

文章编号: 1000-4750(2020)01-0026-08

# 单圆弧波纹管膜片的非线性大变形分析

韩明君, 王伟兵, 李鸿瑞, 周朝逾, 马连生

(兰州理工大学理学院, 甘肃, 兰州 730050)

**摘 要:** 采用拟壳法把单圆弧波纹管膜片看作具有初始挠度圆环薄板的组合结构, 用非线性大挠度弯曲理论对单圆弧膜片的非线性大变形进行了分析。选取膜片圆弧部分的最大变形处挠度为摄动参数, 采用板壳理论的修正迭代法, 对外周边固定内周边自由的单圆弧波纹管膜片进行了求解, 由边界条件和连续性条件得到了精确度较高的二次解析解。通过波纹管膜片圆弧的矢高和波长绘制了圆弧最大挠度处的特征曲线, 随着单弧膜片的矢量高度的增加, 膜片的挠度非线性增大, 随着单圆弧波纹管膜片的弧长变长, 膜片的挠度非线性增加。

**关键词:** 波纹管膜片; 大变形; 非线性; 拟壳法; 修正迭代法

**中图分类号:** O343.5 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2019.01.0029

## NONLINEAR LARGE DEFORMATION ANALYSIS OF SINGLE ARC BELLOWS DIAPHRAGM

HAN Ming-jun, WANG Wei-bing, LI Hong-rui, ZHOU Chao-yu, MA Lian-sheng

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China)

**Abstract:** The single arc bellows diaphragm is regarded as the combined structure of a circular plate with initial deflection by the method of simulated shell. Based on nonlinear large deflection bending theory, the nonlinear large deformation of a single circular diaphragm is analyzed. Taking the maximum deflection of the circular part of the diaphragm as a perturbation parameter and using modified iteration method of theory of plates and shells, the nonlinear large deformation of a single circular arc bellows diaphragm with one end fixed and another end free is solved. Under boundary conditions and continuity conditions, quadratic nonlinearity analytical solutions with higher accuracy are obtained. According to the vector height of the arc and the wavelength of the arc in a single circular arc bellows diaphragm, the characteristic curve of the maximum deflection of the arc is drawn. The characteristic curve is analyzed, the deflection of the diaphragm nonlinearly increases with the increase of the vector height of the single arc diaphragm, and the deflection of the diaphragm nonlinearly increases with the increase of the arc length of the single arc bellows diaphragm.

**Key words:** bellows diaphragm; large deformation; nonlinear; method of simulated shell; modified iteration method

波纹管是干气密封中常用的弹性元件, 干气密封结构中的弹性元件是影响其膜厚的一个重要元素, 因此, 波纹管直接影响着干气密封的密封性能。

波纹管已经在机械密封中得到了广泛应用, 其主要优点在于: 焊接金属波纹管不仅起着补偿及缓冲因动磨损、轴向串动及振动等原因产生的轴向位移,

收稿日期: 2019-01-20; 修改日期: 2019-08-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11472123, 11862012); 甘肃省高等学校科研项目(2015-A045)

通讯作者: 王伟兵(1933—), 男, 硕士生, 主要从事结构非线性力学行为研究(E-mail: 18393919612@163.com)。

作者简介: 韩明君(1975—), 男, 甘肃会宁人, 副教授, 博士, 主要从事结构非线性力学行为及流体动密封技术研究(E-mail: hanmj5188@163.com);

李鸿瑞(1994—), 男, 山东济南人, 硕士生, 主要从事结构非线性力学行为研究(E-mail: lihongruihehe@qq.com);

周朝逾(1992—), 男, 甘肃靖远人, 硕士生, 主要从事结构非线性力学行为研究(E-mail: 1643792337@qq.com);

马连生(1963—), 男, 山东临朐人, 教授, 博士, 主要从事新型材料结构的力学行为研究(E-mail: lsma@lut.cn)。

同时还起着使动环随旋转轴一起旋转的作用<sup>[1-2]</sup>。然而由于结构形状复杂,难以得到简单而又准确的计算。Nuer 等<sup>[3]</sup>通过利用软件对波纹管建立了有限元模型,得到了波纹管的弹簧刚度;较多学者利用软件对金属波纹管膜片的研究,确定了膜片的应力分布和变形情况<sup>[4-9]</sup>;Zhang 等<sup>[10]</sup>利用 Pro-E 软件分别建立了单圆弧焊接金属波纹管、双圆弧焊接金属波纹管和三圆弧焊接金属波纹管的有限元模型,并引入 ANSYS 软件进行了模态分析,分别得到了它们的固有频率和振动模态,并进行了分析比较。随着对波纹圆板的实验和理论研究的不断进行<sup>[11-16]</sup>,Murphy<sup>[17]</sup>采用梁理论对不同形式回转壳体波纹管的应力和应变进行分析;Aleksander 等<sup>[18]</sup>把在轴对称载荷作用下波纹管认为是波纹的旋转壳,得出了 U 形膨胀波纹管在内压载荷作用下的应力-应变状态;对于波纹管理论分析方面的研究较少,袁鸿和刘人怀<sup>[19]</sup>采用轴对称旋转壳体理论,研究了在均布载荷作用下具有硬中心的带边缘大波纹膜片的非线性弯曲问题,应用积分方程方法,获得了具有夹紧固定和滑动固定两种外边界膜片的特征关系,即荷载-中心挠度曲线。刘人怀等<sup>[20-21]</sup>建立了波纹扁球壳的非线性弯曲理论,利用该理论和改进的迭代方法,得到了在均匀压力作用下具有刚性夹紧边的波纹扁球壳的临界屈曲压力的解析解。

