具有时变时延不确定网络系统的量化控制*

冯宜伟 任方杰
（兰州理工大学电气工程与信息工程学院 兰州 730050）

摘 要 研究了含有时变时延和输入输出量化的不确定网络控制系统的 H_∞ 控制问题。将传感器到控制器和控制器到执行器之间的网络时延描述为一个基于有限状态 Markov 链的随机过程，并建立了网络控制系统的不确定连续时间跳变模型；通过新型包含二次项和积分项的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和矩阵不等式技术，给出了系统随机稳定性且满足 H_∞ 性能的充分条件，并给出了量化反馈控制器的设计方法。最后，通过数字仿真验证该方法的有效性。

关键词 网络控制；时变时延；不确定性；量化
中图分类号 TP393 **DOI**：10. 3969/j. issn. 1672-9722. 2020. 09. 026

Quantized Control of Uncertain Networked Systems with Time-varying Delay

FENG Yiwei REN Fangjie
（College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050）

Abstract This paper investigates the H_∞ control of uncertain networked control systems with time-varying delay and input-output quantization. Specifically, the network delay between the sensor to the controller and the controller to the actuator is described as a stochastic process based on the finite state Markov chain, and the uncertain continuous time hopping model of the network control system is established. A new scheme of Lyapunov-Krasovskii functional with quadratic terms and integral terms and the matrix inequality technique are presented to obtain sufficient conditions for the stochastic stability of the system and the H_∞ performance, as well as the design of the quantized feedback controller. Lastly, a numerical example is given to demonstrate the effectiveness and validity of the new design techniques.

Key Words network control, time-varying delay, uncertainty, quantizer
Class Number TP393

1 引言

在网络控制系统（Networked Control Systems, NCSs）中传感器、控制器和执行器等系统组件通过实时网络进行信息交换。与传统的控制系统相比，NCSs 具有成本低，可靠性高，简便安装和维护以及易于实现远程控制等优点，因此被广泛应用于工业控制、智能交通、航空航天[1~3]等领域。然而由于数据在网络传输过程中的不确定性，可能会导致数据传输时间延迟和失包等问题，并且时间延迟的存在将导致动态系统的性能降低和不稳定，同时也给控制系统的分析和设计带来了更大的复杂性。因此，如何对 NCSs 进行稳定性分析与控制器综合，是当前研究的重点。

在网络环境中，时间延迟是随机的且不断变化，这种变化可以用 Markov 跳变模型来描述。近年来，关于网络 Markov 跳变系统得到了广泛的研究[4~8]。文献[4]研究不确定时变时滞广义连续系统的鲁棒稳定性问题，通过采用凸不等式和 Jensen 不等式降低了系统稳定的保守性。文献[5]针对具有时延和丢包的不确定 NCSs 提出了一种新的稳定性判据，利用自由加权矩阵和 Newton Leibniz 公式，

* **收稿日期**：2020 年 3 月 14 日，**修回日期**：2020 年 4 月 27 日
作者简介：冯宜伟，男，硕士，副教授，硕士生导师，研究方向：网络控制，智能微网。任方杰，男，硕士，研究方向：基于网络的量化反馈控制。

引入Jensen积分不等式，构造了具有两个Markov链的时变时滞系统，使其具有更好的稳定性。文献[6]建立了离散切换系统，进而采用Markov随机过程理论和切换系统理论，结合线性矩阵不等式(LMI)给出了系统满足相应随机均方指数稳定的充分条件。文献[7]采用Markov随机过程对含有时延的NCSs进行建模，利用凸组合方法和改进的Wirtinger积分不等式得到系统较弱的保守性。文献[8]研究了含有双边随机时延的NCSs稳定性的问题，通过将双边时延的跳变特性描述为一个有限状态的Markov随机过程，并将NCSs建模为参数不确定的离散时间跳变模型，给出了时变控制器的设计方法，但它考未虑NCSs中量化作用的影响。基于以上分析，学者们都取得了丰硕的研究成果，但时滞NCSs的稳定依赖性仍有待提高。此外，外界扰动对NCSs性能的影响也不可忽视。因此在NCSs中，鲁棒 H_∞ 控制器的设计也一直是学者们研究的热门课题。文献[9]研究了具有时变时延和分组的NCSs的稳定性，其被建模为两个独立的Markov跳跃模型，并且针对外界扰动给出了 H_∞ 控制性的充分条件。文献[10]研究了离散时间奇异Markov跳变系统在转移概率部分未知时的静态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制问题，给出了满足系统的随机稳定性条件。文献[11]研究了具有输入输出量化的不确定离散线性系统的鲁棒稳定性问题，针对具有范数有界不确定性和双重量化的闭环系统，提出了LMI的充要条件，但文献尚未考虑时延作用的影响。文献[12]研究了具有丢包和输入和输出量化的不确定线性NCSs的鲁棒稳定性问题，利用LMI给出了具有范数有界不确定性的双量化闭环系统二次稳定性的充要条件，求得最粗对数量化密度，在该密度下，不确定被控对象可以通过量化状态反馈进行二次稳定。文献[13]研究了基于滑模观测器下含有时变时延的不确定网络系统的量化反馈控制问题，通过构造一个新的Lyapunov-Krasovskii泛函使动态系统趋于稳定，但关于控制器的输入输出量化问题文献尚未考虑。

基于以上分析，本文针对一类具有时变时延的不确定网络量化反馈控制系统问题进行研究。考虑被控对象受不确定性和外部扰动输入的影响，为了提高控制系统性能，采用双量化模型，将存在于传感器到控制器和控制器到执行器的网络时延建模为连续时间状态的Markov链，通过构造依赖于网络时延的量化反馈控制器，将NCSs建模为一个有限状态集合上的连续时间齐次Markov跳变模型。然后采用改进Lyapunov-Krasovskii泛函和矩阵不等式技术方法对不确定网络量化反馈控制系统进行 H_∞ 性能分析，并设计量化反馈控制器使系统具有随机稳定性且满足 H_∞ 性能指标 γ。

2　问题描述

考虑如下不确定线性时不变连续系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)u(t)+Dw(t)\\ z(t)=Cx(t)+D_1w(t)\\ x(t)=\Phi(t)\end{cases}\tag{1}$$

