

# 基于FFT特性的低复杂度峰均比降低算法\*

黄玲, 安爱民, 王强

(兰州理工大学电子工程与信息工程学院 甘肃兰州, 730050)

**摘要:** 部分传输序列 (PTS) 方法是 OFDM 系统中降低 PAPR 的一种高效技术, 但计算复杂度高。提出一种基于 FFT 特性的多相循环移位和共轭 (PCSC) 法, 该方法先由一个 IFFT 运算产生一个时域序列, 然后结合 FFT 的时域循环移位性和共轭性构造出不同的转换, 在时域产生更多的备选序列。为进一步降低计算复杂度, PCSC 法充分利用天线  $T_{x_1}$  而在天线  $T_{x_2}$  中未使用 IFFT 运算。仿真结果表明, 在子块数量和相位加权系数相同时, 本文所提出的 PCSC 方法相对于 PTS 方法具有更加良好的 PAPR 降低性能。

**关键词:** 峰均比; 部分传输序列; 多相循环移位; 共轭

**Abstract:** Partial Transmit Sequence (PTS) is a high efficiency technique of reducing the high peak-to-average power ratio (PAPR) in orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) systems. While it's computational complexity is high. A novel scheme, called as the polyphase circular shift and conjugate (PCSC), is proposed. A time-domain sequence is generated by one IFFT from the proposed method and then it combines with the time-domain circular shift property and conjugate property of FFT to construct different transformations, which can generate more alternative candidate sequences in the time domain. To reduce the computational complexity furtherly, PCSC takes full advantage of the antenna  $T_{x_1}$  and do not use IFFT in the antenna  $T_{x_2}$ . Simulation results validate that the proposed method can provide good performances compared to PTS in the case of the same number of sub-blocks and phase weighting factors.

**Key words:** Peak-to-average ratio; Partial Transmit Sequence; Multiphase cyclic shift; Conjugate

中图分类号: TN929.5

文献标识码: B

文章编号: 1001-9227 (2013) 03-0164-03

## 0 引言

MIMO-OFDM 是无线通信系统中的实现数据高速传输一个非常有前途的技术。但 OFDM 系统的输出信号是多个正交的子载波信号的叠加, 它的一个主要缺点就是发送的 OFDM 信号具有较高的峰均功率比 (Peak-to-average Power Ratio, PAPR)。在这种情况下, OFDM 的输出信号有较大的动态范围, 对放大器的线性要求较高, 这会降低射频放大器的功率效率, 增加系统成本。MIMO-OFDM 系统和 OFDM 信号一样, 也具有 PAPR 过高的缺点。

目前, 针对如何降低 OFDM 的 PAPR 已经有很多方法被提出<sup>[2-3]</sup>。一些方法是将 OFDM 系统中的部分传输序列法 (PTS)<sup>[2]</sup>和选择性映射法 (SLM)<sup>[3]</sup>直接应用于 MIMO-OFDM 系统, 例如不考虑多个发射天线的额外自由度而仅做简单的扩展<sup>[4]</sup>。此外还有一些算法是直接针对 MIMO-OFDM 系统的 PAPR 降低而提出的<sup>[5-8]</sup>。在文献[5]中, 作者通过使用多个天线的额外自由度, 提出了一个基于符号旋转和反转组合的天线旋转取反 (CARI) 方案。Zoran Latinovi 和 Yeheskel Bar-Ness 提出了一个的多相交错和反转 (PII) 方法来减少 MIMO-OFDM 系统的 PAPR<sup>[6]</sup>。在上述诸多方法中, 由于增加了快速傅立叶逆变换 (IFFT) 而使得计算的复杂性变得很高。为了减少计算复杂

度 (IFFT 的数目), 文献[7]针对正交空频编码方案 (space-frequency block coding, SFBC) 的 MIMO-OFDM 系统, 提出了一种低复杂度 PAPR 降低方案, 使其性能降低了很多。