由于波纹管结构的复杂性,利用有限元软件进行数值求解的较多。本文尝试利用拟壳法对单圆弧膜片建立精确力学模型,将其简化为具有初始挠度的圆环板,采用文献[13]的研究方法,其中修正迭代法利用迭代原理,能够快速求解出膜片的解析解。利用薄壳的非线性大挠度理论,用修正迭代法求解单圆弧波纹管膜片的大挠度方程,从而得到了精确度较高的二次解析解,讨论了波纹管膜片在圆弧最大变形处的挠度和载荷的关系,波纹管的微小变形将直接影响密封气膜流场,对波纹管优化设计提供理论依据。

### 1 基本方程和边界条件

单圆弧型波纹管膜片是一个轴对称结构的圆环薄壳单元,如图 1 所示。取单个膜片的半波剖面,如图 2 所示。具有初始挠度圆环薄板的厚度为  $h$ ,圆环薄板的内外半径分别为  $c$ 、 $a$ ,圆弧波长为  $2R$ ,膜片的外边界固定,内边界自由。圆环薄板的初始挠度为  $w_0$ 。单圆弧波纹膜片受到的介质压力认为是

均布载荷  $q$ ,将两个膜片之间的相互作用力处理为单个膜片在自由端受到集中力  $P$ ,集中力  $P=K \cdot X$ ,其中  $K$  为膜片的刚度, $X$  为膜片的压缩量。对图 3 所示的膜片力学模型的非线性大变形进行计算。采用拟壳法将单圆弧波纹管膜片看作是具有初始挠度的圆环薄板,建立柱坐标系: $r$  为径向坐标; $w$  为挠度; $N_r$  为径向薄膜力。

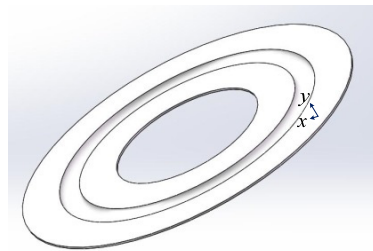


图 1 膜片的立体视图

Fig.1 Spatial view of diaphragm

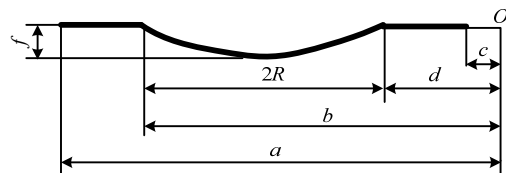
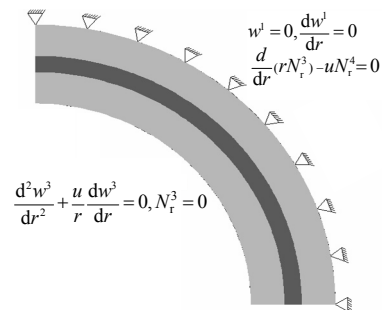
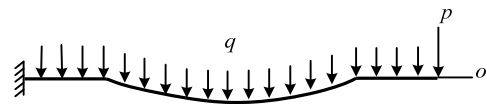


图 2 膜片的几何模型剖视图

Fig.2 Cutaway view of diaphragm's geometric model



(a) 1/4 膜片约束示意图



(b) 膜片横截面受力示意图

图 3 膜片力学模型

Fig.3 Mechanical model of diaphragm

选取初始挠度:

$$w_0 = f \frac{[r - (c + R)]^2}{R^2}, \frac{dw_0}{dr} = \frac{2[r - (c + R)]}{R^2} f \quad (1)$$

单圆弧波纹管膜片轴对称结构受到的载荷为轴对称,从而引起的变形是轴对称变形,单圆弧波纹管膜片的基本方程组<sup>[22-23]</sup>:

$$Dr \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} = \frac{1}{2} q r^2 + \lambda_1' \frac{P}{2\pi} + r N_r \left( \frac{dw}{dr} + \lambda_2' \frac{dw_0}{dr} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{Eh} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) = -\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} + \lambda_2' \frac{dw_0}{dr} \right) \frac{dw}{dr} \quad (3)$$

式中，“ $\lambda_1'$ ”和“ $\lambda_2'$ ”为引入的两个关于  $a$  的阶梯函数，分别为：

$$\lambda_1' = \begin{cases} 1, c \leq a \leq d \\ 0, \text{其他} \end{cases}, \quad \lambda_2' = \begin{cases} 1, d \leq a \leq b \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

其中： $E$ 为弹性模量； $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ， $\mu$ 为泊松比；

$w_0$ 为初始挠度。

其边界条件为：

固定周边处，

$$r = a, w^1 = 0, \frac{dw^1}{dr} = 0, \frac{d}{dr} (r N_r^1) - \mu N_r^1 = 0 \quad (4)$$

自由周边处，

$$r = c, \frac{d^2 w^3}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw^3}{dr} = 0, N_r^3 = 0 \quad (5)$$

