

V 型滚轮导轨的 Hertz 接触建模和刚度求解 *

刘子焯¹, 张力¹, 陈昌安²

(1. 兰州理工大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730050;
2. 亚龙智能装备集团股份有限公司, 浙江 温州 325100)

摘要: V 型滚轮导轨是一种新型传动导轨系统, 对导轨系统进行理论建模可以有效分析导轨参数对导轨力学性能的影响。文中通过 Hertz 接触理论对滚轮导轨系统建立接触力学模型, 然后推导滚轮导轨在受到垂直载荷、水平载荷时与位移的关系, 并计算其刚度。在 Abaqus 中进行仿真和计算刚度数值, 对比两者结果。进一步推导在有预紧力的情况下, 滚轮导轨的刚度模型。然后比较在外载荷的作用下, 有无预紧力对刚度的影响。得出无预紧力时, 滚轮导轨初始刚度很低, 且刚度随着载荷增大, 会急速增长, 使得导轨变形很大。有预紧力时, 滚轮导轨的初始刚度较大, 且刚度随着载荷增大, 增长平缓, 使得导轨更稳。

关键词: V 型滚轮导轨; Hertz 接触理论; 建模; 刚度求解; 预紧力分析

中图分类号: TH132 文献标识码: A 文章编号: 1001-2354(2020)07-0024-06

DOI: 10.13841/j.cnki.jxsj.2020.07.005

Stiffness modeling and solving of V-typed roller guides based on the Hertz contact theory

LIU Zi-xuan¹, ZHANG Li¹, CHEN Chang-an²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050;
2. Yalong Intelligent Equipment Group Company, Wenzhou 325100)

Abstract: V-typed Roller Guide is a new type of transmission guide system. By means of the theoretical modeling of the guide system, the influence of the parameters exerted on the mechanical performance is analyzed effectively. In this article, the contact-mechanical model of the guide system is worked out by the Hertz contact theory; the relationship between the roller guide and its displacement with both the vertical load and the radial load is derived, and its stiffness is calculated. A series of stiffness values are simulated and calculated with the aid of Abaqus, in order to verify whether the formula is reliable and further work out the stiffness model of the roller guide in the case of preload. Then, the effect of the preload exerted on the stiffness with the external load is compared. When there is no preload, the initial stiffness of the roller guide is minor, and the stiffness increases rapidly with the ever-growing load, which makes the guide deform significantly. When there is preload, the initial stiffness of the roller guide is large, and the stiffness increases slowly with the ever-growing load, which makes the guide more stable.

Key words: V-typed roller guide; Hertz contact theory; modeling; stiffness solving; re-tightening force analysis

随着自动化生产线的规模日益增大, 以往的皮带传输线呈现出不能实现精确定位和刚性不够的缺点。V 型滚轮导轨具有线速度高、安装基准精度要求低、预紧随时可调等优点, 配合工业机器人在循环运动系统应用上体现出了巨大的优势。图 1 为 V 型滚轮导轨的结构图, 主要由 V 型导轨、V 型滚轮、承载滑座等组成, 其中 V 型角呈 70°, 而 V 槽结构的滚轮可以在运行过程中具有自然的扫净作用, 往往可以排除碎屑。在实

际应用中, 滚轮导轨的刚度、额定静载荷分别影响到滚轮导轨的精度和承载能力。

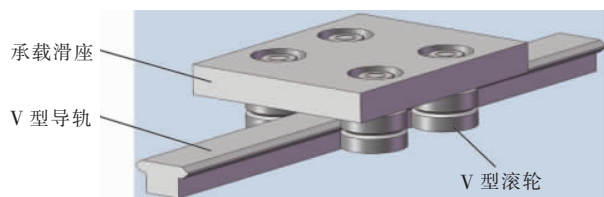


图 1 V 型滚轮导轨结构示意图

* 收稿日期: 2019-06-06; 修订日期: 2020-01-08

虽然关于滚轮导轨的研究资料很少,但因为其滚动的特性,可以参考滚珠导轨和滚柱导轨的相关研究。主要采用 Hertz 接触理论分析滚动导轨的静力学^[1]。

V 型滚轮和 V 型导轨的接触属于线接触,这根线和滚轮的中心轴线斜交,绕着中心轴线高速转动,因而可以看作 Hertz 接触。文中基于 Hertz 接触理论推导了单个滚轮和导轨间的接触表达式,然后对滚轮导轨在其受到垂直载荷、水平载荷时的刚度进行建模计算,并与通过有限元软件仿真的结果进行对比论证,进一步分析了外载荷和预紧力对滚轮导轨刚度的影响。