式中，$x(t)\in R^n$ 是系统状态；$u(t)\in R^m$ 是控制输入；$z(t)\in R^l$ 是控制输出；$w(t)\in R^p$ 是外界扰动；$\Phi(t)$ 是系统初始状态；A，B，D，D_1 是具有适当维数的常数矩阵，ΔA，ΔB 是反应系统参数不确定性的时变矩阵，假设参数不确定性具有以下形式：

$$[\Delta A\quad \Delta B]=HF(t)[\mathrm{E}_1\quad \mathrm{E}_2]\tag{2}$$

式中，$\mathrm{H}\in R^{n\times\alpha}$；$F(k)\in R^{\alpha\times\beta}$ 是一个满足 $F^T(t)F(t)\le I$ 的时变矩阵；$E_1\in R^{\beta\times n}$ 和 $E_2\in R^{\beta\times m}$ 分别是已知的适维常数矩阵。在如图1所示的NCSs中，被控对象、智能传感器、控制器与执行器通过公共网络进行连接。

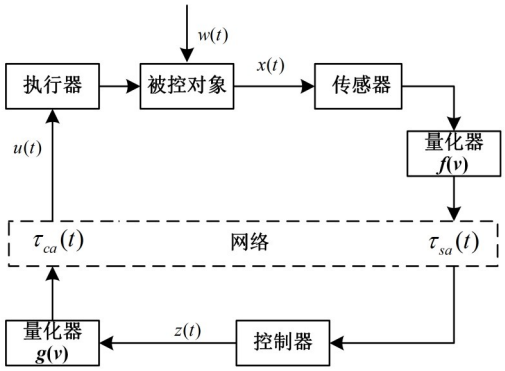

图1　具有时延和量化的不确定网络控制系统

由于数据在网络传输中会产生时延，在图1中，$\tau_{sa}(t)$ 表示传感器到控制器之间的网络时延，$\tau_{ca}(t)$ 表示控制器到执行器之间的网络时延。假设这些网络时延是随机时间变化的且具有Markov特性，并分别将 $\tau_{sa}(t)$，$\tau_{ca}(t)$ 记为 $\tau_{sa}(\eta(t))$，$\tau_{ca}(\gamma(t))$。其中，$\eta(t)$ 和 $\gamma(t)$ 是连续时间离散状态Markov随机过程，相应地有限状态集合分别为 $S_1=\{1,2,\cdots,N_1\}$ 和 $S_2=\{1,2,\cdots,N_2\}$，$\eta(t)$ 的转移概率矩阵表示为 $\Pi_1=(\pi_{ij})\in R^{N_1\times N_1}$，其定义为

$$Pr\{\eta_{t+h}=j|\eta_t=i\}=\begin{cases}\pi_{ij}h+o(h),\ i\ne j\\ \pi_{ij}h+1+o(h),\ i=j\end{cases}$$

式中,$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$,$\pi_{ij}$ 表示从状态 i 到状态 j 的转移概率,当 $j\neq i$ 时,$\pi_{ij}\geq 0$,并有 $\pi_{ii}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N_1}\pi_{ij}$ 成立。同理,$\gamma(t)$ 的转移概率矩阵表示为 $\Pi_2=(\lambda_{mn})\in R^{N_2\times N_2}$,其定义为

$$Pr\{\gamma_{t+h}=n|\gamma_t=m\}=\begin{cases}\pi_{mn}h+o(h), m\neq n\\ \pi_{mn}h+1+o(h), m=n\end{cases}$$

式中,$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$,$\lambda_{mn}$ 表示从状态 m 到状态 n 的转移概率,当 $m\neq n$ 时,$\lambda_{mn}\geq 0$,并有 $\lambda_{mn}=-\sum_{m=1,m\neq n}^{N_2}\pi_{mn}$ 成立。为了描述方便,定义 $\tau_{r(t)}(t)$ 表示两部分时延之和,其中 $0<\tau_m\leq\tau_{r(t)}(t)\leq\tau_M$,$\tau_M$ 表示时延上界,τ_m 表示时延下界,且 $\forall r_t=i\in\{S_1,S_2\}\in S$,$\tau_{r(t)}(t)$ 都可以表示为 $\tau_i(t)$。采用对数量化器的结构如图2所示,且对数量化器的量化级数集合可以进行如下表示:

$$U_j=\left\{\pm u_i^{(j)}:u_i^{(j)}=\rho_j^i u_0^{(j)}, i=\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}\cup\left\{\pm u_0^{(j)}\right\}\cup\{0\}\left(0<\rho_j<1, u_i^{(j)}>0\right)$$

式中,u_i^j 表示量化测量间隔,$0<\rho_j<1$ 是量化密度,量化密度越低,则量化越粗糙,量化密度越大,则量化结果越准确。量化器 $q_j(\bullet)$ 将每个间隔映射为一个量化级数,其量化器 $q_j(\bullet)$ 的函数表达式为

$$q_j(v)=\begin{cases}u_i^{(j)}, \ if\ \frac{u_i^{(j)}}{1+\sigma_j}<v<\frac{u_i^{(j)}}{1-\sigma_j}, v>0\\ 0\ ,\ if\ v=0\\ -q_j(-v),\ if\ v<0\end{cases}\tag{3}$$

式中,v 对应对数量化器的输入,$q_j(v)$ 对应对数量化器的输出,σ_j 为参数,且满足 $\sigma_j=\frac{1-\rho_i}{1+\rho_i}$。

根据Fu和Xie[14]中提出的扇区界面表达式可以表示为

$$q_j(v)-v=\Delta\bullet v\tag{4}$$

式中,不确定矩阵 $\Delta=\mathrm{diag}\{\Delta_1,\ \cdots,\ \Delta_m\}$ 满足 $\Delta_j\in\left[-\sigma_j,\sigma_j\right], j=1,2,\cdots,m$。

在NCSs中,状态反馈控制器表示为

$$u(t)=Kx(t)\tag{5}$$

式中,K 表示反馈控制增益。

如图1所示NCSs中,采用两个式(3)的对数量化器 $f(\bullet)$ 和 $g(\bullet)$ 分别对状态信号和控制信号进行量化。传感器将采样信号 $x(t_kh)$ 传输给量化器 $f(\bullet)$ 后得到量化信号 $\tilde{x}(t_kh)$,量化信号 $\tilde{x}(t_kh)$ 经过网络传输给控制器得到控制器输出信号 $\tilde{u}(t)$,控制器输出信号经过量化器 $g(\bullet)$ 和网络后得到控制输入信号 $u(t)$,结合式(5)得到如下表达式

$$\begin{cases}\tilde{x}(t_kh)=f(x(t_kh))\\ \tilde{u}(t_kh+\tau_{sa}(t_kh))=K_i\tilde{x}(t_kh)\\ u(t_kh+\tau_i(t))=g(\tilde{u}(t_kh+\tau_{sa}(t_kh)))\end{cases}\tag{6}$$