连续处，

$$r = b, w^1 = w^2, \frac{dw^1}{dr} = \frac{dw^2}{dr}, M_r^1 = M_r^2, N_r^1 = N_r^2, N_\theta^1 = N_\theta^2 \quad (6)$$

$$r = d, w^2 = w^3, \frac{dw^2}{dr} = \frac{dw^3}{dr}, M_r^2 = M_r^3, N_r^2 = N_r^3, N_\theta^2 = N_\theta^3 \quad (7)$$

式中： $(\cdot)^1$ 表示外部无初始挠度圆环薄板； $(\cdot)^2$ 表示具有初始挠度的圆环薄板； $(\cdot)^3$ 表示内部无初始挠度圆环薄板。

为了计算方便，引入下列无量纲量：

$$x = \frac{r}{a}, W = \frac{w}{h}, S = \frac{12(1-\mu^2)rN_r a}{Eh^3}, \beta_1 Q = \frac{12a^4(1-\mu^2)q}{Eh^4}, \beta_2 Q = \frac{6a^2(1-\mu^2)P}{\pi Eh^4}, k = \frac{2a^2}{R^2 h} f, \xi = \frac{2a(c+R)}{R^2 h} f$$

将这些量代入方程组式(2)和方程组式(3)简化可以得到如下的无量纲控制方程：

$$L \left( x \frac{dW}{dx} \right) = (\beta_1 x^2 + \lambda_1 \beta_2) Q + S \left[ \frac{dW}{dx} + \lambda_2 (kx - \xi) \right] \quad (8)$$

$$L(xS) = -\alpha \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 - 2\alpha \lambda_2 (kx - \xi) \frac{dW}{dx} \quad (9)$$

$$\text{式中：} \alpha = 6(1-\mu^2), \quad \lambda_1 = \begin{cases} 1, \frac{c}{a} \leq x \leq \frac{d}{a} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} 1, \frac{d}{a} \leq x \leq \frac{b}{a} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

算子：

$$L = x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx}$$

由无量纲表示的边界条件为：

固定周边处，

$$x = 1, W^1 = 0, \frac{dW^1}{dx} = 0, \frac{dS^1}{dx} - \mu S^1 = 0 \quad (10)$$

自由周边处，

$$x = \frac{c}{a}, \frac{d^2 W^3}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \frac{dW^3}{dx} = 0, S^3 = 0 \quad (11)$$

连续处，

$$x = \frac{b}{a}, W^1 = W^2, \frac{dW^1}{dx} = \frac{dW^2}{dx}, \frac{d^2 W^1}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \frac{dW^1}{dx} = \frac{d^2 W^2}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \frac{dW^2}{dx}, S^1 = S^2, \frac{d}{dx} (xS^1) = \frac{d}{dx} (xS^2) \quad (12)$$

连续处，

$$x = \frac{d}{a}, W^2 = W^3, \frac{dW^2}{dx} = \frac{dW^3}{dx}, \frac{d^2 W^2}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \frac{dW^2}{dx} = \frac{d^2 W^3}{dx^2} + \frac{\mu}{x} \frac{dW^3}{dx}, S^2 = S^3, \frac{d}{dx} (xS^2) = \frac{d}{dx} (xS^3) \quad (13)$$

## 2 对基本方程求解

单圆弧波纹管膜片的圆弧位于膜片中间部分，采用拟壳法将膜片看作具有初始挠度的圆环薄板，单圆弧膜片由部分组合而成，外部无初始挠度圆环薄板、中间部分具有初始挠度的圆环薄板和内部无初始挠度圆环薄板。利用修正迭代法<sup>[11]</sup>对膜片的挠度  $W$  进行二次近似求解。

### 2.1 外部无初始挠度圆环薄板的基本方程求解

当  $b/a \leq x \leq 1$  时，外部无初始挠度圆环薄板的基本方程为：

$$\begin{cases} L\left(x\frac{dW^1}{dx}\right) = \beta_1 x^2 Q + S\frac{dW^1}{dx} \\ L(xS^1) = -\alpha\left(\frac{dW^1}{dx}\right)^2 \end{cases} \quad (14)$$

利用修正迭代法对基本方程式(14)进行求解。

对于一次近似, 有:

$$\begin{cases} L\left(x\frac{dW_1^1}{dx}\right) = \beta_1 x^2 Q_0 \\ L(xS_1^1) = -\alpha\left(\frac{dW_1^1}{dx}\right)^2 \end{cases} \quad (15)$$

由方程组式(15)一次近似求解可得到无量纲挠度  $W_1^1$  和 无量纲薄膜力  $S_1^1$ 。

$$W_1^1 = \frac{1}{32}\beta_1 Q_0 x^4 + \frac{1}{4}c_1 x^2 + c_2 \ln x + c_3 \quad (16)$$

$$S_1^1 = -\frac{1}{3072}\alpha Q_0^2 \beta_1^2 x^7 - \frac{1}{192}\alpha c_1 \beta_1 Q_0 x^5 - \frac{1}{32}(c_1^2 + c_2 \beta_1 Q_1)\alpha x^3 + \frac{1}{4}(1 - 2\ln x)\alpha c_1 c_2 x + \frac{1}{2}\alpha c_2^2 \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{2}g_1 x + g_2 \frac{1}{x} \quad (17)$$

