

区间干涉模型下的非概率可靠性应用研究

刘 晓^{1,2}, 徐格宁³, 杨 萍¹

(1. 兰州理工大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 太原工业学院 机械工程系, 山西 太原 030008;
3. 太原科技大学 机电工程学院, 山西 太原 030024)

摘要: 针对可靠性分析中不确定参数的分布类型难以精确获得的情况, 采用非概率方法进行可靠性分析. 用区间模型描述不确定参数, 结合应力-强度非概率集合干涉理论, 建立了不同情况下的非概率可靠性指标, 分析了某传动轴在概率模型和区间模型下的可靠性指标以及不确定参数的离差与非概率可靠性之间的关系. 结果表明: 当传动轴外径为 50 mm 时, 二者均认为结构可靠, 外径为 48 mm 时, 概率可靠度为 0.999 803, 非概率可靠度为 0.982 110, 两种结论是一致的, 但非概率方法更保守, 同时传动轴的非概率可靠度随着不确定参数离差的增加而逐渐减低, 其中强度离差对可靠度影响最大, 扭矩离差最小. 说明增加壁厚以及减小不确定参数的离差可以提高传动轴的可靠度, 表明非概率可靠性分析方法的工程适用性.

关键词: 可靠性; 不确定参数; 区间模型; 非概率可靠性

中图分类号: TB 114.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1964(2012)04-0675-06

Application of non-probabilistic reliability based on interval interference model

LIU Xiao^{1,2}, XU Ge-ning³, YANG Ping¹

(1. School of Mechanic and Electronic Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China,
2. Department of Mechanic Engineering, Taiyuan Institute of Technology, Taiyuan, Shanxi 030008, China;
3. Electromechanical Institute, Taiyuan University of Science & Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China)

Abstract: The non-probabilistic method was proposed according to the distribution pattern of uncertain parameters inaccurately acquired from the reliability analysis. Interval model was used to describe the uncertain parameters, and based on non-probabilistic set-based stress-strength interference theory, the non-probabilistic reliability index was studied under different conditions. Meanwhile the reliability index under probabilistic model of a propeller shaft was compared with that of interval model and the changes of the non-probabilistic reliability were also observed with different deviation of the uncertain parameters. The result shows that when the outer diameter of the propeller shaft is 50 mm the structure was reliable under probabilistic model and interval model, but when the outer diameter is 48 mm the probabilistic and non-probabilistic reliabilities were 0.999 803 and 0.982 110, respectively. Therefore, conclusions were consistent under probabilistic and interval models, but the non-probabilistic method was more conservative. Meanwhile with increase of deviation for the uncertain parameters, the non-probabilistic reliability of propeller shaft gradually reduced. Therefore, the strength of deviation is the main factor affecting non-probabilistic reliability, while the torque of deviation is the

收稿日期: 2011-04-15

基金项目: “十一五”国家科技支撑计划项目(2006BAK02B04); 山西省自然科学基金项目(2008011043-1)

作者简介: 刘 晓(1976-), 男, 山西省霍州市人, 讲师, 博士研究生, 从事机械结构可靠性、机械 CAD/CAE 方面的研究.

E-mail: load_ljuxiao@163.com Tel: 13111089925

least. Consequently the reliability of propeller shaft increased with the increase of the thickness and decrease of the deviation of uncertain parameters. The method of non-probabilistic reliability analysis was feasible.

Key words: reliability; uncertain parameter; interval model; non-probabilistic reliability

工程学科中,对既有产品进行安全评估和如何设计出高质量的产品是可靠性研究的主要领域.实际工程中,由于工程材料特性的离散性以及测量、加工、制造和安装误差等因素的影响,必然有大量的不确定性存在.传统的产品分析和设计中,通常采用概率模型和模糊模型对这种不确定性进行描述,称为随机可靠性和模糊可靠性^[1-2].采用这两种方法计算可靠度和失效概率,需要精确知道不确定参数的概率密度函数或隶属度函数.由于工程实际的复杂性和统计数据的相对缺乏,使得不确定参数的分布类型难以获得或者不确定参数适合多种分布,其计算结果难以令人信服.因此有学者提出采用集合模型对该类不确定参数进行描述,称为非概率可靠性.