1 单个 V 型滚轮的 Hertz 接触模型

只考虑 V 型滚轮和 V 型导轨之间的法向力接触,通过经典的 Hertz 弹性接触理论进行计算。当两个半径为 R 的圆柱体的轴都平行于坐标系中的 y 轴,然后由单位长度上的力 p 压紧而接触时,两个圆柱体之间发生接触变形,形成一个平行于 y 轴、宽度为 $2a$ 、接触长度为 l 的矩形接触面,根据 Hertz 接触理论可以得出^[2]:

$$a^2 = \frac{4pR}{\pi E^*}$$

$$p(x) = \frac{2p}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$\text{式中: } \frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2};$$

E_1, E_2 ——两个物体的弹性模量;

ν_1, ν_2 ——两个物体的泊松比。

应力在接触区边缘降为零,由于表面应力沿 x 轴呈椭圆分布,应力在 $x=0$ 时最大^[3]:

$$p_0 = \frac{2p}{\pi a} = \left(\frac{pE^*}{\pi l R} \right)^{1/2}$$

对于圆柱体和平面的二维接触,可以看作是曲率半径为 R 和曲率半径无穷大的 2 个轴线平行的圆柱体之间的接触。当圆柱体为有限长时,圆柱和平面间的相对趋近量不适合直接用 Hertz 理论求解。当接触压力沿轴向长度均匀分布时,Lundberg 分析了两个圆柱体间的相互趋近量(滚轮的弹性变形量)^[4]:

$$\delta = \frac{2Q}{\pi l E^*} [1.886 + \ln(l/a)]$$

式中: Q ——滚轮和导轨之间的接触法向力, N。

但工程应用时,由于圆柱体沿轴向方向受力情况

复杂,因此采用 Palmgren 通过试验得出的经验公式^[4]:

$$\delta = 3.81 \left[\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \right]^{0.9} \frac{Q^{0.9}}{l^{0.8}} \quad (1)$$

滚轮和导轨均采用轴承钢材料,材料弹性模量 $E=206$ GPa,泊松比 $\nu=0.3$,代入式(1)可得:

$$\delta = 3.85 \times 10^{-5} \frac{Q^{0.9}}{l^{0.8}} \quad (2)$$

即: $Q = (3.85 \times 10^{-5})^{-10/9} \delta^{10/9} l^{8/9}$

所以式(2)可简化表达为:

$$Q = k \delta^{10/9} \quad (3)$$

式中: k ——类刚度系数,描述导轨受到接触力 Q 与变形 δ 之间的关系。

进一步,导轨接触刚度可表示为^[5]:

$$K_n = \frac{dQ}{d\delta} = \frac{10}{9} k \delta^{1/9} = \frac{10}{9} k^{1/10} Q^{9/10} \quad (4)$$

从式(2)可以看出,滚轮和导轨的相对趋近量与滚轮的半径无关,只与滚轮的接触长度和受到的法向力有关。从式(4)中可以看出,滚轮的法向接触刚度同变形和法向接触力密切相关。

2 V 型滚轮导轨的 Hertz 接触模型

2.1 V 型滚轮导轨的刚度模型建立

V 型滚轮导轨的主要载荷有两个方向,如图 2 所示,刚度按其承受载荷方向分为受垂直载荷 F_z 时刚度和受水平载荷 F_y 时刚度。

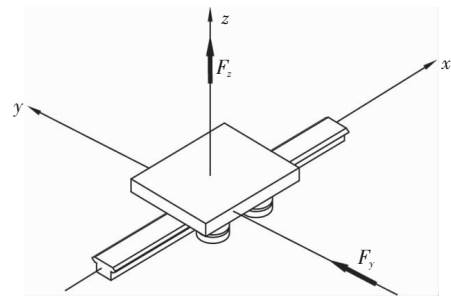


图2 导轨副坐标系

施加 F_z 垂直载荷时,滚轮导轨承受向下垂直载荷,此时只有滚轮的上表面与导轨接触,接触角为 α ,其受力如图 3 所示。

设滑座向下位移为 δ_n ,则:

$$Q = F_z / (4 \cos \alpha) \quad (5)$$

$$\delta_n = \frac{\delta}{\cos \alpha}$$

由式(2)和式(5)可得滑座向下位移为 δ_n 时每个

滚轮表面受的法向力大小为:

$$Q=(3.85 \times 10^{-5})^{-109} \delta_n^{109} (\cos \alpha)^{199} l^{89} \quad (6)$$