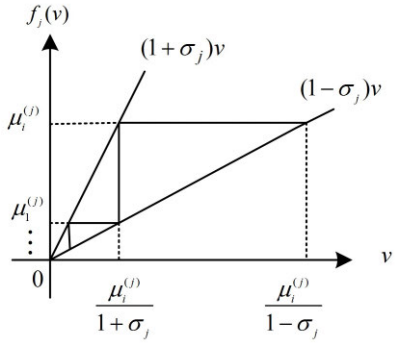

图2 对数量化器

然后,结合式(5)和(6)得到

$$u\left(t_kh+\tau_i(t)\right)=\left(I+\Delta_f\right)K_i\left(I+\Delta_g\right)x\left(t_kh\right),\quad t\in\left[t_kh+\tau_{tk}, t_{k+1}h+\tau_{tk+1}\right)\tag{7}$$

根据网络时延的描述,结合系统式(1)得到新的闭环控制系统,表示为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A_i+\Delta A_i)x(t)+(A_i+\Delta A_i)(K_i+\Delta(K))\\ \qquad x(t-\tau_i(t))+D_iw(t)\\ z(t)=C_ix(t)+D_{1i}w(t)\\ x(t)=\Phi(t), \forall t=\left[-\tau_M, 0\right]\end{cases}\tag{8}$$

式中,$\Delta(K)=\Delta_gK_i+\Delta_fK_i+\Delta_gK_i\Delta_f$。本文研究目的是针对具有Markov特性的闭环控制系统(8),设计量化反馈控制增益 K_i,从而使系统(8)是随机稳定的,并且满足 H_∞ 性能指标 γ。

为了后面理论推导,做如下合理假设:

1)传感器采用周期为 h 的时间驱动,控制器和执行器采用事件驱动;

2)数据在经过网络传输过程中不发生数据丢包,仅考虑从传感器到控制器和控制器到执行器传输时延 $\tau_{sa}(t)$、$\tau_{ca}(t)$;

3)被控对象的所有状态向量都是可测的。

3 主要结果

为证明本文的主要结论,首先给出以下引理。

引理1[15]:(Schur补引理)假如存在矩阵 S_1、S_2 和 S_3,其中 $S_2=S_2^T>0$,$S_3=S_3^T$,则 $S_1^TS_2S_1+S_3<0$ 成立等价于

$$\begin{bmatrix}-S_2^{-1} & S_1\\ S_1^T & S_3\end{bmatrix}<0 \text{ 或 } \begin{bmatrix}S_3 & S_1^T\\ S_1 & -S_2^{-1}\end{bmatrix}<0$$

引理 2[16]：给定对称矩阵 Y，适当维数的矩阵 H、V，对所有满足 $F^T(t)F(t)\le I$ 的时变矩阵 $F(t)$，如果 $Y+HF(t)V+VF^T(t)H^T<0$，当且仅当存在 $\beta>0$，使得 $Y+\beta HH^T+\beta^{-1}V^TV<0$ 成立。

引理 3[17]：给定正对称矩阵 $M_1\in R^{n_1\times n_1}$ 和 $M_2\in R^{n_1\times n_1}$，对任意的标量 $\gamma>0$，$U>0$，有如下不等式成立：

$$-2\alpha^TU\beta£\gamma\alpha^TM_1\alpha+\gamma^{-1}\beta^TM_2\beta$$

其中，α 是 n_1 维的列向量，β 是 n_2 维的列向量。

引理 4[18]：对任意常对称矩阵 $M\in R^{n\times n}$，$M>0$，标量 $\alpha>0$，向量函数 $\xi:[0,\alpha]\to R^n$，可以定义如下积分：

$$\alpha\int_0^\alpha\xi^T(\beta)M\xi(\beta)d\beta\ge\left(\int_0^\alpha\xi(\beta)d\beta\right)^TM\left(\int_0^\alpha\xi^T(\beta)d\beta\right)$$

引理 5[19]：给定对称矩阵 Z_0，Z_1，半正定矩阵 $Z_2\ge0$ 和向量 ξ_t，存在任意 $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$，有 $f(\alpha_1)<0$，$f(\alpha_2)<0$ 时，则有下式 $f(\alpha)=\xi_t^TZ_0\xi_t+\alpha\xi_t^TZ_1\xi_t+\alpha^2\xi_t^TZ_2\xi_t<0$ 成立。

引理 6[20]：已知矩阵 $R>0$，$X^T=X$ 和任何标量 ρ，有以下不等式成立：

$$-XR^{-1}X\le\rho^2R-2\rho X$$

3.1　H_∞ 性能分析

定理 1：对于给定常数 $0<\tau_m<\tau_M$、$\gamma>0$、ρ_1、ρ_2 和反馈控制增益 K_i，如果存在对称正定矩阵 $P(i)>0$，$R_1(i)>0$，$R_2(i)>0$，$W_i>0(i\in S)$，$Q_l>0$，$Z_l>0(l=1,2,3)$，$R_n>0(n=1,2)$，适当维数的矩阵 U，U_1，U_2，S，S_1，S_2 适当维数的对角矩阵 $\Lambda>0$，$\Pi>0$ 和标量 $0<\sigma_i<1$ 使得以下 LMI 成立：

$$\begin{cases}\{Y(\tau_i(t))\}_{\tau_i(t)=\tau_m}<0\\ \{Y(\tau_i(t))\}_{\tau_i(t)=\tau_M}<0\end{cases}\tag{9}$$

$$R_k\ge\sum_{j=1}^N\pi_{ij}R_{kj}(j),k=1,2.j\in S\tag{10}$$

$$\begin{bmatrix}S_1&U_1\\0&Z_2\end{bmatrix}\ge0,\begin{bmatrix}S_2&U_2\\0&Q_2\end{bmatrix}\ge0,\begin{bmatrix}Z_1&S\\0&Z_1\end{bmatrix}\ge0,\begin{bmatrix}Z_3&U\\0&Z_3\end{bmatrix}\ge0\tag{11}$$