有关非概率可靠性的问题,由 Elishakoff 等^[3]提出,认为当对不确定信息掌握的信息较少时,宜采用集合模型进行描述, Ben-Haim 在 1994 年基于凸集理论首次提出了非概率可靠性的概念^[4-5],认为系统能容许不确定参量在一定范围内波动,则系统是可靠的. Elishakoff 在此基础上提出非概率可靠性同不确定参量一样,属于某一区间,提出可靠性指标是一区间而非具体量值,区间的边界是根据传统的安全因子法进行区间运算而求得^[6].文献[7-8]通过区间模型表示结构不确定参数,运用区间算法,提出按无穷大范数度量坐标原点到失效面的最短距离作为结构非概率可靠性的度量指标.并应用该理论进行了结构的非概率可靠性优化设计和结构系统的非概率可靠性分析.文献[9]结合该理论对叶片振动的非概率可靠性进行了分析.以上的非概率可靠性研究均建立在结构绝对安全和绝对失效的基础上,即结构应力集合和强度集合完全相离条件下的非概率可靠性.文献[10]在区间模型基础上对应力集合和强度集合干涉条件下的非概率可靠性进行了研究,提出以结构安全域的体积与基本区间变量域的总容积之比作为结构非概率集合可靠性的度量.文献[11]基于容差分析,提出了一种新的应力-强度干涉模型下的非概率可靠性指标的度量方法.

本文采用区间模型描述某机械传动轴的不确定参数,结合应力-强度非概率集合干涉理论,建立

了不同情况下的非概率可靠性指标,对比分析了传动轴在概率模型和区间模型下承受扭矩和弯矩复合作用的可靠性指标,说明两种分析获得的结果是一致的,同时对不同离差情况下传动轴的非概率可靠性指标的变化情况进行了研究分析,表明本文所提方法的工程适用性.

1 区间变量及其运算法则

设某不确定参数 x 为区间变量,则 x 可表示为 $x \in X^I = [\underline{x}, \bar{x}]$,其中 \bar{x} 和 \underline{x} 分别为区间的上下界,根据区间算法,有

$$x^c = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2}; x^r = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2}, \quad (1)$$

式中: x^c 为 x 的均值, x^r 为 x 离差或区间半径.

则区间 X^I 和区间变量 x 可分别表示为

$$X^I = x^c + x^r \Delta^I, x = x^c + x^r \delta, \quad (2)$$

式中: $\Delta^I = [-1, 1]$ 为标准化区间; $\delta \in \Delta^I = [-1, 1]$ 为标准化区间变量.

对于任意两个区间变量 $x \in X^I = [\underline{x}, \bar{x}]$, $y \in Y^I = [\underline{y}, \bar{y}]$, 其四则运算定义为

$$X^I + Y^I = [\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]. \quad (3)$$

$$X^I - Y^I = [\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} X^I \times Y^I &= [\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{y}, \bar{y}] = \\ &[\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \\ &\max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}]. \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^I / Y^I &= [\underline{x}, \bar{x}] / [\underline{y}, \bar{y}] = \\ &[\underline{x}, \bar{x}] \times [1/\bar{y}, 1/\underline{y}]. \quad (6) \end{aligned}$$

2 区间模型下非概率可靠性指标

设结构的不确定参数为区间变量,向量 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示与结构有关的区间变量的参数集合, $x_i \in X_i^I = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 结合可靠性理论中功能函数的定义方法,设结构的功能函数为

$$M = G(\mathbf{X}) = G(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7)$$

根据区间算法可知,当 $G(\mathbf{X})$ 为 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的连续函数时, M 为一区间变量,即 $M \in M^I = [\underline{M}, \bar{M}]$, 其均值 M^c 和离差 M^r 分别为

$$M^c = \frac{\bar{M} + \underline{M}}{2}, M^r = \frac{\bar{M} - \underline{M}}{2}, \quad (8)$$

