方法证明了 $d \geq 1$ ，当且仅当 $k = d + 1$ 时， $C_{d,k} = 0$ 。针对证明具体受限条件下信道容量为 0 的方法已由 Blackburn^[8] 给出。而 Censor 和 Etzion^[9] 通过进一步的改进采用扫描方法对 $C_{d,d+1} = 0$ 进行了证明，并对一些特定的模型如三角形，六边形，正方形等受限编码的信道容量进行了证明。Kato 等人在文献 [10] 中给出了有关非对称二维受限编码信道容量的一些特征，判断出在满足一些特定受限条件下的信道容量是否在正的区域。近年来有关二维受限编码的研究越来越多^[11-13]，尤其是对具体受限条件下信道容量是否为正，以及在具体受限条件下信道容量的范围^[14-16]。如 Golin^[14] 等利用转移矩阵分析了二维的读写分离受限编码的容量，并给出了比较精确的信道容量估计，不再将信道容量看作读写过程的函数，而是将读写独立记忆系统转化为受限矩阵，通过计算满足条件的受限矩阵的个数，进而转化为求解转移矩阵特征值，得出系统的容量上下界，同时在该文献中给出了受限矩阵不对称的容量上下界求解的方法。Nagy^[15] 对三维的 $(0, 1)$ 受限编码信道容量进行估计，并证明了三维的 $(0, 1)$ 受限编码信道容量的范围为 $0.522501741838 \leq C_{(0,1)} \leq 0.526880847825$ 。文中主要研究二维非对称受限编码的信道容量，利用扫描方法以及代数与组合方法来证明信道容量为零，同时利用证明信道容量大于零常用的技术，对满足特定受限条件下的信道容量进行证明，判断其信道容量是否为正，对信道容量为正的区进行扩展。

1 已有的结论

在这部分中主要介绍已有的证明信道容量的方法及现

有的结果。

1.1 信道容量为正

在证明二维受限条件下信道容量为正的方法中主要涉及的是文献 [10] 中的方法。

引理 1^[10] 令 A, B 分别为 $m \times n$ 的矩阵， $m \geq k_2, n \geq k_1$ 形如 AB 时此矩阵表示水平并联即： $m \times 2n$ 的矩阵形式。形如 A/B 时，此矩阵表示竖直并联即： $2m \times n$ 的矩阵形式。A, B 分别为满足 (d_1, k_1, d_2, k_2) 的 0/1 受限矩阵。若 AA、AB、BA、BB、A/A、A/B、B/A 和 B/B 都满足 (d_1, k_1, d_2, k_2) 限制则 $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} \geq \frac{1}{mn}$ 。这一引理是证明信道容量为正一般采用的技术。

引理 2^[10] 对于所有的 $d_1, k_1, d_2, k_2, C_{d_1, k_1, d_2, k_2} = C_{d_2, k_2, d_1, k_1}$ 。

引理 3^[10] 如果 $d_1 \leq d_1 \leq k_1 \leq k_1, d_2 \leq d_2 \leq k_2 \leq k_2$ 成立，则 $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} \leq C_{d_1^A, k_1^A, d_2^A, k_2^A}$ 。

在文献 [10] 中利用以上 3 个引理证明了 d_1, k_1, d_2, k_2 在满足下列条件时信道容量的正负取值。 d_1, k_1, d_2, k_2 为正整数，且 $d_1 \leq k_1, d_2 \leq k_2$ ，令 $d = \min(d_1, d_2)$ ， $D = \max(d_1, d_2)$ ， $k = \min(k_1, k_2)$ ， $K = \max(k_1, k_2)$ ， $\delta = k - D$ ， $\Delta = K - d$ ，那么：

(1) 如果 $\delta \leq 0$ ，那么， $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} = 0$ 。

(2) 如果 $\delta = 1$ ，那么：

1) 如果 $d = 0$ ，那么 $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} > 0$ 。

2) 如果 $d \geq 1$ ，那么，①如果 $\Delta \leq 1$ 那么 $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} = 0$ 。②如果 $\Delta > d_1 = d_2$ ， $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} > 0$ 。③如果 $\Delta \geq 3$ ， $d = 1$ ， $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} > 0$ 。