本文提出一种基于快速傅立叶变换 (FFT) 特性的多相循环移位和共轭 (polyphase circular shift and conjugate, PCSC) 方法。该方法先由一个 IFFT 运算产生一个时域序列, 然后结合快速傅立叶变换 (FFT) 的时域循环移位性和共轭性构造出不同的转换, 在时域产生更多的备选序列。为了进一步降低计算的复杂度, PCSC 法充分利用天线  $T_{x_1}$  而在天线  $T_{x_2}$  中不使用 IFFT 运算。仿真结果表明, 在子块数量和相位加权系数相同的情况下, 本文所提出的 PCSC 方法相对于 PTS 方法具有更加良好的 PAPR 降低性能。

## 1 基于正交空频编码方案的 MIMO-OFDM 系统模型

空频分组码 (SFBC) 是利用正交原理设计各发射天线上发射信号的, 是一种空间域和频域联合的正交分组编码方式。本文采用 Alamouti 编码方案的 MIMO-OFDM 系统进行阐述。输入数据为一个符号向量  $X = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$ , 将它用 Alamouti 空时编码器<sup>[9]</sup>编码为两个向量  $X_1, X_2$ , 如下所示

$$X_1 = [X(0) \quad -X^*(1) \cdots X(N-2) \quad -X^*(N-1)]^T, \quad (1a)$$

$$X_2 = [X(1) \quad X^*(0) \cdots X(N-1) \quad X^*(N-2)]^T, \quad (1b)$$

其中,  $X_1$  从第一根天线  $T_{x_1}$  发送, 同时  $X_2$  从第二根天线  $T_{x_2}$  发送,  $(\cdot)^*$  表示复共轭运算。

接收机的解调信号可由下式得到:

$$Y = H_1 X_1 + H_2 X_2 + Z \quad (2)$$

收稿日期: 2013-01-16

作者简介: 黄玲 (1976-), 女, 讲师, 在读博士, 主要研究方向为信号与信息处理。

\*基金项目: 国家自然科学基金项目 (61064003); 国家自然科学基金项目 (51165024)。

其中,  $H_1 = \text{fft}[h_1, 1, 2]$ ,  $H_2 = \text{fft}[h_2, 1, 2]$ ,  $h_1$  和  $h_2$  分别为各自的信道冲激响应。

发送的符号向量可以被描述为偶多相分量和奇多相分量。设  $X_e$  和  $X_o$  分别是长度为  $N/2$  的偶分量和奇分量, 即

$$X_e = [X(0) \ X(2) \ \cdots \ X(N-4) \ X(N-2)]^T$$

$$X_o = [X(1) \ X(3) \ \cdots \ X(N-3) \ X(N-1)]^T$$

同样, 用  $X_{1,e}$ ,  $X_{1,o}$ ,  $X_{2,e}$  和  $X_{2,o}$  表示  $X_1$  和  $X_2$  的偶分量和奇分量, 那么

$$X_{1,e} = X_e, \ X_{1,o} = -X_o^* \quad (3a)$$

$$X_{2,e} = X_o, \ X_{2,o} = X_e^* \quad (3b)$$

将方程 (3a) 和 (3b) 代入 (2), 可得到  $Y$  为

$$Y_e = H_{1,e} X_{1,e} + H_{2,e} X_{2,e} + Z_e \quad Y_o = H_{1,o} X_{1,o} + H_{2,o} X_{2,o} + Z_o$$

则空-频接收向量可以由下式估算而得:

$$\hat{X}_e = H_{1,e}^* Y_e + H_{2,o}^* Y_o^*$$

$$\hat{X}_o = H_{2,e}^* Y_e - H_{1,o}^* Y_o^*$$

设接收机的信道响应是已知的, 并且相邻的子载波之间的复信道增益大致相等, 分别用  $\hat{X}_e, \hat{X}_o$  替代  $Y_e, Y_o$ , 可以得到如下两个表达式:

$$\hat{X}_e = (|H_{1,e}|^2 + |H_{2,o}|^2) X_e + H_{1,e}^* Z_e + H_{2,o} Z_o^*$$

$$\hat{X}_o = (|H_{1,o}|^2 + |H_{2,e}|^2) X_o + H_{2,e} Z_e - H_{1,o} Z_o^*$$

由上面的推导可见, SFBC MIMO-OFDM 系统仍然具有较高的 PAPR。

### 2 峰均比 (PAPR) 描述

在单输入单输出 (single-input single-output, SISO) OFDM 系统中,  $X = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$  表示调制后输入数据符号。时域 OFDM 信号的采样复数基带信号可表示为:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} X(i) \exp(j2\pi ni/N) \quad (4)$$