令

$$\eta = \frac{M^c}{M^r} \quad (9)$$

根据可靠性理论, 超曲面 $G(\mathbf{X}) = 0$ 称为失效面, 将结构的基本参量空间分为失效域 ($G(\mathbf{X}) < 0$) 和安全域 ($G(\mathbf{X}) > 0$). 进一步分析可知, 当 $\eta > 1$ 时, 则对 $\forall x_i \in X_i^1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 均有 $G(\mathbf{X}) > 0$, 结构可靠, 如图 1a 所示; 当 $\eta < -1$ 时, 则对 $\forall x_i \in X_i^1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 均有 $G(\mathbf{X}) < 0$, 结构失效, 如图 1b 所示; 当 $-1 \leq \eta \leq 1$ 时, 对 $\forall x_i \in X_i^1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 存在 $G(\mathbf{X}) < 0$ 和 $G(\mathbf{X}) > 0$ 两种情况, 结构介于失效与可靠之间, 如图 1c 所示, 对此文献 [7] 认为“由于区间变量属于确定性区间, 在区间内取任何值的可能性均存在, 从严格意义上讲, 此时不能认为结构是可靠的”. 因此该定义下的“可靠”指“在最坏情形也不失效的结构才可靠”, 即追求结构的绝对安全, 按照该理论指导设计必然使结构的成本和造价大大上升, 有必要对结构介于失效与可靠之间的状态进行进一步研究.

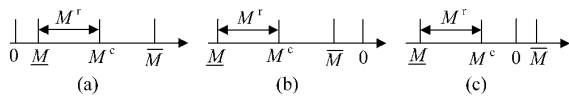


图 1 η 的意义
Fig. 1 Meaning of η

以 $R-S$ 模型为例, 设向量 $S(s_1, s_2, \dots, s_m)$ 和 $R(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 分别为与应力和强度相关的不确定参数集合, 其中 $r_i \in r_i^1 = [r_i^-, r_i^+]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $s_i \in s_i^1 = [s_i^-, s_i^+]$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 则结构的应力集合 S 和强度集合 R 均为区间变量, 即 $S \in S^1 = [S^-, \bar{S}]$, $R \in R^1 = [R^-, \bar{R}]$, 其上下界可通过区间算法获得.

设结构的功能函数为 $M = R - S$, 则非概率可靠性指标 η 可表示为

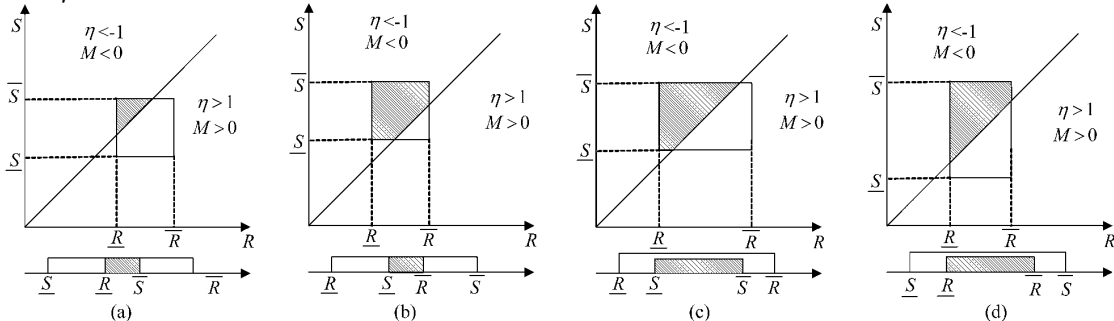


图 3 $R-S$ 干涉模型

Fig. 3 $R-S$ interference model

对于该类情况, 文献 [14] 提出以结构安全域的体积与基本区间变量域的总体积之比作为结构非概率集合可靠性的度量, 对于 $R-S$ 模型采用二者

$$\eta = \frac{M^c}{M^r} = \frac{\bar{R} + R - \bar{S} - S}{R - R + \bar{S} - S} = 1 + \frac{2(R - \bar{S})}{\bar{R} - R + \bar{S} - S} \quad (10)$$