其中:

$$\eta_1 = \frac{c}{a}, \eta_2 = \frac{d}{a}, \eta_3 = \frac{b}{a},$$

$$H_0 = \eta_1^2 + \mu\eta_2^2 - \mu + 1,$$

$$H_1 = 4\beta_2 \eta_1^2 (1 + \mu)(\ln \eta_1 - \ln \eta_2) + 2\beta_2 (1 - \mu)(\eta_1^2 - \eta_2^2) + (3 + \mu)\beta_1 \eta_1^4 + (1 - \mu)\beta_1,$$

$$H_2 = (1 - \mu)\beta_1 + (1 + \mu)\beta_1 \eta_1^2,$$

$$c_1 = -\frac{Q_0 H_1}{4H_0}, c_2 = \frac{Q_0 H_1}{8H_0}, c_3 = \frac{Q_0 (2H_1 - H_2)}{32H_0}.$$

式中,  $g_1$ 、 $g_2$  均为单圆弧波纹管膜片一次近似求解中薄膜力  $S_1^2$  表达式中的积分常数, 它们由单圆弧膜片的边界条件和连续性条件来确定。

对于二次近似, 有:

$$L\left(x\frac{dW_2^1}{dx}\right) = \beta_1 x^2 Q_1 + S_1^1 \frac{dW_1^1}{dx} \quad (18)$$

将式(16)和式(17)代入式(18)求解出外部无初始挠度圆环薄板的二次近似的大挠度  $W_2^1$ 。

### 2.2 具有初始挠度的圆环薄板的基本方程求解

当  $d/a \leq x \leq b/a$  时, 具有初始挠度的圆环薄板的

基本方程为:

$$\begin{cases} L\left(x\frac{dW^2}{dx}\right) = \beta_1 x^2 Q + S\left[\frac{dW^2}{dx} + (kx - \xi)\right] \\ L(xS^2) = -\alpha\left(\frac{dW^2}{dx}\right)^2 - 2\alpha(kx - \xi)\frac{dW^2}{dx} \end{cases} \quad (19)$$

利用修正迭代法对基本方程式(19)进行求解。

对于一次近似, 有:

$$\begin{cases} L\left(x\frac{dW_1^2}{dx}\right) = \beta_1 x^2 Q_0 \\ L(xS_1^2) = -\alpha\left(\frac{dW_1^2}{dx}\right)^2 - 2\alpha(kx - \xi)\frac{dW_1^2}{dx} \end{cases} \quad (20)$$

由方程组式(20)一次近似求解可得到无量纲挠度  $W_1^2$  和 无量纲薄膜力  $S_1^2$ 。

$$W_1^2 = \frac{1}{32}\beta_1 Q_0 x^4 + \frac{1}{4}c_4 x^2 + c_5 \ln x + c_6 \quad (21)$$

$$S_1^2 = -\frac{1}{3072}\alpha \beta_1^2 Q_0^2 x^7 - \frac{1}{192}(c_4 + 2k)\alpha \beta_1 Q_0 x^5 + \frac{1}{60}\alpha \xi \beta_1 Q_0 x^4 - \frac{1}{32}\alpha c_5 \beta_1 Q_0 x^3 - \frac{1}{32}(c_4 + 4k + \frac{32}{3}\xi)\alpha c_4 x^3 - \frac{1}{2}(c_4 + 2k)\alpha c_5 x \ln x + \frac{1}{4}(c_4 + 2k)\alpha c_5 x + \frac{1}{2}\alpha c_5^2 \frac{1}{x} \ln x - 2\alpha c_5 \xi + \frac{1}{2}g_3 x + \frac{g_4}{x} \quad (22)$$

其中:

$$c_4 = -\frac{Q_0 H_1}{4H_0}, c_5 = \frac{Q_0 H_1}{8H_0}, c_6 = \frac{Q_0 (2H_1 - H_2)}{32H_0}$$

式中,  $g_3$ 、 $g_4$  均为单圆弧波纹管膜片一次近似求解中薄膜力  $S_1^2$  表达式中的积分常数, 它们由单圆弧膜片的边界条件和连续性条件来确定。

对于二次近似, 有:

$$L\left(x\frac{dW_2^2}{dx}\right) = \beta_1 x^2 Q_1 + S_1^1 \left[\frac{dW_1^1}{dx} + (kx - \xi)\right] \quad (23)$$

将式(21)和式(22)代入式(23)求解出具有初始挠度的圆环薄板的二次近似的大挠度  $W_2^2$ 。

### 2.3 内部无初始挠度圆环薄板的基本方程求解

当  $c/a \leq x \leq d/a$  时, 内部无初始挠度的圆环薄板的基本方程为:

$$\begin{cases} L\left(x\frac{dW^3}{dx}\right) = (\beta_1x^2 + \beta_2)Q + S^3\frac{dW^3}{dx} \\ L(xS^3) = -\alpha\left(\frac{dW^3}{dx}\right)^2 \end{cases} \quad (24)$$

利用修正迭代法对基本方程式(24)进行求解。

对于一次近似, 有:

$$\begin{cases} L\left(x\frac{dW_1^3}{dx}\right) = (\beta_1x^2 + \beta_2)Q_0 \\ L(xS_1^3) = -\alpha\left(\frac{dW_1^3}{dx}\right)^2 \end{cases} \quad (25)$$