其中,  $0 \leq n \leq N-1$ ,  $N$  为子载波数目。事实上, 对应于  $X$  的 IFFT, 时域信号  $x = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$  的采样信号为:

$$x = \text{IFFT}\{X_i\} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T \quad (5)$$

本文采用所谓的峰均功率比 (PAPR) 参量来估计 OFDM 信号的包络线变化, 发送信号的峰均功率比 (PAPR) 定义为:

$$PAPR = 10 \log_{10} \frac{\max_n |x_n|^2}{E(|x_n|^2)} \quad (6)$$

其中,  $E(\cdot)$  表示期望值。

由于 PAPR 是一个随机变量, 因此通常是估计它的统计特性。信号的 PAPR 的分布情况通常采用互补累积分布函数 (complementary cumulative distribution function, CCDF) 来表示, 它是计算 PAPR 超过某一门限值  $PAPR_0$  的概率。

由中心极限定理, 当选择了一个较大的值  $N$  (一般情况下,  $N \geq 64$ ) 时, 信号  $x_n$  的实部和虚部具有高斯分布, 而其幅值具有瑞利分布。CCDF 由下式给出:

$$\Pr(PAPR > PAPR_0) = 1 - (1 - \exp(-PAPR_0))^N \quad (7)$$

其中,  $PAPR_0 \geq 0$ 。

MIMO-OFDM 系统中的 PAPR 被定义为所有并行发射天线 PAPR<sub>s</sub> 的最大值, 而每根天线的 PAPR 是用 SISO-OFDM 系统的 PAPR 定义的。因此, MIMO-OFDM 系统的 PAPR 可表

示为:

$$PAPR_{\text{MIMO-OFDM}} = \arg \min \{ \max_{1 \leq i \leq Tx} PAPR_i \} \quad (8)$$

其中,  $PAPR_i$  ( $1 \leq i \leq Tx$ ) 由式 (3) 得到。

### 3 改进的算法

在提出的 PCSC 方法中, 对序列采用了特定的转换产生更多可供选择的备选序列, 而不是通过增加 IFFT 运算产生更多的可供替代的备选信号序列。首先, 符号向量  $X$  被编码为两个向量  $X_e$  ( $v=1,2$ ) (式(1a,1b)), 然后每个向量  $X_e(\cdot)$  被分为两个子块  $X_e^{(1)}$  和  $X_e^{(2)}$ , 因此编码序列为  $X_e = \sum_{m=1}^2 X_e^{(m)}$  ( $v=1,2$ )。为简化起见, 认为在天线  $Tx_1$  中只有序列  $X_1$ , 详细的描述如下:

$$X_1^{(0)} = [X(0) \ 0 \ X(2) \ 0 \ \cdots \ X(N-2) \ 0]^T$$

$$X_1^{(2)} = [0 \ -X^*(1) \ 0 \ -X^*(3) \ \cdots \ 0 \ -X^*(N-1)]^T$$

通过对  $X_1^{(1)}$  和  $X_1^{(2)}$  采用不同的方法, 进行一定的转换可以形成不同的序列, 即

$$\hat{x}_{1,n} = T[X_1^{(m)}] \quad (m=1,2).$$

这里, 以  $X_1^{(1)}$  为例阐述算法的转换过程。

转换 I: 子块  $X_1^{(0)}(k)$  的共轭转换。

设  $x_{1,n}^{(0)} \leftrightarrow X_1^{(0)}(k)$  为一对 FFT 变换对, 即

$$x_{1,n}^{(0)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{(0)}(k) e^{jnk2\pi/N}$$