或

$$\eta = \frac{M^c}{M^r} = -1 + \frac{2(\bar{R} - S)}{\bar{R} - R + \bar{S} - S} \quad (11)$$

分析式 (10), (11) 可知, 可等到如下结论:

1) 若 $\bar{S} < \underline{R}$, 则 $\eta > 1$, 结构完全可靠, 如图 2a 所示, 其中阴影部分表示结构的基本变量可行域, 其完全位于可靠域内, 结构完全可靠.

若 $\bar{R} < \underline{S}$, 则 $\eta < -1$, 结构完全失效, 如图 2b 所示, 其中阴影部分表示结构的基本变量可行域, 其完全位于失效域内, 结构完全失效.

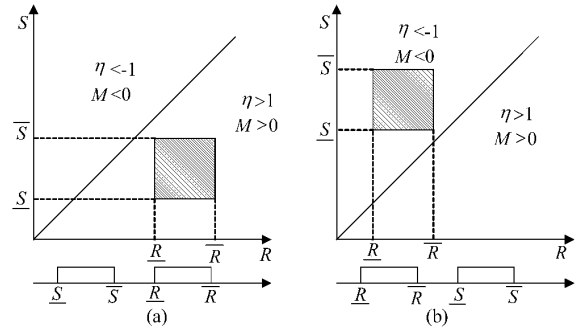


图 2 $R-S$ 不相交模型

Fig. 2 $R-S$ disjoint model

以上两种情形下应力集合 S 和强度集合 R 均处于相离状态.

2) 若 $\underline{R} < \bar{S}$ 且 $\underline{S} < \bar{R}$, 则 $-1 \leq \eta \leq 1$, 结构失效与否难以界定, 如图 3 所示, 其中二维图中阴影部分表示失效区域, 结构存在部分失效与部分可靠. 一维图中阴影部分表示干涉部分, 当结构应力集合 S 和强度集合 R 均处于该区域时, 结构失效与否难以界定.

的面积之比: $\eta(M > 0) = \frac{S_{\text{安全域}}}{S_{\text{总}}}$. 在假设结构应力集合 S 和强度集合 R 在已知区间上服从均匀分布的随机变量的情况下, 证明了非概率集合可靠性和

概率集合可靠性的相容性. 根据该理论, 可得到图 3 所示的 4 种干涉情况下的非概率可靠性度量指标, 即

当 $\underline{S} < \underline{R} < \bar{S} < \bar{R}$ 时,

$$\eta(M > 0) = 1 - \frac{(\bar{S} - \underline{R})^2}{2(\bar{R} - \underline{R})(\bar{S} - \underline{S})}. \quad (12)$$

当 $\underline{R} < \underline{S} < \bar{R} < \bar{S}$ 时,

$$\eta(M > 0) = \frac{(\bar{R} - \underline{S})^2}{2(\bar{R} - \underline{R})(\bar{S} - \underline{S})}. \quad (13)$$

当 $\underline{R} < \underline{S} < \bar{S} < \bar{R}$ 时,

$$\eta(M > 0) = \frac{(\bar{R} - \bar{S})}{(\bar{R} - \underline{R})} + \frac{(\bar{S} - \underline{S})}{2(\bar{R} - \underline{R})}. \quad (14)$$

当 $\underline{S} < \underline{R} < \bar{R} < \bar{S}$ 时,

$$\eta(M > 0) = \frac{(\underline{R} - \underline{S})}{(\bar{S} - \underline{S})} + \frac{(\bar{R} - \underline{R})}{2(\bar{S} - \underline{S})}. \quad (15)$$

3 传动轴的非概率可靠性分析

以某机械设备的传动轴为例, 其承受的弯矩 M 的变化区间为 $[245, 455] \text{ N} \cdot \text{m}$, 扭矩 T 的变化区间为 $[229.5, 310.5] \text{ N} \cdot \text{m}$, 刀轴强度 r 的变化区间为 $[85, 145] \text{ MPa}$, 受力图如图 4 所示. 分析传动轴直径 $D=50 \text{ mm}$, $d=40 \text{ mm}$ 和 $D=48 \text{ mm}$, $d=40 \text{ mm}$ 时的可靠性.