(3) 如果 $\delta \geq 2$ ，那么， $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} > 0$ 。在该文献中未确定在 $\delta = 1$ 如果 $d = 1$ ， $\Delta = 2$ 时的信道容量为正或为 0。

1.2 信道容量为 0

1.2.1 采用代数与组合的方法证明信道容量为 0

Kato 和 Zeger 采用代数与组合的方法对 $C_{d,d+1} = 0$ 进行证明。主要思想：根据信道容量的定义 $C_{d,k} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N_{m,n}^{(d,k)}}{mn}$ ，通过每 bit 信息所占据的相对空间来衡量信道容量是否为正。通过证明满足 $(d, d+1)$ 限制的矩阵符合下列两种情况：①这些满足 $(d, d+1)$ 限制的矩阵既不是单位矩阵，也不是反单位矩阵。②这些矩阵要么是单位矩阵要么是反单位矩阵。通过证明满足限制的矩阵个数的增长随着矩阵区域的无限扩大趋于 0。也就是随着矩阵边长的线性增长，存储的信息量趋于 0。从而证明了 $C_{d,d+1} = 0$ 。

1.2.2 采用扫描方法证明信道容量为 0

证明二维受限条件下信道容量为 0，大多数论文采用的代数与组合的方法。但是这种方法的过程复杂不易理解，所以在本文中采用文献 [9] 中的“扫描方法”。针对具体受限条件下证明信道容量为 0 的方法已由 Blackburn^[8] 给

证明了 $C_{1,2,1,3} > \frac{1}{6 \times 5} > 0$ 。因此综上 (a)、(b) 种情况证明了 $\delta=1, d=1, \Delta=2, C_{d_1, k_1, d_2, k_2} > 0$ 。因此文献 [10] 中的 C) 如果 $\Delta \geq 3, d=1, C_{d_1, k_1, d_2, k_2} > 0$ 。可以改为 $\Delta \geq 2, d=1, C_{d_1, k_1, d_2, k_2} > 0$ 。

(2) 采用代数与组合的方法进行证明：如果 $k_1 = d_2$ ，那么， $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} = 0$ 。

证明：当 $k_1 = d_2$ 时， $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} = C_{d_1, k_1, k_1, k_2}$ 。满足 (d_1, k_1, k_1, k_2) 限制的 $(k_1+1) \times (k_1+1)$ 的矩阵，则要求在每行至少有一个 1，在每列至多有一个 1。 $m, n > k_1$ ，满足 (d_1, k_1, k_1, k_2) 限制的 $m \times n$ 的矩阵的个数由满足 (d_1, k_1, k_1, k_2) 限制的 $(k_1+1) \times (k_1+1)$ 的矩阵得个数来决定，最多有 $(k_1+1)!$ ，所以 $N \leq (k_1+1)! C_{d_1, k_1, k_1, k_2} \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\log_2^N}{mn} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\log_2^{(k_1+1)!}}{mn} = 0$ 即 $C_{d_1, k_1, d_2, k_2} = 0$ 。

(3) 采用扫描方法证明 $C_{(d, d+1, d, 2d)} = 0$ 。

证明：由引理 2 可得 $C_{(d, d+1, d, 2d)} = C_{(d, 2d, d, d+1)}$ 。设矩阵 A 满足 $(d, 2d, d, d+1)$ 这一限制。通过证明位置 (i, j) 的标志 X 是由位于左边的 d 个标志，以及位于下方的矩阵的标志来决定的。如图 5 所示。