那么,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_1^{(0)}(k)]^* e^{jnk2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{(0)}(k) e^{-jnk2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{(0)}(k) e^{j(N-n)k2\pi/N}$$

因此, 子块  $X_1^{(0)}(k)$  的共轭的 FFT 变换对可表示为  $\hat{x}_{1,n} = [x_{1,N-n}^{(0)}]^* \leftrightarrow [X_1^{(0)}(k)]^*$ 。在转换 I 中, 只用到了一个 IFFT 块, 同时产生了其他的备选信号。

转换 II: 用一个线性相位序列  $\exp(-j2\pi kp/N)$  乘以  $X_1^{(0)}(k)$ , 可得到如下 FFT 表达式:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{(0)}(k) e^{-j2\pi kp/N} e^{jnk2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{(0)}(k) e^{-j(n-p)k2\pi/N}$$

即  $\hat{x}_{1,n} = x_{1,n-p}^{(0)} \leftrightarrow X_1^{(0)}(k) \cdot \exp(-j2\pi kp/N)$ 。当从一个四元集  $p \in [0, N/4, N/2, 3N/4]$  选取  $p$  时, 它的结果  $\exp(-j2\pi kp/N) \in [1, (-j)^k, (-1)^k, j^k]$ 。在转换 II 中, 只用到了一个 IFFT 块, 并产生了其他三个备选信号。

对  $X_1^{(2)}$  进行相同的转换操作, 结果是除了正交序列 ( $x_{1,n}^{(0)}, \hat{x}_{1,n}^{(2)}$ ), 还会产生五个备选信号对 ( $\hat{x}_{1,n}^{(0)}, \hat{x}_{1,n}^{(2)}$ )。

产生的备选信号 ( $x_{1,n}^{(0)}, \hat{x}_{1,n}^{(0)}, x_{1,n}^{(2)}, \hat{x}_{1,n}^{(2)}$ ) 乘以不同的相位序列  $b^{(m)} = [b_{m,0}, b_{m,1}, \dots, b_{m,N-1}]$ , 其中,  $b_{m,j} \in \{\pm 1, \pm j\}$  ( $j=0, \dots, N-1$ )。本文是分别从备选信号 ( $x_{1,n}^{(0)}, \hat{x}_{1,n}^{(0)}$ ) 及 ( $x_{1,n}^{(2)}, \hat{x}_{1,n}^{(2)}$ ) 中选取具最小 PAPR 的最优信号 ( $\hat{x}_{1,n}^{(0)}, \hat{x}_{1,n}^{(2)}$ )。改进算法的简化框图如图 1 所示。

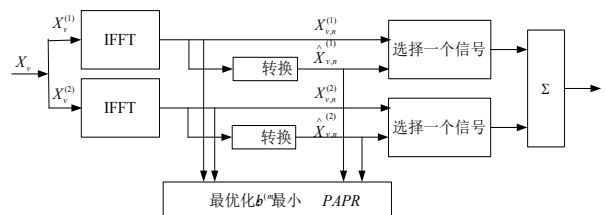


图1 改进算法的简化框图

对天线  $Tx_2$ , 没有必要进行相同的操作。但是, 为了降低计算复杂度, 将充分利用天线  $Tx_1$  中的  $X_1^{(1)}$  和  $X_1^{(2)}$ , 而在天线  $Tx_2$  中不进行 IFFT 运算。这里, 向量  $X_2$  被分成两个子块  $X_2^{(1)}$  和  $X_2^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} X_2^{(1)} &= [X(1) \ 0 \ X(3) \ 0 \ \cdots \ X(N-1) \ 0]^T \\ X_2^{(2)} &= [0 \ X^*(0) \ 0 \ X^*(2) \ \cdots \ 0 \ X^*(N-2)]^T \end{aligned}$$

因此,  $X_2^{(1)}(k) = -[X_1^{(2)}(k+1)]^*$ ,  $X_2^{(2)}(k) = [X_1^{(1)}(k-1)]^*$ 。