则闭环控制系统(8)是随机稳定的且满足 H_∞ 性能指标 γ。

$$Y(\tau_t(t))=\begin{bmatrix}\Omega_1+\Omega_1(\tau_t(t))+\Gamma_1\Gamma_1^T&\Gamma_2\\0&-\gamma^2I+D_1^TD_1\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix}D_i^TP(i)&0_1&\cdots&0_{11}\end{bmatrix}^T$$

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix}C_i&0_1&\cdots&0_{11}\end{bmatrix}^T$$

$$\Omega_1=4(\tau_M-\tau_m)U_1O_1+(\tau_M-\tau_m)^3S_1+4\tau_mU_2O_2+\tau_m^3S_2$$

$$O_1=\begin{bmatrix}0&0&\tau_M-\tau_m&0&-I&-I&0_1\cdots&0_6\end{bmatrix}$$

$$O_2=\begin{bmatrix}\tau_m&0_1&\cdots&0_5&-I&0_1&\cdots&0_5\end{bmatrix}$$

$$\Omega_2(\tau_t(t))=\begin{bmatrix}v_{1,1}&v_{1,2}&\cdots&v_{1,12}\\0&v_{2,2}&\cdots&v_{2,12}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&v_{12,12}\end{bmatrix}$$

$$v_{1,1}=(A_i+\Delta A_i)^TP(i)(A_i+\Delta A_i)-Q_1-3\tau_m^2Q_3+(\sum_{j=1}^N\pi_{ij}P_j)+R_1(i)+R_2(i)+\tau_mR_1+\tau_MR_2$$

$$v_{1,3}=Q_1,\ v_{1,7}=3\tau_mQ_3,\ v_{1,12}=P(i)(B_i+\Delta B_i)$$

$$v_{2,2}=-3(\tau_m-\tau_i(t))^2[Z_3+Z_3^T-U-U^T]+\sigma_iW_i-2M_1\Lambda M_2-2Z_1+S^T+S$$

$$v_{2,3}=3(\tau_M-\tau_i(t))(\tau_M-\tau_m)(Z_3-U^T)+Z_1-S^T$$

$$v_{2,4}=Z_1-S,\ v_{2,5}=-3(\tau_M-\tau_i(t))(U-Z_3)$$

$$v_{2,6}=-3(\tau_M-\tau_i(t))(Z_3-U^T)$$

$$v_{2,10}=\sigma_iW_i-2M_1\Lambda M_2,\ v_{2,11}=2\Lambda$$

$$v_{3,3}=-R_1(i)-Q_1-Z_1-3(\tau_M-\tau_m)^2Z_3$$

$$v_{3,4}=S,\ v_{3,5}=3(\tau_M-\tau_m)U$$

$$v_{3,5}=3(\tau_M-\tau_m)Z_3,\ v_{4,4}=-Z_1-R_2(i)$$

$$v_{5,5}=-3Z_3,\ v_{5,6}=-3U^T,\ v_{6,6}=-3Z_3$$

$$v_{7,7}=-3Q_3\ v_{8,8}=(\tau_m)^2Q_1+(\tau_m)^3Q_2+(\tau_m)^4Q_3$$

$$v_{9,9}=(\tau_M-\tau_m)^2Z_1+(\tau_M-\tau_m)^3Z_2+(\tau_M-\tau_m)^4Z_3$$

$$v_{10,10}=(\sigma_i-1)W_i-2M_1\Lambda M_2$$

$$v_{10,11}=2\Lambda,\ v_{11,12}=2K_i^T\Pi\ v_{11,11}=-2\Lambda-2K_i^TN_1\Pi N_2K_i$$

$$v_{12,12}=-2\Pi,\ P(i)=\sum_{j=1}^N\pi_{ij}P_j$$

证明：对于闭环控制系统(8)，构造如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V=(t,i)=\sum_{n=1}^5V_n(t,i)\tag{12}$$

$$V_1=(t,i)=x^T(t)P(i)x(t)$$

$$V_2=(t,i)=\int_{t-\tau_m}^tx^T(s)R_1(i)x(s)ds+\int_{t-\tau_m}^tx^T(s)R_2(i)x(s)ds$$

$$V_3=(t,i)=\tau_m\int_{t-\tau_m}^t\dot{x}^T(s)(d_m-t+s)Q_1\dot{x}(s)ds+\tau_m\int_{t-\tau_m}^t\dot{x}^T(s)[\sum_{l=2}^3(\tau_m-t+s)^lQ_l]\dot{x}(s)ds$$

$$V_4=(t,i)=(\tau_M-\tau_m)\tau_m\int_{t-\tau_M}^{t-\tau_m}\dot{x}^T(s)(\tau_M-t+s)Z_1\dot{x}(s)ds+(\tau_M-\tau_m)\int_{t-\tau_M}^{t-\tau_m}\dot{x}^T(s)[\sum_{l=2}^{3}(\tau_M-t+s)^l Z_l]\dot{x}(s)ds$$

$$V_5=(t,i)=\int_{t-\tau_m}^{t}x^T(s)(\tau_m-t+s)R_1x(s)ds+\int_{t-\tau_M}^{t}x^T(s)(\tau_M-t+s)R_2x(s)ds$$

沿着系统(8)的状态轨迹分别求取 $V_1(t,i)$，$V_2(t,i)$，$V_3(t,i)$，$V_4(t,i)$ 和 $V_5(t,i)$ 的弱无穷小算子，并记作 $\varsigma V_1(t,i)$，$\varsigma V_2(t,i)$，$\varsigma V_3(t,i)$，$\varsigma V_4(t,i)$ 和 $\varsigma V_5(t,i)$。

