

一类手足口病 SEIQR 传染病模型的稳定性分析

孟新友, 向红, 朱毓杰, 张小兵

(兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 研究了一类具有隔离且潜伏期及感染期均有传染性的手足口病 SEIQR 传染病模型. 得到了该模型的无病平衡点和地方病平衡点局部稳定的条件, 构造 Lyapunov 函数证明了无病平衡点的全局稳定性, 并给出数值模拟.

关键词: 手足口病; 隔离; 局部稳定性; Lyapunov 函数

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0366(2012)02-0042-05

Stability Analysis of a Class of SEIQR Epidemic Model for Hand, Foot and Mouth Diseases

MENG Xin-you, XIANG Hong, ZHU Yu-jie, ZHANG Xiao-bing

(School of Sciences, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: A class of SEIQR epidemic model with quarantine and having an infectious force in both latent and infected periods for hand, foot and mouth diseases is investigated. Some conditions of local stability for the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium are obtained by analyzing the roots of the associated characteristic equation. Constructing the Lyapunov function proves the global stability of the disease-free equilibrium. Some numerical simulations are given in the end.

Key words: HFMD; quarantine; local stability; Lyapunov function

利用动力学的方法建立合理的传染病数学模型以便有效分析传染病的传播规律, 控制和预测传染病的传播一直是各国数学家关注的研究课题. 早在 1927 年, Kermack 等^[1]首先建立 SIR 传染病的数学模型, 并利用动力学方法对其传播规律和流行趋势进行了研究. 然而一些流行病不但在染病期传染, 而且在潜伏期也传染. 最近几年在我国多个地区出现的手足口病 HFMD (Hand, Foot and Mouth Disease, HFMD), 是由肠道病毒引起的传染病, 通过人群间的密切接触传染, 多发生于 5 岁以下儿童, 可引起手、足、口等部位的疱疹, 少数患儿可引起心肌炎、无菌性脑膜炎等并发症, 个别重患儿病情发展快, 导致死亡. 因此, 潜伏期和染病期均有传染的流行病模型日益受到了人们的关注^[2-8]. 文献[5]研究了潜伏期和染病期均有传染的数学模型, 而文献[7]研究了具有年龄结构和隔离措施的传染病模型. 受文献[5-8]启发, 得到关于手足口病模型的结构 (见图 1).

关于手足口病具有隔离措施且潜伏期及染病期均有传染的 SEIQR 传染病模型如下:

$$\begin{cases} S'(t) = \mu + \eta Q(t) + \delta R(t) - \mu S(t) - \beta_1 S(t)E(t) - \beta_2 S(t)I(t) \\ E'(t) = \beta_1 S(t)E(t) + \beta_2 S(t)I(t) - wE(t) - \mu E(t) \\ I'(t) = wE(t) - pI(t) - (1-p)rI(t) - \alpha I(t) - \mu I(t) \\ Q'(t) = pI(t) - \eta Q(t) - qQ(t) - \mu Q(t) \\ R'(t) = (1-p)rI(t) + qQ(t) - \delta R(t) - \mu R(t) \end{cases}, \quad (1)$$

收稿日期: 2011-12-02

基金项目: 国家自然科学基金(10961018); 甘肃省自然科学基金(1107RJZA088)

作者简介: 孟新友(1980-), 男, 硕士, 讲师, 主要从事应用微分方程的教学与研究. E-mail: xymeng@lut.cn

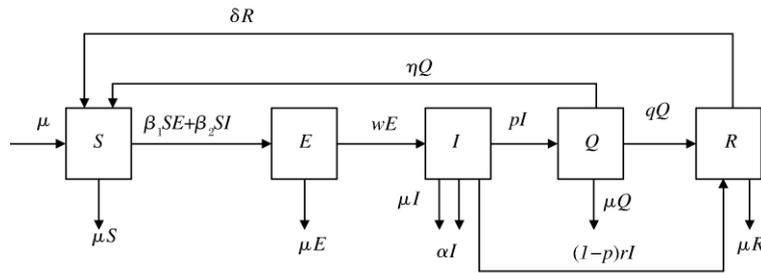


图 1 模型结构

其中 $S(t), E(t), I(t), Q(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示在 t 时刻易感类、潜伏类、染病类、隔离类和康复类的人口密度. μ 为自然出生率(自然死亡率); β_1, β_2 分别表示一个潜伏者, 染病者所具有的传染力; w 表示潜伏者成为染病者的比例; α 为因病死亡率; p 表示隔离比例; r^{-1} 和 q^{-1} 分别表示平均治愈期和平均隔离期; δ 和 η 分别代表康复类人群和隔离类人群成为易感类人群的比例. 这里 $\mu, r, \alpha, w, \beta, \delta, \eta, p, q, \beta_1, \beta_2$ 都假定为正常数, 并且人口总数保持不变, 还满足条件