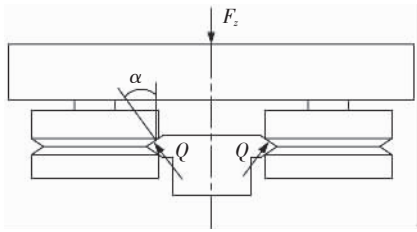


图 3 F_z 载荷时受力分析

由式(5)和式(6)可得^[6]:

$$F_z=4Q \cos \alpha=3.21 \times 10^5 \times \delta_n^{109} (\cos \alpha)^{199} l^{89} \quad (7)$$

施加 F_y 水平载荷时,滚轮导轨承受向左的水平载荷,此时只有右边的滚轮受力,接触角为 α ,其受力如图 4 所示。

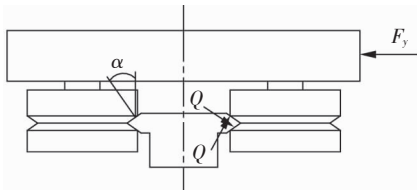


图 4 施加 F_y 载荷时滚轮导轨受力分析

设滑座向左位移为 δ_v ,则:

$$Q=F_y/(4 \sin \alpha) \quad (8)$$

$$\delta_v=\frac{\delta}{\sin \alpha}$$

由式(2)和式(8)可得滑座向左位移为 δ_v 时每个滚轮表面受的法向力大小为:

$$Q=(3.85 \times 10^{-5})^{-109} \delta_v^{109} (\sin \alpha)^{199} l^{89} \quad (9)$$

由式(8)和式(9)可得受水平载荷时滚轮导轨的刚度计算公式:

$$F_y=4Q \sin \alpha=3.21 \times 10^5 \times \delta_v^{109} (\sin \alpha)^{199} l^{89} \quad (10)$$

2.2 单个 V 型滚轮的接触刚度求解

查阅导轨说明书可得表 1 所示尺寸数据。

表 1 V 型滚轮导轨参数表

导轨参数	接触面长度 l/mm	接触角 $\alpha/(\text{°})$	预紧力/N
尺寸	2.89	35	200

把导轨参数代入式(3)可得,类刚度系数 $k=2.06 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-109}$,由此可得接触变形和接触载荷、法向接触刚度之间的函数关系,如图 5 和图 6 所示。

由图 5 和图 6 可以看出,变形和载荷之间呈近似线性关系。滚轮和导轨之间的接触刚度不是常值,在接触变形很小时,接触刚度的增幅很大,当接触变形增大时,接触刚度的增幅在逐渐减小。

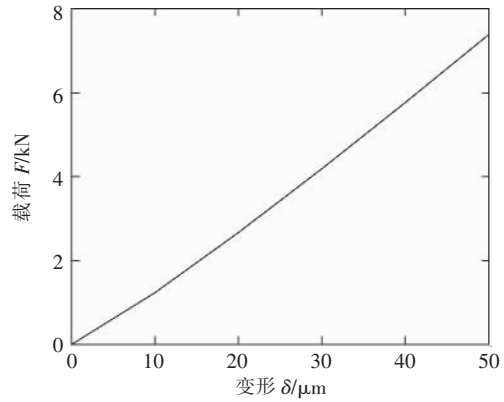


图 5 单个 V 型滚轮法向接触载荷同变形关系图

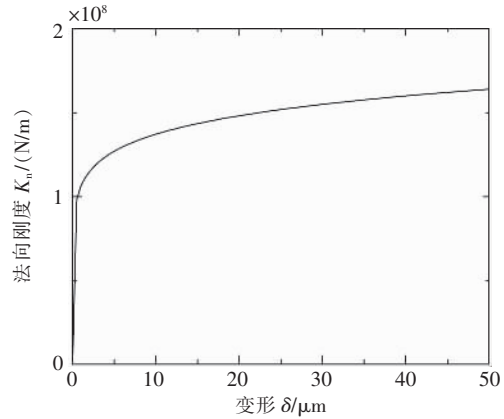


图 6 单个 V 型滚轮法向接触刚度同变形关系图

3 V 型滚轮导轨的有限元分析

建立 V 型滚轮导轨三维模型。采用 Abaqus 有限元分析软件,分析滚轮导轨在静载荷作用下的形变量。整体划分为 365 055 个网格,网格划分如图 7 所示。