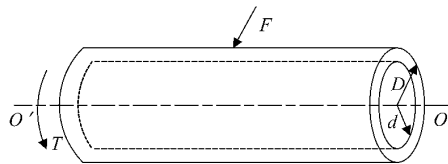


图 4 传动轴力学模型

Fig. 4 Mechanical model of propeller shaft

根据力学分析可知, 其所受的弯曲应力和扭转

应力分别为

$$\sigma = \frac{32MD}{\pi(D^4 - d^4)}, \quad \tau = \frac{16TD}{\pi(D^4 - d^4)}, \quad (16)$$

式中: M, T 为传动轴所受的弯矩和扭矩, $\text{N} \cdot \text{m}$; D, d 为传动轴截面的外径和内径, mm .

根据第四强度理论, 可知传动轴危险截面处的合成应力 s 为

$$s = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{32D}{\pi(D^4 - d^4)} \sqrt{M^2 + 0.75T^2}. \quad (17)$$

功能函数可表示为

$$M = r - s, \quad (18)$$

式中 r 为传动轴材料的强度, MPa .

由功能函数可知, 影响传动轴性能的不确定参数集合为 $X = (r, M, T, D, d)^T$, 表 1 为概率可靠性与非概率可靠性的分析结果, 采用概率可靠性分析时, 假设不确定参数相互独立服从正态分布, 其特征参数采用“ 3σ ”法则求得, 其中 $\mu_M = 350 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\sigma_M = 35 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\mu_T = 270 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\sigma_T = 13.5 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\mu_r = 115 \text{ MPa}$, $\sigma_r = 10 \text{ MPa}$.

从表 1 可以看出, 当 $D=50 \text{ mm}$, $d=40 \text{ mm}$, 应力区间上限小于强度区间下限, 二者相离, 结构完全可靠, 概率可靠度为 0.999 999, 可以认为结构可靠. 当 $D=48 \text{ mm}$, $d=40 \text{ mm}$, 应力区间与强度区间发生干涉, 采用应力-强度干涉条件下的非概率可靠性理论, 传动轴的非概率可靠度为 0.982 110, 概率可靠度为 0.999 803. 对比分析不难发现, 采用非概率可靠性理论求的传动轴的可靠度较概率方法求的结果保守, 其主要原因是在不确定参数的概率分布类型不能精确获得, 而其变化区间容易确定的条件下, 假设其在变化区间内服从均匀分布时对其可靠性的一种度量.

表 1 不同设计参数时传动轴可靠度

Table 1 Reliability of transmission shaft in different designs

内外径 $D, d/\text{mm}$	应力区间 s^I/MPa	强度区间 r^I/MPa	可靠度指标 β	概率可靠度	非概率可靠度
$D=50, d=40$	[43.5427, 72.9465]	[85, 145]	5.262 184	0.999 999	1.000 000
$D=48, d=40$	[56.1217, 94.0199]	[85, 145]	3.544 316	0.999 803	0.982 110

图 5 为传动轴在概率模型和区间模型下可靠度随外径变化的曲线. 从图 5 中可以看出, 传动轴的可靠度随着外径的增大而增大, 原因主要是在内径不变情况下, 外径增大使得传动轴的壁厚增加, 可以承受更大的弯矩和扭矩, 使得结构更加可靠. 另外, 从图中还可以看出, 当传动轴的外径相同时, 区间模型下获得的可靠度较概率模型下的结果保守.