$$S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) = 1.$$

1 模型分析

1.1 平衡点的存在性

系统(1) 总有一个相应于疾病消除的无病平衡点 DFE(Disease-Free Equilibrium, DFE) $E_0(1, 0, 0, 0, 0)$. 另外, 系统(1) 有地方病平衡点 $E_*(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$. 首先由系统(1) 的第 3 个和第 4 个方程分别得

$$E = E(I) = \frac{p + (1-p)r + \mu + \alpha I}{w} I \triangleq \frac{p_0}{w} I, Q = Q(I) = \frac{p}{q + \mu + \eta} I \triangleq \frac{p_1}{p_1} I,$$

分别代入到系统(1) 的第 2 个和第 5 个方程中得

$$R = R(I) = \frac{pq + rp_1(1-p)}{p_1(\delta + \mu)} I, S = S(I) = \frac{(\omega + \mu)E}{\beta_1 E^* + \beta_2 I} = \frac{(\omega + \mu)p_0}{p_0\beta_1 + \omega\beta_2}.$$

将 S, E, Q 和 R 代入到系统(1) 中的第 1 个方程可得

$$\mu(1 - S) = \left[\beta_1 S \frac{p_0}{w} + \beta_2 S - \frac{p\eta}{p_1} - \frac{\delta(pq + rp_1(1-p))}{p_1(\delta + \mu)} \right] I.$$

由于 $S < 1$, 故 I 存在的条件为

$$p_0 p_1 (\omega + \mu) (\delta + \mu) > w [p\eta(\delta + \mu) + \delta(pq + rp_1(1-p))].$$

进一步计算可得

$$I^* = \frac{\mu\omega p_1 (\delta + \mu) [p_0\beta_1 + \omega\beta_2 - p_0(\omega + \mu)]}{(p_0\beta_1 + \omega\beta_2) [p_0 p_1 (\omega + \mu) (\delta + \mu) - w(p\eta(\delta + \mu) + \delta pq + \delta r p_1(1-p))]}.$$

这样得到系统(1) 的地方病平衡点 $E_*(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$, 其中

$$S^* = \frac{(\omega + \mu)p_0}{p_0\beta_1 + \omega\beta_2}, E^* = \frac{p_0}{w} I^*, Q^* = \frac{p}{p_1} I^*, R^* = \frac{pq + rp_1(1-p)}{p_1(\delta + \mu)} I^*.$$

根据文献[9] 的方法, 计算系统(1) 的基本再生数为 $R_0 = \frac{p_0\beta_1 + \omega\beta_2}{(\omega + \mu)p_0}$.

1.2 无病平衡点的局部稳定性

在无病平衡点 $E_0(1, 0, 0, 0, 0)$ 处, 线性化系统(1) 为

$$\begin{cases} S'(t) = -\mu S(t) - \beta_1 E(t) - \beta_2 I(t) + \eta Q(t) + \delta R(t) \\ E'(t) = (\beta_1 - w - \mu)E(t) + \beta_2 I(t) \\ I'(t) = wE(t) - p_0 I(t) \\ Q'(t) = pI(t) - p_1 Q(t) \\ R'(t) = (1-p)rI(t) + qQ(t) - (\delta + \mu)R(t) \end{cases}, \tag{2}$$

其对应的特征方程为

$$(\lambda + \mu)(\lambda + p_1)(\lambda + \delta + \mu)[\lambda^2 + (\omega + \mu + p_0 - \beta_1)\lambda + (\omega + \mu)p_0 - p_0\beta_1 - \omega\beta_2] = 0. \quad (3)$$