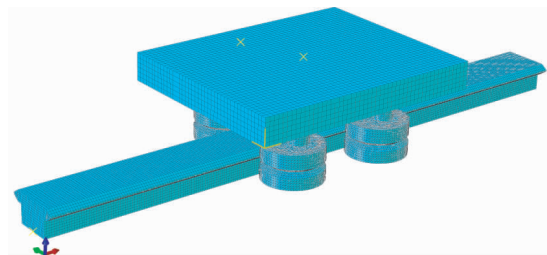


图 7 滚轮导轨网格划分图

为了获得更好的接触变形情况,采用施力点和受方面连续耦合的方式分别在垂直和水平方向进行加载,并对 V 型滚轮导轨的底面施加全约束。由于在使用过程中,导轨相比滚轮具有更高的刚度,所以通过在仿真中把导轨刚体化处理,可以简化计算量。施加的垂直和水平载荷 250~2 000 N,得到如表 2 所示垂直和水平变形量数据。

表 2 垂直载荷测量点的变形量

形变量	施加载荷/N							
	250	500	750	1 000	1 250	1 500	1 750	2 000
垂直/mm	2.10×10^{-3}	3.13×10^{-3}	4.12×10^{-3}	5.12×10^{-3}	6.13×10^{-3}	7.14×10^{-3}	8.14×10^{-3}	9.18×10^{-3}
水平/mm	2.21×10^{-3}	3.98×10^{-3}	5.81×10^{-3}	7.64×10^{-3}	9.45×10^{-3}	1.13×10^{-2}	1.31×10^{-2}	1.48×10^{-2}

通过求解得到滚轮导轨在受到垂直和水平载荷作用下的应力云图^[7],如图 8 和图 9 所示。

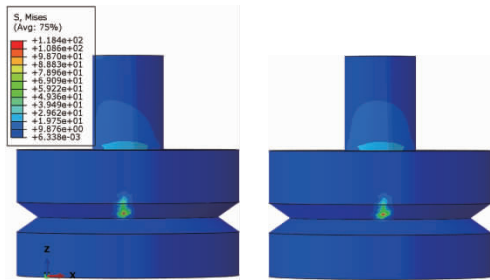


图 8 垂直载荷应力图

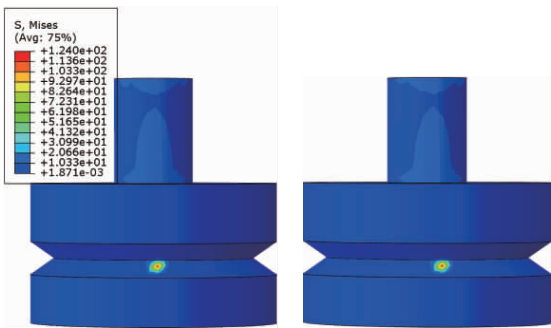


图 9 水平载荷应力图

由表 2 和式(7)数据绘制图 10,由表 2 和式(10)数据绘制图 11。分析可知,垂直载荷时的刚度曲线有一定的误差,而水平载荷时的刚度曲线能较好反应仿真情况。随着外载荷的增大,仿真和理论的误差会逐渐增大,考虑到理论模型公式中 δ 的近似处理,刚度模型可以满足后面对滚轮导轨的动力学研究。