$X_2^{(1)}(k)$  的 IFFT 为:

$$\begin{aligned} x_{2,n}^{(1)} &= IFFT[X_2^{(1)}(k)] = IFFT\{-[X_1^{(2)}(k+1)]^*\} \\ &= \frac{-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_1^{(2)}(k+1)]^* e^{jk2\pi/N} = \frac{-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{(2)}(k+1) e^{-jk2\pi/N} \\ &= \frac{-1}{N} \sum_{m=1}^N X_1^{(2)}(m) e^{-jm(m-1)2\pi/N} = \frac{-1}{N} \sum_{m=1}^N X_1^{(2)}(m) e^{-jm2\pi/N} \int e^{-jn2\pi/N} = -x_{1,n}^{(2)} \cdot e^{-jn2\pi/N} \end{aligned}$$

同样,  $X_2^{(2)}(k)$  的 IFFT 为:

$$\begin{aligned} x_{2,n}^{(2)} &= IFFT[X_2^{(2)}(k)] = IFFT\{[X_1^{(1)}(k-1)]^*\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_1^{(1)}(k-1)]^* e^{jk2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{(1)}(k-1) e^{-jk2\pi/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-1}^{N-2} X_1^{(1)}(m) e^{-jm(m+1)2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=-1}^{N-2} X_1^{(1)}(m) e^{-jm2\pi/N} \int e^{jn2\pi/N} = x_{1,n}^{(1)} \cdot e^{jn2\pi/N} \end{aligned}$$

采用转换 I 和转换 II 生成  $x_{2,n}^{(1)}$  和  $x_{2,n}^{(2)}$ , 以产生新的信号。通过对  $x_{2,n}^{(m)}(m=1,2)$  进行合并转换, 可以得到五个新的备选信号对  $\tilde{x}_{2,n}^{(m)}(m=1,2)$ 。利用最小最大准则, 可以得到最优相位序列和信号:

$$\{\tilde{b}^{(1)}, \tilde{b}^{(2)}, \tilde{x}_{1,n}^{(1)}, \tilde{x}_{1,n}^{(2)}\} = \arg \min_{\substack{\{b^{(1)}, b^{(2)}, x_{1,n}^{(1)}, x_{1,n}^{(2)}\} \\ \substack{b^{(1)}, b^{(2)} \in \{0, \pm\pi\} \\ x_{1,n}^{(1)}, x_{1,n}^{(2)} \in \{1, -1\}}} \{\max_{l=1,2} (PAPR(\tilde{x}_{1,n}^{(l)}))\}$$

#### 4 仿真结果

通过 matlab 仿真对传统的 PTS 法及本文提出的 PCSC 法的 PAPR 降低性能进行研究。仿真时, OFDM 系统的子载波数为 512 个, 采用 QPSK 调制对相位序列  $b^{(m)}(n) \in \{\pm 1, \pm j\}$  进行调制。并用互补累计分布函数 (CCDF) 来估计 OFDM 系统的 PAPR, 实现对传统的 PTS 法与 PCSC 算法的性能对比。在下列结果中, PTS 法中的输入信号被分成两个子块, 每根天线上仿真产生  $10^3$  个随机 OFDM 信号。

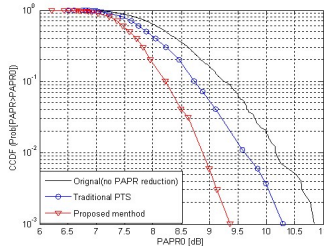


图2 传统PTS法与提出的PCSC法PAPR降低性能对比

如图2所示, 分别为原始(无PAPR降低)、传统PTS法及提出的PCSC法的PAPR的CCDF的性能比较。例如, 当给定  $CCDF=0.1\%$  时, 正常OFDM系统的PAPR为10.8dB, 但采用PTS法和PCSC法分别为10.3dB和9.4dB。当子块数相同时, 提出的PCSC法能够比PTS法得到更多的备选序列, 因此提出的PCSC法降低PAPR的性能优于PTS法。