显然,方程(3)有3个负实根,分别为 $\lambda = -\mu < 0$, $\lambda = -p_1 < 0$, $\lambda = -(\delta + \mu) < 0$. 方程(3)的其他根由下列一元二次方程所决定:

$$\lambda^2 + (\omega + \mu + p_0 - \beta_1)\lambda + (\omega + \mu)p_0 - p_0\beta_1 - \omega\beta_2 = 0. \quad (4)$$

当 $R_0 < 1$ 时,可以直接得

$$(\omega + \mu)p_0 - p_0\beta_1 - \omega\beta_2 > 0,$$

且由 $\omega + \mu > \beta_1 + \frac{\omega\beta_2}{p_2}$ 得

$$\omega + \mu + p_0 > \beta_1 + \frac{\omega\beta_2}{p_0} + p_0 > \beta_1,$$

所以方程(4)有2个负实根.

定理1 当 $R_0 < 1$ 时,系统(1)在无病平衡点 $E_0(1, 0, 0, 0, 0)$ 处是局部稳定的.

1.3 地方病平衡点的局部稳定性

线性化系统(1)后在地方病平衡点 $E_*(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ 处的Jacobi矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -(\mu + \beta_1 E^* + \beta_2 I^*) & \beta_1 S^* & \beta_2 S^* & \eta & \delta \\ \beta_1 E^* + \beta_2 I^* & \beta_1 S^* - \omega - \mu & -\beta_2 S^* & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & -p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p)r & -q & -(\delta + \mu) \end{pmatrix},$$

其对应的特征方程为

$$(\lambda + p_1)(\lambda + \delta + \mu)\{\lambda^3 + (\omega + 2\mu + p_0 + \beta_1 E^* + \beta_2 I^* - \beta_1 S^*)\lambda^2 + [(\omega + \mu)(\mu + \beta_1 E^* + \beta_2 I^*) + 2\mu + \omega + \beta_1 E^* + \beta_2 I^* - (\beta_1 + \mu\beta_1 + \omega\beta_2)S^*]\lambda + p_0(\mu + \omega)(\mu + \beta_1 E^* + \beta_2 I^*) - \mu(p_0\beta_1 + \omega\beta_2)S^*\}(\beta_1 E^* + \beta_2 I^*)[\omega p q \delta + \omega r \delta(1-p)(\lambda + p_1) + \omega p \eta(\lambda + \delta + \mu)] = 0. \quad (5)$$

若不考虑隔离类人群和康复类人群转变为易感类人群,即 $\delta = \eta = 0$,方程(5)显然有2个负根 $\lambda = -p_1 < 0$ 和 $\lambda = -(\delta + \mu) < 0$,而其余根的分布情形由下列方程所决定:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (6)$$

其中

$$A = \mu + p_0 + \frac{(\omega + \mu)\omega\beta_2}{p_0\beta_1 + \omega\beta_2} + \frac{p_0\beta_1 + \omega\beta_2}{\omega} I^* > 0,$$

$$B = \mu p_0 + \frac{(\omega + \mu)\mu\omega\beta_2}{p_0\beta_1 + \omega\beta_2} + \frac{\omega + \mu + p_0}{\omega} (p_0\beta_1 + \omega\beta_2) I^* > 0,$$

$$C = \frac{p_0}{\omega} (\omega + \mu)(p_0\beta_1 + \omega\beta_2) I^* > 0.$$

因为 $AB - C = \beta_2(\omega + \mu)(\omega + 2\mu + p_0) + \frac{p_0\beta_1 + \omega\beta_2}{\omega} [\mu(\omega + \mu + p_0) + p_0(\mu + p_0)] > 0$,由霍尔—维茨定理知方程(6)的所有根均为负实部,从而方程(5)的所有特征根均为负的,即 E^* 为局部渐近稳定的.

1.4 无病平衡点的全局稳定性

为了证明系统(1)的无病平衡点的全局稳定性,首先给出下列性质.

性质1 非负象限 R_+^5 关于系统(1)是正的、不变的.

容易证得对于 $\varepsilon \geq 0$,点集

$$\Omega_\varepsilon = \{(S, E, I, Q, R) \in R_+^5, N(t) \leq 1 + \varepsilon\}$$

是关于系统(1)的一个紧的正向不变集,并且当 $\varepsilon > 0$ 时,此集合是吸引的.