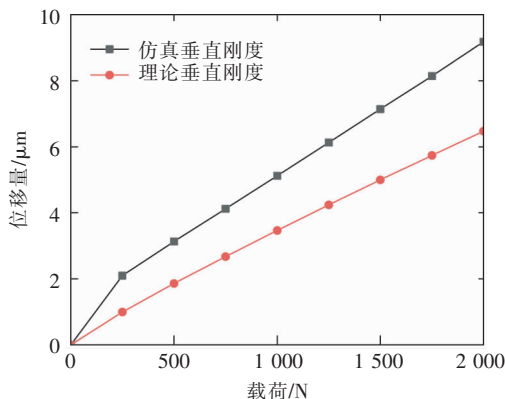


图 10 垂直载荷时刚度曲线图

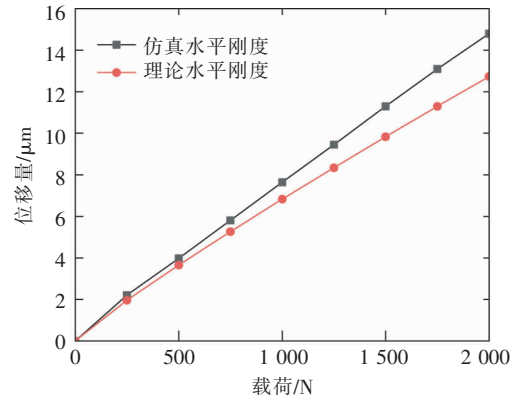


图 11 水平载荷时刚度曲线图

4 预紧力下的 V 型滚轮导轨的接触刚度求解

4.1 垂直外载荷下的刚度求解

当导轨承受垂直向下的载荷时,如图 12 所示,由于预紧力的作用,使得 4 个滚轮都承受载荷,滚轮和导轨都会有一个初始的变形量。滚轮上端面和导轨的接触压力用 P_U 表示,下端面滚轮和导轨的接触压力用 P_D 表示。 Z_1 和 Z_2 分别为滑座和导轨的重心位置, P_H 为导轨所受的垂直载荷, α 为接触角。

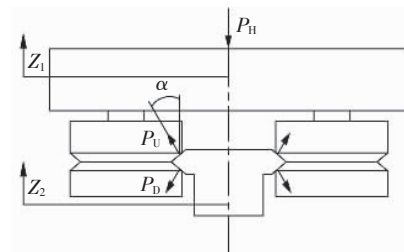


图 12 垂直力下的滚轮导轨整体接触模型

如果各滚轮在外载荷的作用下始终处于受压状态,可得:

$$P_H + 4P_D \cos \alpha = 4P_U \cos \alpha \quad (11)$$

在垂直载荷 P_H 的作用下,导轨发生的相对变形用 ΔZ 来表示:

$$\Delta Z = Z_1 - Z_2 \quad (12)$$

由式(3)可得,单个滚轮和导轨的接触压力应满足:

$$\begin{aligned} P_U &= k\delta_U^{q/0} \\ P_D &= k\delta_D^{q/0} \end{aligned} \quad (13)$$

式中: δ_U, δ_D ——单个滚轮在接触压力 P_U 和 P_D 作用下产生的弹性变形量。

由于滚轮的上下两个接触面的受力状态相同,则

相对应的变形也相同。同时,预紧力 P_0 和预紧力产生的初始变形 δ_0 满足式 (3),即:

$$P_0 = k\delta_0^{10/9} \quad (14)$$

假设所有滚轮的初始变形量都为 δ_0 ,那么在载荷 P_H 的作用下,有:

$$(\delta_U - \delta_0)\cos\alpha = (\delta_0 - \delta_D)\cos\alpha = \Delta Z \quad (15)$$

把式(13)和式(14)代入式(15)可得:

$$P_U^{10/9} = 2P_0^{10/9} - P_D^{10/9} \quad (16)$$

将式(11)代入式(15)消去 P_D 得:

$$P_U^{10/9} = 2P_0^{10/9} - \left(\frac{4P_U \cos\alpha - P_H}{4\cos\alpha}\right)^{9/10} \quad (17)$$

$$\text{即: } P_U = \left[2P_0^{10/9} - \left(\frac{4P_U \cos\alpha - P_H}{4\cos\alpha}\right)^{9/10}\right]^{10/9}$$

建立滚论上端面所受的压力 P_U 和载荷 P_H 、预紧力 P_0 之间的函数关系,即:

$$P_U = f(P_H, P_0) \quad (18)$$

把式(18)代入到式(13)和式(15)可得:

$$\left[\frac{f(P_H, P_0)^{9/10} - P_0^{9/10}}{k^{9/10}}\right]\cos\alpha = \Delta Z \quad (19)$$