然后利用引理3、4和6，可以得到如下

$$\begin{aligned}&-\tau_m\int_{t-\tau_m}^{t}\dot{x}^T(s)Q_1\dot{x}(s)\mathrm{d}s\le-[x(t)-x(t-\tau_m)^T\\&Q_1[x(t)-x(t-\tau_m)]-\tau_m\int_{t-\tau_m}^{t}\dot{x}^T(s)\\&[2(\tau_m-t+s)Q_2]\dot{x}(s)ds\le-2\tau_M[-2\varsigma_t^TU_2\\&[\tau_m x(t)-\int_{t-\tau_M}^{t}x(s)ds]-\frac{1}{2}\tau_m{}^2\varsigma_t^TS_2\varsigma_t^T]\\&\le-3[[\tau_m x(t)-\int_{t-\tau_M}^{t}x(s)ds]^TQ_3[\tau_m x(t)-\\&\int_{t-\tau_M}^{t}x(s)ds]]-(\tau_M-\tau_m)\int_{t-\tau_M}^{t-\tau_m}\dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds\\&\le-G^T\begin{bmatrix}Z_1&S\\0&Z_1\end{bmatrix}G-(\tau_M-\tau_m)\int_{t-\tau_M}^{t-\tau_m}\dot{x}^T(s)\\&(2(\tau_M-t+s)Z_1)\dot{x}(s)ds\\&\le-3\begin{bmatrix}\eta_1(t)\\\eta_2(t)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Z_3&U\\0&Z_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1(t)\\\eta_2(t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

式中

$$G=\begin{bmatrix}x(t-\tau_m)-x(t-\tau_i(t))\\x(t-\tau_i(t))-x(t-\tau_M)\end{bmatrix}$$

$$\eta_1(t)=(\tau_M-\tau_m)x(t-\tau_m)-(\tau_M-\tau_i(t))-\int_{t-\tau_i(t)}^{t-\tau_m}x^T(s)ds$$

$$\eta_2(t)=(\tau_M-\tau_i(t))x(t-\tau_i(t))-\int_{t-\tau_M}^{t-\tau_i(t)}x^T(s)ds$$

当 $w(t)=0$ 时，根据Schur补引理和引理2，对于任意满足 $F^T(t)F(t)\le I$ 的不确定性项 $F(t)$，可以得到

$$\begin{aligned}&\varsigma V(t,i)=\varsigma\sum_{n=1}^{5}V_n(t,i)+e^T(t)W_ie(t)-e^T(t)W_ie(t)\\&\le\varsigma\sum_{n=1}^{5}V_n(t,i)+\sigma i[e(t)+x(t-\tau_i(t))]^TW_i[e(t)\\&+x(t-\tau_i(t))]^T-e^T(t)W_ie(t)\le S_t^T(\Omega_1+\Omega_2(\tau_i(t)))S_t^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_t^T=[&\dot{w}_t^T,\dot{x}(t),\dot{x}(t-\tau_m),e^T(t_kh),f^T(x(t_kh)),\\&f^T(K_if(x(t_kh)))]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{w}_t^T=[&x^T(t),x^T(t-\tau_i(t),x^T(t-\tau_m),\\&\int_{t-\tau_M}^{t-\tau_i(t)}x^T(s)ds,\int_{t-\tau_m}^{t}x^T(s)ds,\\&\int_{t-\tau_i(t)}^{t-\tau_m}x^T(s)ds]\end{aligned}$$

当 $w(t)\ne0$ 时闭环系统(8)的 H_∞ 性能：

$$\begin{aligned}&\upsilon(z(t),w(t))\le E\{\int_0^\infty[z^T(t)z(t)-\gamma^2w^T(t)\\&w(t)+\Delta V(t,i)]dt\}\\&E\{\varsigma\sum_{n=1}^{5}V_n(t,i)+z^T(t)z(t)-\gamma^2w^T(t)\\&w(t)\}\le E\{v_t^TY(\tau_i(t))v_t\}\end{aligned}$$

式中，$v_t^T=\left[S_t^T,w^T(t)\right]$。

综合上述引理3和引理5，当同时满足条件 $\{Y(\tau_i(t))\}_{\tau_i(t)=\tau_m}<0$ 和 $\{Y(\tau_i(t))\}_{\tau_i(t)=\tau_M}<0$ 时，可以得到 $E\left\{\int_0^\infty z^T(t)z(t)\mathrm{d}t\right\}\le\int_0^\infty\gamma^2w^T(t)w(t)\mathrm{d}t$，该结果保证了在零初始状态下的 H_∞ 性能指标 $\|z(t)\|_2\le\gamma\|w(t)\|_2$ 成立。则当满足条件式(9)~(11)时，闭环控制系统(8)是随机稳定的，且满足 H_∞ 性能指标 γ。

3.2 量化控制器设计

定理2：对于给定常数 $0<\tau_m<\tau_M$、$\gamma>0$、ρ_1、ρ_2 和反馈控制增益 K_i，如果存在对称正定矩阵 $\tilde{P}_i>0$，$\tilde{R}_1(i)>0$，$\tilde{R}_2(i)>0$，$\tilde{W}_i>0$，$\tilde{Z}_l>0(l=1,2,3)$，$\tilde{R}_n>0(n=1,2)$，$\tilde{Q}_l>0$，适当维数的矩阵 $\tilde{S}$，$\tilde{S}_1$，$\tilde{S}_2$，$\tilde{U}$，$\tilde{U}_1$，$\tilde{U}_2$，$Y_i(i\in s)$，适当维数的对角矩阵 $\tilde{\Lambda}>0$，$\Pi>0$ 和标量 $0<\sigma_i<1$ 使得以下LMI成立：

$$\begin{cases}\{\tilde{Y}(\tau_i(t))\}_{\tau_i(t)=\tau_m}<0\\\{\tilde{Y}(\tau_i(t))\}_{\tau_i(t)=\tau_M}<0\end{cases}\tag{13}$$

$$\tilde{R}_k\ge\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\tilde{R}_{kj}(j),k=1,2.j\in S\tag{14}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{S}_1&\tilde{U}_1\\0&\tilde{Z}_2\end{bmatrix}\ge0,\begin{bmatrix}\tilde{S}_2&\tilde{U}_2\\0&\tilde{Q}_2\end{bmatrix}\ge0\begin{bmatrix}\tilde{Z}_1&\tilde{S}\\0&\tilde{Z}_1\end{bmatrix}\ge0,\begin{bmatrix}\tilde{Z}_3&\tilde{U}\\0&\tilde{Z}_3\end{bmatrix}\ge0\tag{15}$$