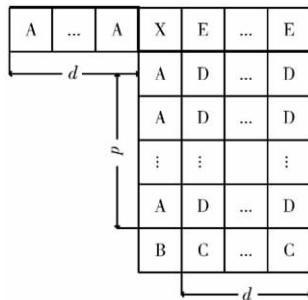


图 5 满足 $(d, 2d, d, d+1)$ 限制的阵列的扫描

若 X 既可以为 0 也可以为 1，标志 A 应全部为 0。若其中任意一个 A 为 1，则 X 必须为 0。否则将违背水平方向与竖直方向上相邻两个 1 之间间隔至少有 d 个 0 的限制。如果 B 为 0 由竖直限制可得 X 必为 1，若 B 为 1 由水平限制得出 C 为 0。若标志 D 在所在的列全部为 0，由竖直限制可得出相应列中的 E 为 1，由水平限制可得出 X 为 0。若标志 D 在所在的列中有一个为 1，由竖直限制可知 E 全为 0，由于标志 A 全为 0，所以由水平限制可得 X 为 1。综上，根据定理 1 可得 $C_{(d, 2d, d, d+1)} = 0$ 。由于 $C_{(d, d+1, d, 2d)} = C_{(d, 2d, d, d+1)}$ ，所以 $C_{(d, d+1, d, 2d)} = 0$ 。

3 结果分析

目前多数文章在证明信道容量为正时都采用文献 [10] 中的方法，但这种方法并不是适合所有的信道容量为正的二维受限编码，因为并不是所有的二维受限编码都可以找

到满足受限条件的矩阵 A、B，从而利用引理 1 进行证明。对于证明二维受限编码信道容量为 0，文章中采用的代数与组合方法以及扫描方法。代数与组合方法是针对受限编码信道容量的公式，而扫描方法是一个扫描过程。由于代数与组合方法基于信道容量的定义，所以适合对所有受限编码的信道容量进行判断，但是根据信道容量的公式来判断则计算量大，过程复杂。扫描方法相对于代数与组合方法简单明了，而且利用图示清楚易懂，但是具有局限性不是所有的二维受限编码的信道容量都可以通过扫描方法来进行判断，而且证明过程相对比较多。

4 结束语

文中通过对具体受限编码信道容量的证明，来说明利用扫描方法证明二维受限编码信道容量相对于依据信道容量的定义的代数与组合方法，更为简单明了。同时利用文献 [10] 中的方法对信道容量为正的的区域进行扩展。由于代数与组合方法依据的是信道的定义，所以需要计算满足限制的得矩阵个数，这样就比扫描方法计算复杂。但是扫描方法相对代数与组合方法具有一定的局限性，不是所有信道容量为零的二维受限编码都可以用扫描方法来证明。这就需要在今后工作中，能够研究出适合判断所有二维受限编码信道容量是否在正的区域中的既简单又有效的方法。

参考文献：

- [1] Weingarten H, Steinberg Y, Shamai (Shitz) S. The capacity region of the Gaussian multiple-input multiple-output broadcast channel [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52 (9): 3936-3964.
- [2] Telatar E, Tse D. Bounds on the capacity region of a class of interference channels [C]. Nice, France: Proc IEEE International Symposium on Information Theory, 2007.
- [3] Forney G D, Guha S. Convolutional and tail-biting quantum error-correcting codes [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2007, 53 (3): 865-880.
- [4] Grassl M, Rotteler M. Quantum block and convolutional codes from self-orthogonal product codes [C]. Adelaide, Australia: Proc ISIT, 2005: 1018-1022.
- [5] Demirkhan I, Wolf K J. Block codes for the hard-square model [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2005, 51 (8): 2836-2848.
- [6] Golin M J, Leung Y, Wang Y J, et al. Counting structures in grid graphs, cylinders and tori using transfer matrices: Survey and new results [C]. British Columbia, Canada: Proceedings of SIA ALENEX/ANALCOC Analytic Algorithmics and Combinatoric, 2005.
- [7] Golin M J, Yong X R, Zhang Y P. The asymptotic number of spanning trees in circulant graphs [C]. New Orleans, USA: Proceedings of SIAM ALENEX/ANALCO Workshop-Analytic