然后两边对 ΔZ 求导数,则获得导轨的垂直接触刚度公式:

$$K = \frac{40}{9} f^{1/10}(P_H, P_0) k^{9/10} \left[1 + \left(1 - \frac{P_H}{4f(P, P_0)\cos\alpha}\right)^{1/10}\right] \quad (20)$$

同样把式(11)代入式(16),消去 P_U ,可得:

$$\left(\frac{P_H + 4P_D \cos\alpha}{4\cos\alpha}\right)^{9/10} = 2P_0^{10/9} - P_D^{10/9} \quad (21)$$

随着载荷 P_H 的逐渐增大,滚轮和导轨的下接触面所受的压力 P_D 逐渐变小,当 $P_D=0$ 时,整个导轨的承载力仅有滚轮的上端面承受,而此时预紧力就失去作用,这时的外载荷称为垂直临界载荷,用 P_{CH} 表示,可得^[8]:

$$P_{CH} = 2^{28/9} P_0 \cos\alpha \quad (22)$$

由表 1 可得预紧力为 200 N,则根据式(22)求得垂直临界载荷 $P_{CH}=1\ 437.3$ N,这与产品手册默认的最大垂直载荷为 1 280 N 相吻合。

4.2 水平外载荷下的刚度求解

当导轨承受水平向左的载荷时,如图 13 所示,由于预紧力的作用,4 个滚轮都承受载荷,右边滚轮和导轨的接触压力用 P_R 表示,左边滚轮和导轨的接触压力用 P_L 表示。 Z_3 和 Z_4 分别为滑座和导轨的重心位置, P_V 为导轨所受的水平载荷, α 为接触角。

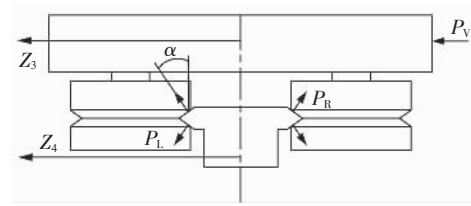


图 13 水平力下的滚轮导轨整体接触模型

如果各滚轮在水平载荷的作用下也处于受压状态,可得:

$$P_V + 4P_L \sin\alpha = 4P_R \sin\alpha \quad (23)$$

由于水平载荷与垂直载荷的刚度模型计算过程很近似。根据垂直载荷的计算过程可得导轨的水平接触刚度公式:

$$K = \frac{40}{9} f^{1/10}(P_V, P_0) k^{9/10} \left[1 + \left(1 - \frac{P_V}{4f(P, P_0)\sin\alpha}\right)^{1/10}\right] \quad (24)$$

得水平临界载荷 P_{CL} 公式:

$$P_{CL} = 2^{28/9} P_0 \sin\alpha \quad (25)$$

则根据式(25)求得水平临界载荷 $P_{CL}=991.8$ N。

4.3 外力和导轨预紧力对导轨接触刚度的影响分析

由式(4)和式(7)可得:

$$K_z = \frac{10}{9} (5.411 \ 2 \times 10^5)^{1/10} \times F_z^{9/10} \quad (26)$$

由式(4)和式(10)可得:

$$K_y = \frac{10}{9} (2.550 \ 1 \times 10^5)^{1/10} \times F_y^{9/10} \quad (27)$$

参照式(7),式(13)和式(15),在得到滚轮上端面接触压力 P_U 的基础上,根据式(20),式(26)可绘制在不同垂直外载荷的作用下,预紧力对导轨的刚度影响,如图 14 所示。同样根据式(24),式(27)可绘制在不同水平外载荷的作用下,预紧力对导轨的刚度影响,如图 15 所示。