$$\tilde{Y}(\tau_i(t))=\begin{bmatrix}\tilde{\Omega}_1+\tilde{\Omega}_2(\tau_i(t))&\tilde{\Gamma}_2&\tilde{\Gamma}_1&\tilde{\Gamma}_3&E_1\Sigma_i\\0&D_1^T&-\gamma^2I&0&0\\0&0&-I&0&0\\0&0&0&\Phi&0\\0&0&0&0&X_i\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Omega}_2(\tau_i(t))=\begin{bmatrix}v'_{1,1}&v'_{1,2}&\cdots&v'_{1,12}\\0&v'_{2,2}&\cdots&v'_{2,12}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&v'_{12,12}\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_i=[\sqrt{\pi_{i1}}\tilde{P}_1 \quad \sqrt{\pi_{i2}}\tilde{P}_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\pi_{iN}}\tilde{P}_N]$$

$$X_i=\mathrm{diag}(-\tilde{P}_1 \quad -\tilde{P}_2 \quad \cdots \quad -\tilde{P}_N)$$

$$E_l=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & \cdots & 0_{n\times n} & I_{n\times n} & 0_{n\times n} & \cdots & 0_{n\times n}\end{pmatrix}^T$$

$$(l=1,2,\cdots 12)$$

$$\tilde{\Gamma}_1=E_1\tilde{P}_iC_i^T\ ,\ \tilde{\Gamma}_2=E_1D_{1i}$$

$$\tilde{\Gamma}_3=\left[(E_2+E_{10})\tilde{P}_iM^T(E_2+E_{10}+E_{11})Y_i^T \quad N^T\right]$$

$$\tilde{\Omega}_1=4(\tau_M-\tau_m)\tilde{U}_1\tilde{O}_1+(\tau_M-\tau_m)^3\tilde{S}_1+(4\tau_m)\tilde{U}_2\tilde{O}_2+\tau_m{}^3\tilde{S}_2$$

$$\tilde{O}_1=(\tau_M-\tau_m)E_3^T-E_5^T-E_6^T\ ,\ \tilde{O}_2=\tau_mE_1^T-E_7^T$$

$$\tilde{\Omega}_2(\tau_i(t))=\begin{bmatrix}v'_{1,1} & v'_{1,2} & \cdots & v'_{1,12}\\ 0 & v'_{2,2} & \cdots & v'_{2,12}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & v'_{12,12}\end{bmatrix}$$

$$v'_{1,1}=\tilde{P}_i(A_i+\Delta A_i)^T+(A_i+\Delta A_i)$$

$$\tilde{P}_i-\tilde{Q}_1-3\tau_m^2\tilde{Q}_3+\tilde{R}_1(i)+$$

$$\tilde{R}_2(i)+\tau_m\tilde{R}_1+\tau_M\tilde{R}_2$$

$$v'_{1,2}=(B_i+\Delta B_i)Y_i\ ,\ v'_{1,3}=\tilde{Q}_1\ v'_{1,10}=(B_i+\Delta B_i)Y_i\ ,$$

$$v'_{1,11}=(B_i+\Delta B_i)Y_i$$

$$v'_{1,12}=(B_i+\Delta B_i)\ ,$$

$$v'_{2,2}=-2\tilde{Z}_1+\tilde{S}^T+\tilde{S}-3(\tau_m-\tau_i(t))^2$$

$$[\tilde{Z}_3+\tilde{Z}_3^T-\tilde{U}-\tilde{U}^T]+\sigma_i\tilde{W}_i$$

$$v'_{2,3}=\tilde{Z}_1-\tilde{S}^T+\tilde{S}+3(\tau_m-\tau_i(t))(\tau_M-\tau_m)(\tilde{Z}_3-\tilde{U}^T)$$

$$v'_{2,4}=\tilde{Z}_1-\tilde{S}\ ,\ v'_{2,5}=-3(\tau_M-\tau_i(t))(\tilde{U}-\tilde{Z}_3)$$

$$v'_{2,6}=-3(\tau_M-\tau_i(t))(\tilde{Z}_3-\tilde{U}^T)\ ,\ v'_{2,10}=\sigma_i\tilde{W}_i$$

$$v'_{3,3}=-\tilde{R}_i(i)-\tilde{Q}_i-\tilde{Z}_i-3(\tau_M-\tau_m)^2\tilde{Z}_3$$

$$v'_{3,4}=\tilde{S}\ ,\ v'_{3,5}=3(\tau_M-\tau_m)^2\tilde{U}$$

$$v'_{3,6}=3(\tau_M-\tau_m)^2\tilde{Z}_3\ ,$$

$$v'_{4,4}=-\tilde{Z}_1-\tilde{R}_2(i)\ v'_{5,6}=-3\tilde{U}^T\ ,\ v'_{6,6}=-3\tilde{Z}_3\ ,$$

$$v'_{11,11}=-2\tilde{\Lambda}\ v'_{12,12}=-2\Pi\ ,\ v'_{7,7}=-3\tilde{Q}_3$$

$$v'_{8,8}=(\tau_m)^2\tilde{Q}_1+(\tau_m)^3\tilde{Q}_2+(\tau_m)^4\tilde{Q}_3$$

$$v'_{9,9}=(\tau_M-\tau_m)^2\tilde{Z}_1+(\tau_M-\tau_m)^3\tilde{Z}_2+(\tau_M-\tau_m)^4\tilde{Z}_3$$