图 6 为传动轴弯矩均值不变, 不同离差下的非

概率可靠度变化曲线. 从图中可以看出, 在相同的内外径下, 随着弯矩离差的增大, 传动轴的可靠度逐渐减小. 其主要原因是弯矩离差的增大, 其不确定程度增大, 传动轴的应力区间强度区间干涉程度增加, 致使传动轴的可靠性减低. 另外, 从图 6 中还可以看出, 在相同的离差下, 随着传动轴外径的减小, 结构的壁厚逐渐减小, 从而使得传动轴的可靠性依次减低.

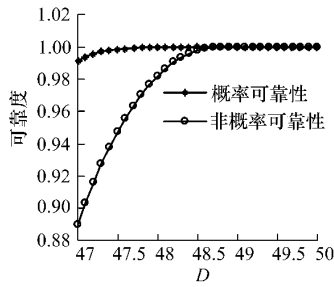


图 5 可靠性变化曲线
Fig. 5 Curve of reliability

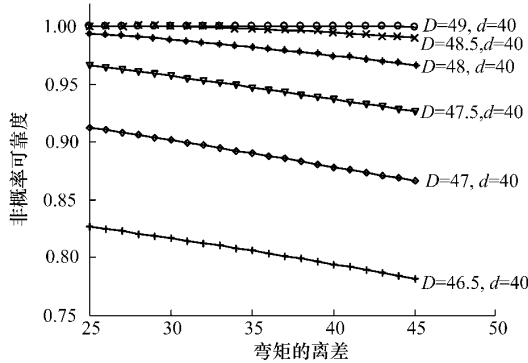


图 6 不同弯矩离差下的非概率可靠度
Fig. 6 Curve of non-probabilistic reliability versus deviation of bending moments

图 7 为传动轴扭矩均值不变,不同离差下的非概率可靠度变化曲线.从图 7 中可以看出,在相同内外径和相同离差情况下,结构的非概率可靠度的变化情况与弯矩在不同离差时的变化一样,均随离差的增大和外径尺寸的减小,但变化范围较弯矩离差变化时小.

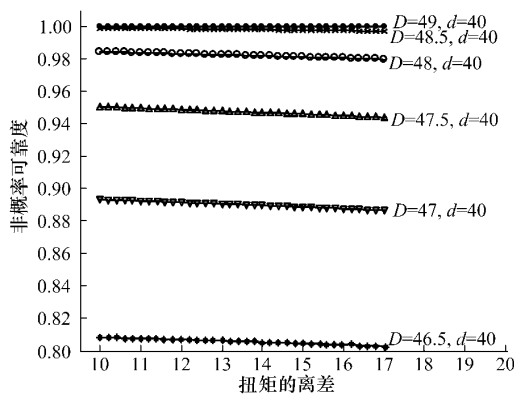


图 7 不同扭矩离差下的非概率可靠度
Fig. 7 Curve of non-probabilistic reliability versus deviation of torque

图 8 为传动轴强度均值不变,不同离差下的非概率可靠度的变化曲线,从图 8 中可以看出,在相同内外径和相同离差情况下,结构的非概率可靠度的变化情况与弯矩和扭矩在不同离差时的变化一样,均随离差的增大和外径尺寸的减小,传动轴的非概率可靠度逐渐减小,但在相同的内外径尺寸下,变化范围较弯矩和扭矩离差变化时明显.

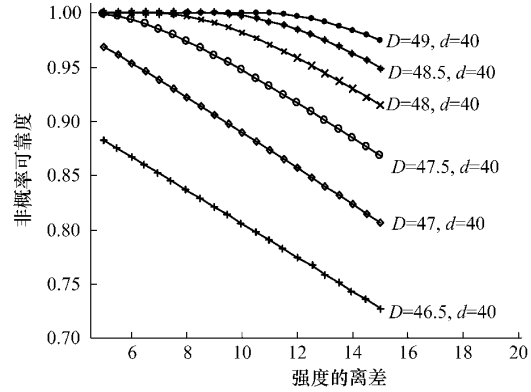


图 8 不同强度离差下的非概率可靠度
Fig. 8 Curve of non-probabilistic reliability versus deviation of strength

综上所述,当传动轴的不确定参数的均值不变时,非概率可靠度均随着不确定参数的离差的增大而减小.结合传统的概率可靠性分析,可靠度为功能函数的均值和标准差之比,当均值减小或标准差增大时,均使可靠度减小.而在非概率可靠性分析中,结构的离差可通过“ 3σ ”法来获得,因此标准差的增大将使得结构的不确定参数的不确定程度增加,从而使得结构的非概率可靠度减小,这与传统的概率可靠性的结论是一致的.