由方程组式(25)一次近似求解可得到无量纲挠度  $W_1^3$  和无量纲薄膜力  $S_1^3$ 。

有解为:

$$W_1^3 = \frac{1}{32}\beta_1Q_0x^4 + \frac{1}{4}\beta_2Q_0x^2\ln x - \frac{1}{4}\beta_2Q_0x^2 + \frac{1}{4}c_7x^2 + c_8\ln x + c_9 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} S_1^3 = & -\frac{1}{3072}\alpha\beta_1^2Q_0^2x^7 + \frac{1}{2304}(11\beta_2Q_0 - 12c_7 - \\ & 12\beta_2Q_0\ln x)\alpha\beta_1Q_0x^5 - \frac{1}{256}(8\beta_2Q_0\ln^2x - \\ & 20\beta_2Q_0\ln x + 15\beta_2Q_0 - 20c_7 + 16c_7\ln x) \cdot \\ & \alpha\beta_2Q_0x^3 - \frac{1}{32}(c_8\beta_1Q_0 + c_7^2)\alpha x^3 - \frac{1}{4}(\ln^2x - \\ & 2\ln x + 1)\alpha c_8\beta_2Q_0x + \frac{1}{4}(1 - 2\ln x)\alpha c_7c_8x + \\ & \frac{1}{2}\alpha c_8^2\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{2}g_5x^2 + g_6\frac{1}{x} \end{aligned} \quad (27)$$

其中:

$$\begin{aligned} H_3 = & 4(1 + \mu)\beta_2\eta_1^2\ln\eta_1 + 4(1 - \mu)\beta_2\ln\eta_2 + \\ & (1 - \mu)\beta_1 + 2\beta_2(1 - \mu)(\eta_1^2 - \eta_2^2) + (3 + \mu)\beta_1\eta_1^4, \\ H_4 = & 2(1 - \mu)\beta_2\eta_2^2 + 2(1 + \mu)\beta_2\eta_1^2\eta_2^2 - \\ & (1 + \mu)\beta_1\eta_1^2 - (1 - \mu)\beta_1, \\ H_5 = & 8\beta_2\eta_1^2(1 + \mu)(\ln\eta_1 - \ln\eta_2 - \eta_2^2\ln\eta_2 + \eta_2^2) + \\ & 4\beta_2(1 - \mu)(\eta_1^2 + \eta_2^2) - 8(1 - \mu)\beta_2\eta_2^2\ln\eta_2 + \\ & (1 - \mu)\beta_1 - (1 + \mu)\beta_1\eta_1^2 + 2(3 + \mu)\beta_1\eta_1^4, \\ c_7 = & -\frac{Q_0H_3}{4H_0}, c_8 = \frac{Q_0(H_1 + H_4)}{8H_0}, c_9 = \frac{Q_0H_5}{32H_0}. \end{aligned}$$

式中,  $g_5$ 、 $g_6$  均为单圆弧波纹管膜片一次近似求解中薄膜力  $S_1^3$  表达式中的积分常数, 它们由单圆弧

膜片的边界条件和连续性条件来确定。

对于二次近似, 有:

$$L\left(x\frac{dW_2^3}{dx}\right) = (\beta_1x^2 + \beta_2)Q_1 + S_2^3\frac{dW_2^3}{dx} \quad (28)$$

将式(26)和式(27)代入式(28)求解出内部无初始挠度圆环薄板的二次近似的大挠度  $W_2^3$ 。

### 3 数值计算和结果分析

选取试验参数, 波纹管材料的弹性模量  $E=187$  GPa, 泊松比  $\mu=0.3$ , 单圆弧膜片的外径为  $a=37$  mm, 内径为  $c=27$  mm, 膜片波长为  $2R$ , 膜片的厚度均为  $h=0.3$  mm。由单圆弧波纹管膜片的边界条件和连续性条件, 通过对各级迭代方程进行计算得到各级方程的积分常数。

将上述数据代入文献[20], 可得到波纹环形板在自由端处的载荷和挠度的关系式, 选取圆弧的矢高  $f=0.25$  mm, 波长  $2R=6$  mm, 膜片受到集中力  $P$  的作用。可得到文献[20]中对应的载荷和挠度的关系式为:

$$P = 6595.747w + 440.458w^3$$

通过计算可以得到单圆波纹管弧膜片在自由端的载荷和挠度的关系式为:

$$P = 4879.809w + 840.703w^2 + 566.937w^3$$

由文献[20]得到单圆弧波纹管膜片在自由端处载荷与挠度的特征关系式和文中通过计算得到的特征关系式对比如图4所示, 可以看出本方法的结果具有较好的精确性。

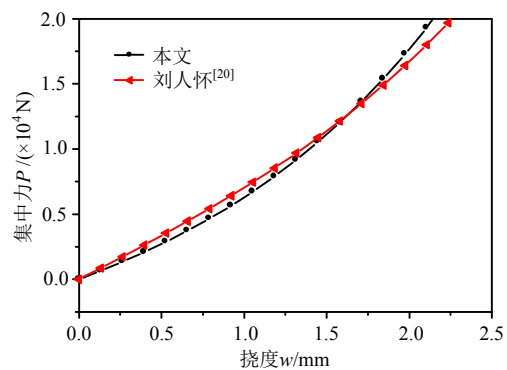


图4 本文计算结果和文献[20]计算结果对比图  
Fig.4 Comparisons between the calculated results in this manuscript and those in Ref [20]