- Algorithmics and Combinatorics, 2007.
- [8] Blackburn S R. Two dimensional runlength constrained arrays with equal horizontal and vertical constraints [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52 (7): 3305-3309.
- [9] Censor K, Etzion T. The positive capacity region of two-dimensional run-length-constrained channels [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52 (11): 5128-5140.
- [10] Kato A, Zeger K. Partial characterization of the positive capacity region of two-dimensional asymmetric run length constrained channels [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1999, 46 (7): 2666-2670.
- [11] Etzion T. Zero/positive capacities of two-dimensional Run-length-constrained arrays [J]. IEEE International Symposium on Information Theory, 2005, 51 (9): 3186-3199.
- [12] Atajan T, Yong X, Inaba H. Further analysis of the spanning tree formulas in circulant graphs [J]. Discrete Mathematics, 2006, 306 (22): 2817-2827.
- [13] Etzion T. Cascading methods for Runlength-limited arrays [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1997, 43 (1): 319-324.
- [14] Golin M J, Yong X R, Zhang Y P. New upper and lower bounds on the channel capacity of read/write isolated memory [J]. Discrete Applied Math, 2004, 140 (1-3): 35-48.
- [15] Nagy Z. Capacity bounds for the 3-dimensional (0, 1) Run-length limited channel [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2000, 46 (3): 1030-1038.
- [16] Motahari A S. Capacity bounds for the Gaussian interference channel [J]. Submitted to IEEE Trans Inform Theory, 2009, 55 (2): 620-643.

(上接第 444 页)

- [4] WANG Xuan, KONG Ling-fu. Resource clustering based decentralized resource discovery scheme in computing grid [C]. Proceedings of the Sixth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2007: 12-14.
- [5] YI Xing-dong. Grid-based clustering algorithm with referential values of parameters [D]. Changsha: Hunan University, 2008 (in Chinese). [易兴东. 基于网格的带有参数参考值的聚类算法 [D]. 长沙: 湖南大学, 2008.]
- [6] Badia R M, Du D, Huedo E, et al. Integration of GRID superscalar and GridWay Metascheduler with the DRMAA OGF standard [G]. LNCS 5168: Gran Canaria, Spain; Proceedings of the 14th international Euro-Par Conference on Parallel Processing, 2008: 445-455.
- [7] FANG Juan, ZHANG Shu-jie. Research of grid resource discovery and monitoring technology based on mobile agent [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33 (2): 341-344 (in Chinese). [方娟, 张书杰. 基于移动 Agent 的网格资源发现与监控技术的研究 [J]. 电子学报, 2005, 33 (2): 341-344.]
- [8] LIU Chuan. Research on resource management and scheduling based on virtual organizations in grids [D]. Chongqing: Chongqing University of Posts and Telecommunications, 2010 (in Chinese). [刘川. 网格计算下基于虚拟组织的资源管理与调度研究 [D]. 重庆: 重庆邮电大学, 2010.]
- [9] XU Yue-zhu, LIU Da-xin, ZHANG Jian-pei. Chance discovery algorithm based on small-world network [J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45 (12): 1-4 (in Chinese). [徐悦竹, 刘大昕, 张健沛. 基于小世界网络理论的机会发现算法 [J]. 计算机工程与应用, 2009, 45 (12): 1-4.]
- [10] Ian F, Driana I A. On fully decentralized resource discovery in grid environments [G]. LNCS 2242: Proceedings of the Second International Workshop on Grid Computing, 2001: 51-62.
- [11] JIN S L, HU L, GUO D, et al. Research on grid resources' clustering methods [C]. Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Convergence Information Technology, 2007: 2034-2039.
- [12] WAN Yang, WANG Ru-zhuan. A resource discovery approach based on Echord in grid environment [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38 (11): 2500-2504 (in Chinese). [王杨, 王汝传. 一种基于 Echord 协议的网格资源发现方法 [J]. 电子学报, 2010, 38 (11): 2500-2504.]
- [13] CHE Xi-long, HU De-bin, HU Liang. Run-time prediction system of grid applications [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2008, 29 (8): 1475-1478 (in Chinese). [车喜龙, 胡德斌, 胡亮. 网格应用程序执行时间预报系统 [J]. 小型微型计算机系统, 2008, 29 (8): 1475-1478.]
- [14] Tanaka Y, Nakada H, Sekiguchi S, et al. Ninf-G: A reference implementation of RPC based programming middleware for grid computing [J]. Grid Computing, 2003, 1 (1): 41-51.
- [15] LIU De-hui, YIN Gang, WANG Huai-min. Overview of gossip algorithm in distribute system [J]. Computer Science, 2010, 12 (3): 145-150 (in Chinese). [刘德辉, 尹刚, 王怀民, 等. 分布式环境下的 Gossip 算法综述 [J]. 计算机科学, 2010, 12 (3): 145-150.]