图3所示为提出的PCSC法降低PAPR的性能比较。如PC-

SC法中采用转换II时, 0.1% PAPR 处比采用转换I提高了大约0.5dB; 而当在PCSC法中同时采用转换I和转换II时, 0.1% PAPR 处比采用转换II又提高了大约0.8dB。

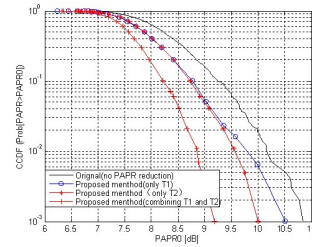


图3提出的PCSC法PAPR降低性能对比

#### 5 结论

传统的PTS法能够有效地降低PAPR, 但是以高的复杂度为代价。本文提出了一种改进的PCSC方法, 一个时域序列是由一个IFFT运算产生, 然后结合快速傅立叶变换(FFT)的时域循环移位性和共轭性构造出不同的转换, 它可以在时域产生更多的备选序列, 增加更多交替的OFDM信号序列。为了进一步降低计算的复杂度, PCSC法充分利用天线  $Tx_1$  而在天线  $Tx_2$  中不使用IFFT运算。虽然本文仅考虑两个发射天线的情况, 但作为推广, 4个天线的情况下  $X$  也可以考虑被编码成四个向量  $X_v(v=1,2,3,4)$ , 本文提出的方法仍然是适用的。

#### 参考文献

- [1] Li Suoping and Gong Pengcheng, "Sub-Optimum Cyclically Shifted Sequences for PAPR Reduction in OFDM Systems," Signal Processing, vol. 26, no. 5, pp. 767-770, may. 2010.
- [2] Tao Jiang and Yiyan Wu, "An Overview: Peak-to-Average Power Ratio Reduction Techniques for OFDM Signals," IEEE Trans. Broadcasting, vol. 45, no. 2, pp. 257-267, Jun. 2008.
- [3] R.W. Bäuml, R. F. H. Fischer and J. B. Huber, "Reducing the peak-to-average power ratio of multicarrier modulation by selected mapping," Electron. Lett., vol. 32, no. 22, pp. 2056-2057, Oct. 1996.
- [4] Y.-L. Lee, Y.-H. You, W.-G. Jeon, J.-H. Paik and H.-K. Song, "Peak-to-average power ratio in MIMO-OFDM systems using selective mapping," IEEE Commun. Lett., vol. 7, pp. 575-577, Dec. 2003..
- [5] Mizhou Tan, Zoran Latinovi c and Yeheskel Bar-Ness, "STBC MIMO-OFDM Peak-to-Average Power Ratio Reduction by Cross-Antenna Rotation and Inversion," IEEE Commun. Lett. ,vol. 9, no. 7, pp. 592-594, Jul. 2005.
- [6] Zoran Latinovi c and Yeheskel Bar-Ness, "SFBC MIMO-OFDM Peak-to-Average Power Ratio Reduction by Polyphase Interleaving and Inversion," IEEE Commun. Lett. , vol. 10, no. 4, pp. 266-268, Apr. 2006.
- [7] Sen-Hung Wang and Chih-Peng Li, "A Low-Complexity PAPR Reduction Scheme for SFBC MIMO-OFDM Systems," IEEE Signal Processing Lett. , vol. 16, no. 11, pp. 941-944, Nov. 2009.
- [8] Myung-Sun Baek, Mi-Jeong Kim, Young-Hwan You and Hyoun-Kyu Song, "Semi-Blind Channel Estimation and PAR Reduction for MIMO-OFDM System with Multiple Antennas," IEEE Trans. Broadcasting, vol. 16, no. 11, pp. 414-424, Dec. 2004.
- [9] King F. Lee and Douglas B. Williams, "A space-frequency transmitter diversity technique for OFDM systems," in Proc. IEEE GLOBECOM, San Francisco, CA, pp. 1473-1477, 2000.