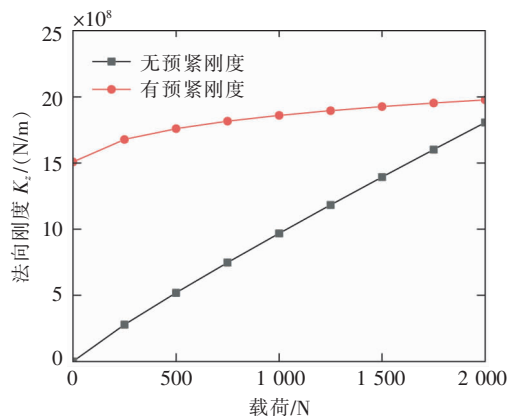


图 14 垂直载荷对有无预紧力的刚度影响图

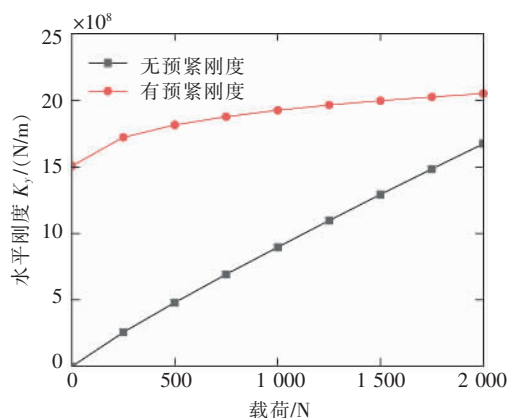


图 15 水平载荷对有无预紧力的刚度影响图

从图 14 和图 15 可以看出,有预紧力的情况下,导轨一开始就有很大的刚度,并随着外载荷的增大而增大,但上涨幅度比较平缓,即刚度可以保持为一个比较稳定的数值。没有预紧力的情况下,初始刚度比起有预紧力的情况小,此时的刚度受外载荷影响非常大,基本上要到 2 000 N 以后,刚度才可能与有预紧力的情况相等,但此时的外载荷以超出临界载荷。

因此,在滚轮导轨的应用中,可以通过施加预紧力的方法来增大滚轮导轨的初始刚度,从而减小导轨的变形,提高导轨的稳定性。

5 结论

基于 Hertz 接触理论,对 V 型滚轮导轨进行了 Hertz 接触理论建模,并求解了导轨刚度。

(1)在滚轮和导轨可以看作 Hertz 接触中圆柱体和平面接触的基础上,应用 Palmgren 通过试验得出的经验公式,推导了导轨系统中单个滚轮和导轨的接触刚度解析表达式。

(2)基于单个滚轮的 Hertz 接触表达式,在不考虑预紧力的前提下,完成了整个导轨在垂直载荷和水平载荷作用下的接触建模,并推导了外载荷和形变量的表达式。使用仿真软件进行了分析,得出仿真的结果与推导的结果相比,在垂直载荷上有一定的误差。但在水平载荷上,两者非常接近,所以推导的公式可以作为参

考,为后面的动力学研究提供参数。

(3)在考虑预紧力的前提下,针对不同的外载荷推导了导轨刚度的解析表达式,通过与无预紧力的刚度表达式进行比较,分析结果表明:无预紧力时,滚轮导轨初始刚度很低,且刚度随着载荷增大,会急速增长,使得导轨变形很大,运行不稳。有预紧力时,滚轮导轨的初始刚度较大,且刚度随着载荷增大,增长平缓,使得导轨稳定性更好。

参考文献

- [1] 张巍,高相胜,张利新. 直线滚动导轨副滚动接触应力及变形分析与计算[J]. 内蒙古科技大学学报,2018,37(3): 233-238.
- [2] Johnson K L. Contact Mechanics[M]. 北京:高等教育出版社,1992:103-119.
- [3] 瓦伦丁 L 波波夫. 接触力学与摩擦学的原理及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,2011:43-50.
- [4] 刘曙光. 滚柱直线导轨副的力学性能分析[D]. 武汉:华中科技大学,2011.
- [5] Chang J C, Hung J P. Analytical and finite element modeling of the dynamic characteristics of a linear feeding stage with different arrangements of rolling guides[J]. Mathematical Problems in Engineering,2014(3):1-11.
- [6] 张新宝,刘曙光,孙健利,等. 滚柱直线导轨副的刚度分析[J]. 金属加工(冷加工),2011(5):48-49.
- [7] 古仁君. 直线滚动导轨副静动态特性的研究[D]. 沈阳:东北大学,2013.
- [8] 孙伟,孔祥希,汪博,等. 直线滚动导轨的 Hertz 接触建模及接触刚度的理论求解[J]. 工程力学,2013,30(7):230-234.

作者简介:刘子焯(1993—),男,硕士研究生,研究方向:机械设计及理论。E-mail:shrimpfish@outlook.com
张力(通信作者)(1965—),女,教授,硕士生导师,工学学士,研究方向:现代设计理论及方法。E-mail:zl_lzlg@163.com