定理2 当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点 E_0 在 Ω_ε 内是全部渐近稳定的,这也暗示着无病平衡点 E_0 关于非负象限 R_+^5 是全局渐近稳定的.

证明 首先构造下列 LaSalle-Lyapunov 函数

$$V_{DFE}(t) = A_1 E(t) + A_2 I(t) + A_3 Q(t) + A_4 R(t),$$

其中 A_1, A_2, A_3 和 A_4 是待定系数. 它对系统(1) 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{DFE}(t) &= A_1 \dot{E}(t) + A_2 \dot{I}(t) + A_3 \dot{Q}(t) + A_4 \dot{R}(t) = \\ &[A_1(\beta_1 S^* - \omega - \mu) + A_2 \omega]E(t) + [A_1 \beta_2 S^* - A_2 p_0 + A_3 p + A_4(1 - p)r]I(t) + \\ &[A_4 q - A_3 p_1]Q(t) + A_4(-\delta - \mu)R(t). \end{aligned} \tag{7}$$

选取恰当的 A_1, A_2, A_3 和 A_4 , 使得 $E(t), I(t), Q(t)$ 和 $R(t)$ 前面的系数均为 0. 这样, 容易计算得

$$A_1 = \omega, A_2 = \omega + \mu - \beta_1 S^*, A_3 = A_4 = 0.$$

由于 $S^* \leq 1$, 将上述结果代入式(7) 中得 $\dot{V}_{DFE}(t) \leq (R_0 - 1)I(t)$. 这样, 当 $R_0 \leq 1$ 时, 有 $\dot{V}_{DFE}(t) \leq 0$. 根据 LaSalle 不变集原理知在 Ω_ϵ 内包含了 $\{(S, E, I, Q, R) \in R_+^5, \dot{V}_{DFE}(t) = 0\}$ 最大不变集. 这证明了系统(1) 的无病平衡点关于 Ω_ϵ 是全局渐近稳定的. 由于 Ω_ϵ 是吸引的, 这也证明了在 $R_0 \leq 1$ 时, 无病平衡点 E_0 关于非负象限 R_+^5 是全局渐近稳定的.

2 数值模拟

验证上述理论, 举例如下:

$$\begin{cases} S'(t) = \frac{1}{10} + \frac{1}{100}Q(t) + \frac{1}{100}R(t) - \frac{1}{10}S(t) - \frac{1}{5}S(t)E(t) - \frac{3}{5}S(t)I(t) \\ E'(t) = \frac{1}{5}S(t)E(t) + \frac{3}{5}S(t)I(t) - \frac{4}{5}E(t) - \frac{1}{10}E(t) \\ I'(t) = \frac{4}{5}E(t) - \frac{3}{10}I(t) - \left(1 - \frac{3}{10}\right) \times \frac{2}{5}I(t) - \frac{1}{100}I(t) - \frac{1}{10}I(t) \\ Q'(t) = \frac{3}{10}I(t) - \frac{1}{100}Q(t) - \frac{1}{5}Q(t) - \frac{1}{10}Q(t) \\ R'(t) = \left(1 - \frac{3}{10}\right) \times \frac{2}{5}I(t) + \frac{1}{5}Q(t) - \frac{1}{100}R(t) - \frac{1}{10}R(t) \end{cases}, \tag{8}$$

初始值为 $(S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0)) = (0.8, 0.4, 0.3, 0.5, 0.2)$. 经过简单的计算, 得系统(8) 的基本再生数 $R_0 = 0.9952 < 1$, 因此系统存在无病平衡点 $E_0(1, 0, 0, 0, 0)$ 且该平衡点是全局稳定的(见图 2). 在系数中改变取值 $\omega = 0.4, \beta_1 = 0.4$, 其他系数取值不变的情形下, 此时系统的基本再生数 $R_0 = 1.4957 > 1$, 系统(8) 存在地方病平衡点 $E_*(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*) = (0.67, 0.07, 0.04, 0.04, 0.17)$ (见图 3). 由图 3 可以看出, 系统的地方病平衡点也是全局渐近稳定的.