$$v'_{10,10}=(\sigma_i-1)\tilde{W}_i\ ,\ v_{10,11}=2\Lambda$$

则闭环控制系统(8)是随机稳定的,且满足 H_∞ 性能指标 γ,状态反馈控制增益为 $K_i=Y_i\tilde{P}_i^{-T}$。

证明:令 $-2M_1\Lambda M_2+2\Lambda=2M\Lambda M$,$-2N_1\Pi N_2+2\Pi=2N\Pi N$ 对式(9)~(11)进行合同变换。定义 $\Delta=\mathrm{diag}\left[\tilde{P}_{1,i}\cdots\tilde{P}_{11,i} \quad I_1\cdots I_5\ \tilde{P}_i\right]$,然后在 $\tilde{Y}(\tau(i,t))$ 的两边同时分别乘以矩阵 Δ 及其转置,同时令 $Y_i=K\tilde{P}_i$,通过结合引理 1 和引理 6,即可得到式(13)-(15)。其中,$\tilde{P}_i=P_i^{-1}$,$\tilde{Q}_i=\tilde{P}_iQ_l\tilde{P}_i$,$\tilde{Z}_i=\tilde{P}_iZ_l\tilde{P}_i$,$\tilde{R}_n(i)=\tilde{P}_i$,$R_n(i)\tilde{P}_i$,$\tilde{W}_i=\tilde{P}_iW_i\tilde{P}_i$,$\tilde{R}_n=\tilde{P}_iR_n\tilde{P}_i$,$\tilde{S}=\tilde{P}_iS\tilde{P}_i$,$\tilde{U}=\tilde{P}_iU\tilde{P}_i$,$\tilde{U}_1=\tilde{P}_iU_1\tilde{P}_i$,$\tilde{U}_2=\tilde{P}_iU_2\tilde{P}_i$,$\tilde{\Lambda}=\tilde{P}_i\ \Lambda\tilde{P}_i$,由于 $\Phi=\mathrm{diag}(-2\Lambda-1,-\Pi)$ 是以一种非线性形式存在于式(13)中,通过定理 1 无法直接进行求解,应用常见的处理不确定项的方法,可以进行如下处理。由于 $\Lambda^{-1}=\tilde{P}_i\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{P}_i$ 通过结合引理 6,可以得到不等式 $-\Lambda^{-1}\le q_1^2\tilde{\Lambda}-2q_1\tilde{P}_i$ 和 $-\Pi^{-1}\le q_2^2\Pi-2q_2I$。然后将不等式代入式(13)中,随后在方程(10)的两边同时左乘和右乘 $\tilde{P}_i$,即可得到 $\tilde{R}_k\ge\sum_{j=1}^{N}\pi ij\tilde{P}_iR_{kj}(j)\tilde{P}$,则当满足条件式(13)~(14)时,闭环控制系统(8)是随机稳定的,且满足 H_∞ 性能指标 γ。证明完成。

4 仿真算例

为了验证文中所给出方法的有效性,下面给出相应的仿真算例。传感器是时间驱动的,以 $h=0.1s$ 为周期对被控对象进行采样。考虑闭环控制系统(8),其参数矩阵如下:

$$A_1=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.8\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \Delta A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0.5\\ 1\end{bmatrix},\ \Delta B_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ D_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\ D_{w1}=0.3$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-1 & 0.6\\ 0.8 & -1.5\end{bmatrix},\ \Delta A_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.2\end{bmatrix},\ \Delta B_2=\begin{bmatrix}0.1\\ 1\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix},$$

$$C_2=\begin{bmatrix}1 & 0.6\end{bmatrix},\ D_{w2}=0.6$$

Markov 状态转移概率矩阵为

$$\Pi=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 5 & -5\end{bmatrix}$$

系统的 Markov 模态个数为 2,网络时延下界 $\tau_m=0.01$,上界 $\tau_M=0.06$,系统状态的初始值为 $x_0=\begin{bmatrix}2 & -2\end{bmatrix}^T$,考虑不同量化密度 ρ_1、ρ_2 对系统 H_∞ 性能指标 γ 的影响,取不同的量化密度 $\rho_1=\rho_2$,得到系统 H_∞ 性能指标 γ 如表 1 所示。因此,可以得到随着量化密度 $\rho_1=\rho_2$ 的不断递减,H_∞ 性能指标 γ 不断递增,量化越来越密集,量化反馈控制器的抗干扰性能越好。

表 1　H_∞ 性能指标 γ 与量化密度 ρ_1、ρ_2 的关系

$\rho_1=\rho_2$	0.9	0.7	0.5	0.4	0.2
γ	0.291	0.457	0.624	0.761	0.933

图 3 表示系统的 Markov 跳变,且系统的转移概率是已知的。图 4 表示具有 Markov 跳变系统的状态响应,从图可知,系统状态逐渐趋近于零,且具有

随机稳定性。假设取量化器 $f_j(\bullet)$ 和 $g_j(\bullet)$ 的量化密度 $\rho_1=\rho_2=0.5$，$\sigma_1=\sigma_2=0.333$，$\gamma=0.624$，在零初始条件下，即 $x_0=[2\quad -2]^T$，外界干扰 $w(t)$ 为高斯白噪声，根据定理2可得相应的量化反馈控制器增益如下：

图3 模态 $r(t)$

$$K_1=[-0.1546\quad -0.3957]$$

$$K_2=[-0.6047\quad -0.8645]$$

此时的状态曲线如同5所示，说明系统随机稳定且具有很好的鲁棒性。

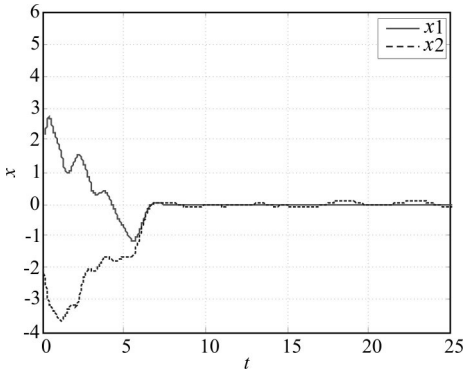

图4 系统的状态响应

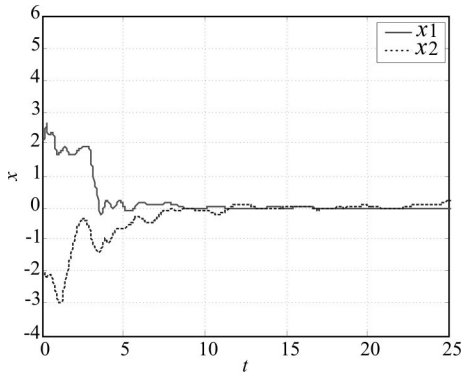

图5 系统的状态响应($w(t)\neq 0$)

从以上结论可知，本文设计提出的量化反馈控制器是有效的，能够使系统(8)是随机稳定，并且满足 H_∞ 性能指标 γ。

5 结语

本文主要研究了含有时变时延的不确定网络量化反馈系统的 H_∞ 控制问题，通过构造依赖于网络时延的量化反馈控制器，将NCSs建模为一个基于有限状态Markov链的连续时间跳变模型，通过构造一种新型包含二次项和积分项的Lyapunov-Krasovskii泛函，利用Jensen不等式消除了积分项，不需要求解Wirtinger不等式和自由加权矩阵来得到系统的随机稳定性且满足 H_∞ 性能指标 γ 的充分条件。随后利用二次凸技术、增广状态向量和随机切换系统理论来得到量化反馈控制器的设计方法。最后，给出了一个数值仿真来证明该方法的有效性。

参考文献

[1] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, Y. Xu. A Survey of Recent Results in Networked Control Systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95:138-162.