由一次近似解可得到挠度与载荷的线性关系, 取圆弧部分膜片最大挠度处的挠度为  $W_c$ , 则有  $W_1=W_c$ 。波纹管膜片圆弧部分在最大变形处发生小挠度变形时, 载荷和挠度呈现线性关系, 则此时在

波纹管膜片最大变形处挠度  $W_c$  和载荷  $Q_0$  的特征曲线如图 5 所示。

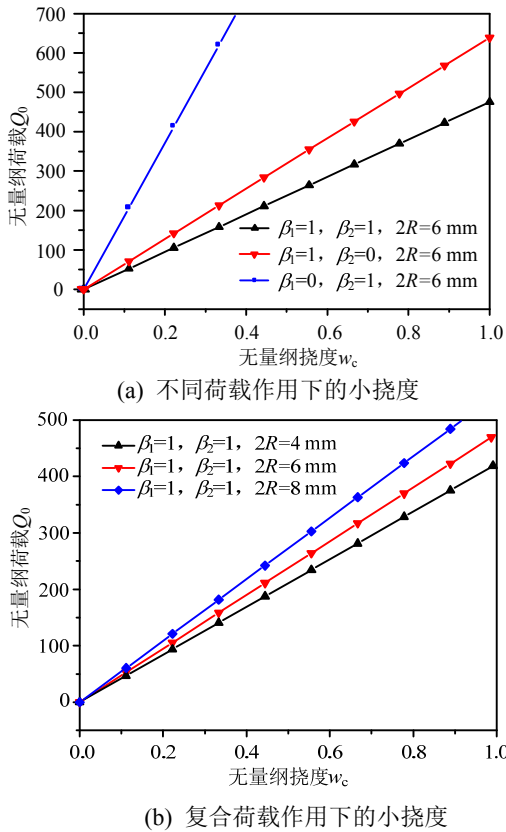


图 5 单圆弧波纹管膜片的小挠度平衡路径

Fig.5 Balance path of small deflection for single arc bellows diaphragm

图 5(a)给出波长固定( $2R=6\text{ mm}$ )时,不同类型的荷载作用在单圆弧波纹管膜片时膜片发生的线性弯曲变形,图 5(b)给出膜片受到复合荷载( $\beta_1=1, \beta_2=1$ )时,不同波长的膜片发生的线性弯曲变形。

由二次近似解可得到挠度与载荷的非线性线性关系,取膜片圆弧部分发生最大变形处的挠度为  $W_c$ ,则有  $W_2=W_c$ 。则波纹管膜片圆弧部分最大变形处挠度  $W_c$  和载荷  $Q_1$  的关系如图 6 和图 7 所示。

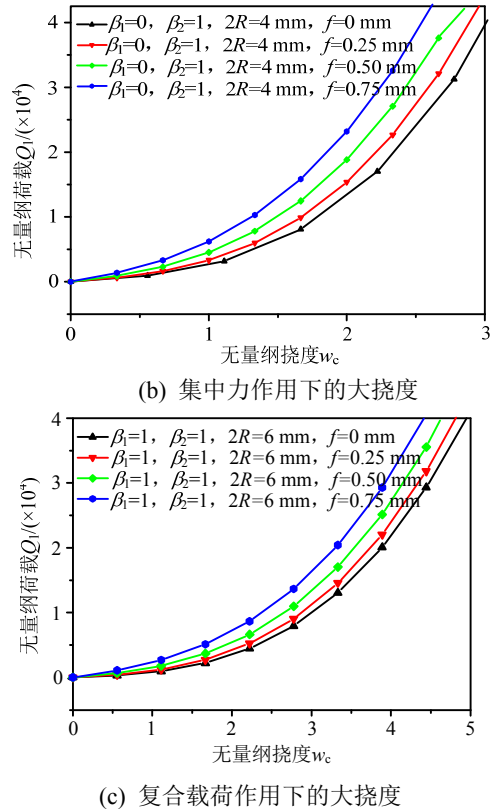
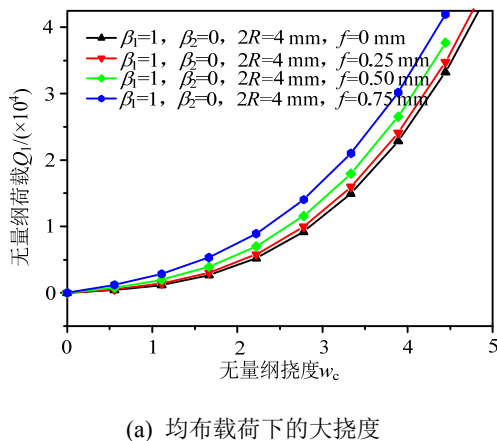
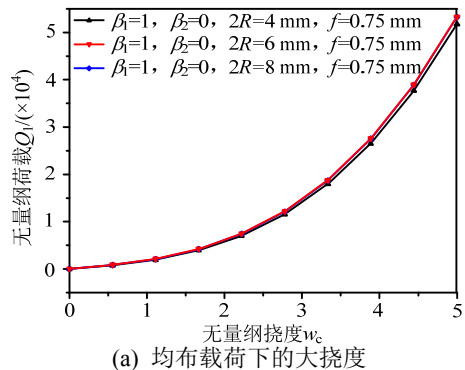
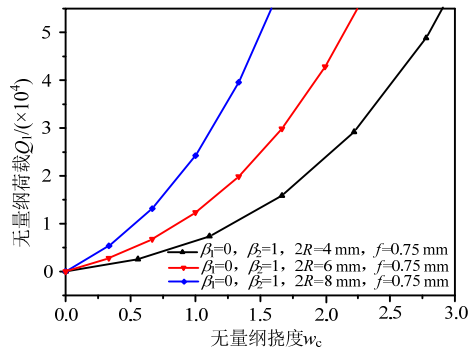