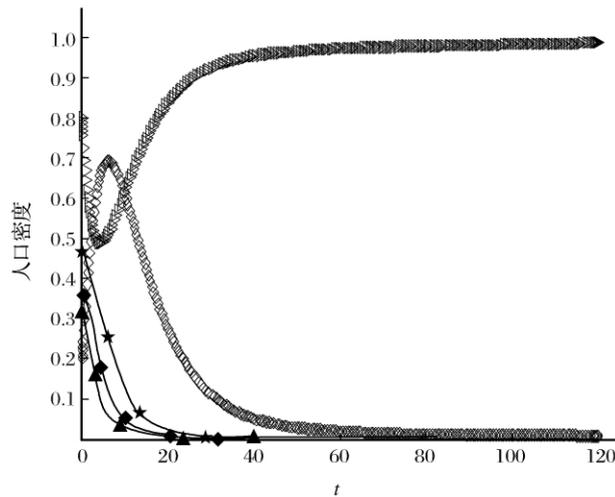
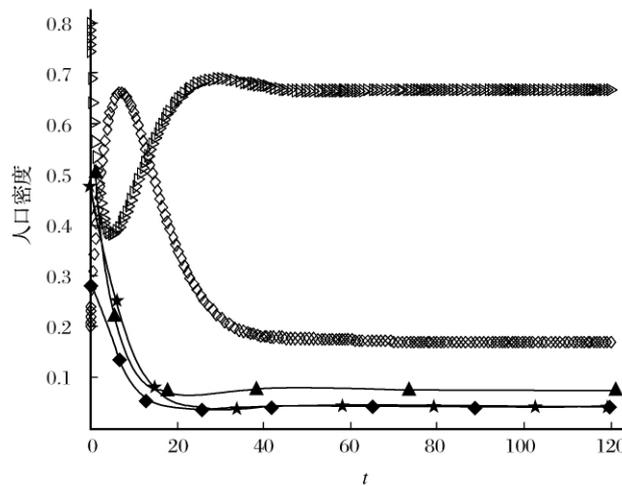


图2 无病平衡点 E_0
 $\diamond S(t)$ $\blacktriangle E(t)$ $\blacklozenge I(t)$ $\star Q(t)$ $\blacklozenge R(t)$

图3 地方病平衡点 E_0

▷ $S(t)$ ▲ $E(t)$ ◆ $I(t)$ ★ $Q(t)$ ◇ $R(t)$

3 结语

讨论了具有隔离措施且在潜伏期及染病期都有传染性的手足口病传染病模型,分析相应特征方程的特征根,得到了系统无病平衡点的局部稳定性和全局稳定性条件及地方病平衡点的局部稳定性的条件,并给出了相应的数值模拟.

致谢: 研究项目还得到教育部科学技术研究重点项目(209131)、教育部留学回国人员科研启动基金、甘肃省高校研究生导师基金(0803-01)及兰州理工大学优秀青年教师培养计划(Q200703)的资助,在此谨表感谢.

参考文献:

- [1] Kermack M D, McKendrick A G. Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics[J]. Part I. Proc Roy Soc. A. ,1927,115(5):700-721.
- [2] 张小兵, 霍海峰. 一类具有阶段结构和脉冲免疫的 SIR 传染病模型[J]. 兰州理工大学学报, 2010, 36(1): 152-157.
- [3] 向红, 孟新友, 张小兵. 连续与离散互惠模型的持续生存[J]. 甘肃科学学报, 2010, 22(1): 7-10.
- [4] 刘渊敏, 黄灿云. 环境污染下具有脉冲毒素投放的两种群竞争系统持久性[J]. 甘肃科学学报, 2011, 23(3): 139-144.
- [5] 苏细容, 刘胜. 具有年龄结构和隔离措施的手足口病 SEIQR 模型[J]. 科学技术与工程, 2010, 9(18): 311-315.
- [6] 原三领, 韩丽涛, 马知恩. 一类潜伏期和染病期均传染的流行病模型[J]. 生物数学学报, 2001, 16(4): 392-398.
- [7] 黄娜, 陈学华. 手足口病型传染病的数学模型[J]. 淮阴师范学院学报, 2008, 7(4): 267-269.
- [8] Liu J L. Threshold Dynamics for a HFMD Epidemic Model with Periodic Transmission Rate[J]. Nonlinear Dyn. , 2011, 64: 89-95.
- [9] Van Dendriessche P, Watmough J. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibrium for Compartmental Models of Disease Transmission[J]. Math. Biosci. , 2002, 180(1): 29-48.