[2] M. Konar and A. Bagis, Simultaneous computation of the speed and fuel parameters of flight control system by using anfis and artificial neural networks[C]//in Signal Processing and Communication Application Conference, 2016: 1389-1392.

[3] M. Zolfpour-Arokhlo and M. R. Mashinchi, A multi-agent system approach to control road transportation network[C]//in Swarm Intelligence and Evolutionary Computation, 2016:42-46.

[4] N. Chaibi and E. H. Tissir. Delay dependent robust stability of singular systems with time-varying delay[J]. International Journal of Control Automation & Systems, 2012, 10:632-638.

[5] C. Gang, C. H. Yang, and H. Q. Zhu, Analysis and synthesis for networked control systems with network-induced delay and data dropout problems[J]. Systems Engineering & Electronics, 2012, 34:342-347.

[6] 宋杨, 董豪, 费敏锐. 基于切换频度的马尔科夫网络控制系统均方指数镇定[J]. 自动化学报, 2012, 38: 876-881.
SONG Yang, DONG Hao, FEI Minrui, et al. Mean Square Exponential Stabilization of Markov Networked Control Systems Based on Switching Frequentness[J]. Journal of Automation, 2012, 38:876-881.

[7] Y. C. Ding, H. Liu, and B. Tian. Improved Stability Criteria for Markovian Jump Systems with Time-Varying Delays [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014 :1-9.

[8] 刘义才, 刘斌, 石安伟. 区间化随机时延的网络控制系统建模与控制[J]. 系统仿真学报, 2018, 30:654-663.
LIU Yicai, LIU Bin, SHI Anwei. Modeling and Control of Networked Control Systems with Interval Random Delay

[J]. Journal of System Simulation, 2018, 30:654-663.

[9] L. I. Yuan, P. F. Zhang, Q. L. Zhang, S. O. Sciences, N. University, and S. O. Science, H∞ Control of Networked Control Systems with Time-Varying Sampling Periods and Partially Known Packet Dropout Information[J]. Journal of Northeastern University,2014,35: 305-308.

[10] J. H. Wang, Q. L. Zhang, and F. Bai. Robust control of discrete-time singular Markovian jump systems with partly unknown transition probabilities by static output feedback[J]. International Journal of Control Automation & Systems, 2015,13:1313-1325.

[11] L. Su and G. Chesi, Robust Stability of Uncertain Discrete-time Linear Systems with Input and Output Quantization[J]. IFAC-PapersOnLine ,2017, 50: 375-380.

[12] G. C. Lanlan Su. Robust stability of uncertain linear systems with input and output quantization and packet loss [J]. Automatica,2018, 87:267-273.

[13] Tang H , Zhang X , Zhu H. Quantized feedback control for time-delay systems via sliding mode observers[J]. Ima Journal of Mathematical Control & Information, 2018,35:1-23.

[14] M. Fu and L. Xie. The sector bound approach to quantized feedback control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015,50:1698-1711.

[15] G. R. Duan. LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications[J]. Veritas Revista De Filosofia Da Pucrs, 2013,71:211-214.

[16] LIHUA Xie. Output feedback H∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. International Journal of Control,1996, 63:741-750.

[17] X. M. Zhang and Q. L. Han. New stability criterion using a matrix-based quadratic convex approach and some novel integral inequalities[J]. Iet Control Theory & Applications,2014, 8:1054-1061.

[18] H. Zhang, M. Li, J. Yang, and D. Yang. Fuzzy Model-Based Robust Networked Control for a Class of Nonlinear Systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans, 2009, 39:437-447.

[19] H. Zhang, F. Yang, X. Liu, and Q. Zhang. Stability analysis for neural networks with time-varying delay based on quadratic convex combination[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2013, 24: 513-521.

[20] H. Wang, P. Shi, C. C. Lim, and Q. Xue, Event-triggered control for networked Markovian jump systems [J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2015, 25:3422-3438.

(上接第 2189 页)

ty from semantic trajectories [C] // Acm Sigspatial International Workshop on Location Based Social Networks. ACM, 2010.

[5] YING J C, CHEN H S, LIN K W, et al. Semantic trajectory-based high utility item recommendation system[J]. Expert Systems with Applications, 2014, 41 (10) : 4762-4776.

[6] CAO H, Mamoulis N, Cheung D W. Mining frequent spatio-temporal sequential patterns[C]// IEEE International Conference on Data Mining. IEEE Computer Society, 2005:82-89.

[7] ZHANG C, HAN J, SHOU L, et al. Splitter: Mining fine-grained sequential patterns in semantic trajectories [J]. Proceedings of the Vldb Endowment, 2014, 7 (9) : 769-780.

[8] Furtado A S, Kopanaki D, Alvares L O, et al. Multidimensional Similarity Measuring for Semantic Trajectories [J]. Transactions in Gis, 2016, 20(2):280-298.

[9] YAN Z, Chakraborty D, Parent C, et al. Semantic trajectories: Mobility data computation and annotation [J]. Acm Transactions on Intelligent Systems & Technology, 2013, 4(3):1-38.

[10] ZHENG K, ZHENG Y, Yuan N J, et al. On Discovery of Gathering Patterns from Trajectories[C]// IEEE International Conference on Data Engineering. IEEE Computer Society, 2013.

[11] 王倩. 室内移动对象轨迹相似性度量与应用[D]. 合肥:中国科学技术大学, 2015.
WANG Qian. Similarity Measurement and Application of Indoor Moving-Object Trajectories[D]. Hefei: University of Science and Technology of China,2015.

[12] 吕明琪. 基于轨迹数据挖掘的语义化位置感知计算研究[D]. 杭州:浙江大学, 2012.
LV Mingqi. Research on the semantic location-aware computing based on trajectory data mining[D]. Hangzhou:Zhejiang University,2012.

[13] 黄健斌. 融合语义特征的移动对象轨迹预测方法[J]. 计算机研究与发展, 2014, 51(1):76-87.
HUANG Jianbin. A Trajectory Prediction Approach for Mobile Objects by Combining Semantic Features [J]. Journal of Computer Research and Development, 2014, 51(1):76-87.