图 6 单圆弧膜片矢高变化下膜片的大挠度平衡路径

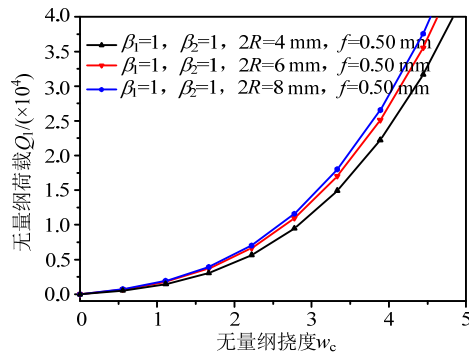
Fig.6 Balance path of large deflection of single arc diaphragm under variation of vector height

图6给出了单圆弧波纹管膜片在不同载荷作用下圆弧最大变形处挠度的三次特征关系的特征曲线,反映了不同载荷和不同矢高作用下的弯曲情况。图6(a)~图6(c)在波长固定不变( $2R=4\text{ mm}, 2R=4\text{ mm}, 2R=6\text{ mm}$ )膜片承受均布载荷( $\beta_1=1, \beta_2=0$ )、集中力( $\beta_1=0, \beta_2=1$ )和复合荷载( $\beta_1=1, \beta_2=1$ )作用,增大波纹管圆弧处的矢高,膜片的大挠度平衡路径发生变化;当膜片无圆弧( $f=0\text{ mm}$ )时,膜片受到载荷时越容易发生变形;随着波纹管膜片圆弧矢高的增加( $f=0.25\text{ mm}, f=0.50\text{ mm}, f=0.75\text{ mm}$ ),膜片受到载荷作用时使膜片发生的变形达到平衡路径越容易,膜片的承载能越强;随着圆弧挠度的增加,膜片发生变形所需要的载荷呈现较强的非线性增加。





(b) 集中力作用下的大挠度



(c) 复合载荷作用下的大挠度

图7 单圆弧膜片圆弧波长变化下膜片的大挠度平衡路径  
Fig.7 Balance path of large deflection of single arc diaphragm under variation of arc wavelength

图7给出了单圆弧波纹管膜片在不同载荷作用下圆弧最大变形处挠度的3次特征关系式的特征曲线,反映了不同载荷和不同波长下的弯曲情况。图7(a)~图7(c)在矢高固定不变( $f=0.75\text{ mm}$ ,  $f=0.75\text{ mm}$ ,  $f=0.50\text{ mm}$ )膜片承受均布载荷( $\beta_1=1$ ,  $\beta_2=0$ )、集中力( $\beta_1=0$ ,  $\beta_2=1$ )和复合载荷( $\beta_1=1$ ,  $\beta_2=1$ )作用,增大波纹管圆弧的波长,膜片的大挠度平衡路径发生变化;当膜片圆弧的波长( $2R=4\text{ mm}$ )时,膜片受到载荷时越容易发生变形;随着波纹管膜片圆弧波长的增加( $2R=4\text{ mm}$ ,  $2R=6\text{ mm}$ ,  $2R=8\text{ mm}$ ),膜片受到载荷作用时使膜片发生的变形达到平衡路径越容易,膜片的承载能力越强;随着圆弧挠度的增加,膜片发生变形所需要的载荷呈现较强的非线性增加。

## 4 结论

(1) 用薄板理论研究了单圆弧波纹管膜片的非线性大变形。在等效连续化方法的基础上,用拟壳法将单圆弧膜片转化为连续的圆环薄板,用修正迭代法对其进行了求解。

(2) 随着单弧膜片的矢量高度的增加,膜片

的挠度非线性增大,随着单弧波纹管膜片的弧长变长,膜片的挠度非线性增大。单圆弧波纹管膜片中圆弧部分的初始挠度越大,膜片的承载能力就会越强;圆弧部分波长越长,膜片的承载能力就会越强。

(3) 单圆弧波纹管膜片发生的变形不仅与膜片本身具有的性质有关,而且与膜片的结构形状也有关,合理地选择波纹管膜片的矢高和波长,可以优化波纹管的设计,使干气密封的效果达到最佳。