4 结 论

1) 采用区间模型描述不确定参数,结合应力-强度非概率集合干涉理论,采用结构安全域的体积与基本区间变量域的总体积之比作为结构的非概率可靠性度量指标,得到了不同情况下的非概率可靠性指标.

2) 对比分析了传动轴在概率模型和区间模型下的可靠度,结果表明相同内径下,当传动轴外径为 50 mm 时,二者均认为结构可靠,外径为 48 mm 时,概率可靠度为 0.999 803,非概率可靠度为 0.982 110,两种结论是一致的,但非概率方法更保守,是不确定参数分布类型不能精确获得条件下进行可靠性分析的一种新方法.

3) 在传动轴的扭矩、弯矩和强度均值保持不变时,对不同离差下的非概率可靠性的变化情况进行了分析,发现随着离差的增大,传动轴的可靠性逐渐减小,其中强度离差对可靠性的影响最大,扭矩离差最小.分析结果同时还表明离差相同时,随着传动轴外径的减小,可靠性逐渐降低.

参考文献:

[1] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用[M]. 大连:大连理工大学出版社,1996.

- [2] 张义民. 机械可靠性设计的内涵与递进[J]. 机械工程学报, 2010, 14(7): 167-188.
ZHANG Yi-min. Connotation and development of mechanical reliability-based design [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 14(7):167-168.
- [3] ELISHAKOFF I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures; from AM freudenthal's criticisms to modern convex modeling [J]. Computers & Structures, 1995, 56(6): 871-895.
- [4] BEN-HAIM Y. A non-probabilistic concept of reliability [J]. Structural Safety, 1994,14(4): 227-245.
- [5] BEN-HAIM Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models[J]. Structural Safety, 1995, 17(2): 91-109.
- [6] ELISHAKOFF I. Discussion on a non-probabilistic concept for reliability [J]. Structure Safety, 1995, 17(3): 195-199.
- [7] 郭书祥, 吕震宙, 冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报, 2001, 18(1): 56-60.
GUO Shu-xiang, LV Zhen-zhou, FENG Yuan-sheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(1): 56-60.
- [8] 郭书祥, 吕震宙. 基于非概率模型的结构可靠性优化设计[J]. 计算力学学报, 2002, 19(2): 198-201.
GUO Shu-xiang, LV Zhen-zhou. Optimization of uncertain structures based on non-probabilistic reliability[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(2): 98-201.
- [9] 徐可君, 江龙平, 陈景亮, 等. 叶片振动的非概率可靠性研究[J]. 机械工程学报, 2002, 10(10): 17-19.
XU Ke-jun, JIANG Long-ping, CHEN Jing-liang, et al. Non-probability research on vibration of blades [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2002, 10(10):17-19.
- [10] 王晓军, 邱志平, 武哲. 结构非概率集合可靠性模型[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 641-646.
WANG Xiao-jun, QIU Zhi-ping, WU Zhe. Non-probabilistic set-based model for structural reliability[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(5): 641-646.
- [11] 洪东跑, 马小兵, 赵宇, 等. 基于容差分析的结构非概率可靠性模型[J]. 机械工程学报, 2010, 4(2): 157-162.
HONG Dong-pao, MA Xiao-bing, ZHAO Yu, et al. Non-probabilistic model for structural reliability based on tolerance analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 4(2): 157-162.
- [12] 邱志平. 非概率集合理论凸方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.

(责任编辑 姚志昌)