## 参考文献:

- [1] 顾永泉. 流体动密封[M]. 北京: 石油大学出版社, 1990.  
Gu Yongquan. Fluid dynamics seal [M]. Beijing: Petroleum University Press, 1990. (in Chinese)
- [2] 安源胜. 机械密封用焊接金属波纹管失效机理研究[D]. 上海: 华东理工大学, 2002.  
An Yuansheng. Failure mechanism of welded metal bellows for mechanical seals [D]. Shanghai: East China University of Science and Technology, 2002. (in Chinese)
- [3] Nuer R, Ghenni M, Ahmat M, et al. Fem analysis and optimization for welded metal bellows seal [J]. Advanced Materials Research, 2008, 33/34/35/36/37: 1371—1376.
- [4] Ghenni M, Kikuchi M. Shape optimization of metal welded bellows seal based on the turing reaction-diffusion model coupled with fem [J]. Key Engineering Materials, 2008, 385—387: 813—816.
- [5] Musha H, Buhalqam G M. Shape optimization and strength evaluation of metal welded bellows wave of mechanical seal [J]. Advanced Materials Research, 2008, 33/34/35/36/37: 1377—1382.
- [6] 穆塔里夫阿赫迈德, 程伟, 阿斯耶姆肖凯提. S型焊接金属波纹管的应力仿真与试验研究[J]. 压力容器, 2010, 27(1): 8—11.  
Ahmat M, Cheng Wei, Xiaokaiti A. Stress simulation and experimental research for s-shaped welded metal bellows [J]. Pressure Vessel Technology, 2010, 27(1): 8—11. (in Chinese)
- [7] Ghenni M, Musha H, Yusup N, et al. Flexibility analysis of the welded metal bellows of mechanical seal [J]. Key Engineering Materials, 2011, 462/463: 894—899.
- [8] Ma K. Analysis on large-size s-shape welded metal bellow stiffness and sheet welded joint stress [J]. Lubrication Engineering, 2012, 37(12): 65—68.
- [9] Dinesh B P, Keerthi P S, Barani D M, et al. Analysis of static mechanical behaviour of metal bellows using finite

- element modeling [J]. *Applied Mechanics & Materials*, 2014, 592/593/594: 996–1000.
- [10] Zhang J, Ding X, Huang Y, et al. Structural dynamic analysis for welding metal bellows in dry gas seals [J]. *Chemical Engineering & Machinery*, 2010, 37(2): 183–185, 191.
- [11] 王新志. 在复合载荷作用下变厚度圆薄板大挠度问题[J]. *应用数学和力学*, 1989, 10(2): 102–114.  
Wang Xinzhi. Large deflection problem of circular plates with variable thickness under the action of combined loads [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, 10(2): 102–114. (in Chinese)
- [12] Wang X Z, Han M J, Zhao Y G, et al. Nonlinear natural frequency of shallow conical shells with variable thickness [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, 26(3): 277–282.
- [13] Wang X Z, Han M J, Zhao Y G, et al. Nonlinear dynamical bifurcation and chaotic motion of shallow conical lattice shell [J]. *Applied Mathematics & Mechanics*, 2006, 27(5): 661–666.
- [14] 吕晨亮, 于建国, 叶庆泰. U型波纹管的扭转振动固有频率的计算[J]. *工程力学*, 2005, 22(4): 225–228.  
Lü Chenliang, Yu Jianguo, Ye Qingtai. Calculation of torsional natural frequency of U-shaped bellows [J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(4): 225–228. (in Chinese)
- [15] 朱卫平. 复合载荷下波纹管横向非线性弯曲摄动有限元法[J]. *工程力学*, 2003, 20(5): 91–94.  
Zhu Weiping. Finite element perturbation method for nonlinear analysis of bellows under lateral compound Load [J]. *Engineering Mechanics*, 2003, 20(5): 91–94. (in Chinese)
- [16] 戴明, 孙慧玉. 含多个椭圆夹杂圆板的热弹性分析[J]. *工程力学*, 2013, 30(6): 47–53.  
Dai Ming, Sun Huiyu. Thermo-elastic analysis of a circular plate containing multiple elliptical inclusions [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(6): 47–53. (in Chinese)
- [17] Murphy G. Analysis of stress and displacements in heat exchange expansion joints [J]. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1952, 74(3): 397–402.
- [18] Aleksander K, Belyaev T V, Smirnov Z K K. Theoretical and experimental studies of the stress-strain state of expansion bellows as elastic shells [J]. *St. Petersburg Polytechnical University Journal*, 2017, 3: 7–14.
- [19] 袁鸿, 刘人怀. 均布载荷作用下带边缘大波纹膜片的非线性弯曲[J]. *力学学报*, 2003, 35(1): 14–20.  
Yuan Hong, Liu Renhuai. Nonlinear bending of corrugated diaphragm with large boundary corrugation under uniform load [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(1): 14–20. (in Chinese)
- [20] 刘人怀. 波纹环形板的非线性弯曲[J]. *中国科学: 数学: 中国科学*, 1984, 27(3): 247–253.  
Liu Renhuai. Nonlinear bend of corrugated annular plates [J]. *Chinese Science Mathematics: Chinese Science*, 1984, 27(3): 247–253. (in Chinese)
- [21] Liu R H, Wang F. Nonlinear stability of corrugated shallow spherical shell [J]. *International Journal of Applied Mechanics & Engineering*, 2005, 10(2): 426–432.
- [22] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.  
Xu Zhilun. *Elastic mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1990. (in Chinese)
- [23] 郑晓静. 圆薄板大挠度理论及应用[M]. 长春: 吉林科学技术出版社, 1990.  
Zheng Xiaojing. *Theory and application of large deflection of circular thin plate* [M]. Changchun: Jilin Science and Technology Press, 1990. (in Chinese)