

# 磁场对含有双温离子非均匀尘埃等离子体 中三维孤波特性的影响

马栋林<sup>1</sup>, 张玺君<sup>2</sup>

(1. 兰州理工大学信息中心, 兰州 730050; 2. 兰州理工大学计算机与通信学院, 兰州 730050)

**摘要:** 利用数值方法研究了双温离子、磁场、非均匀性和波的斜向传播对三维非线性尘埃声孤波振幅和宽度的影响。运用约化摄动法得到描述三维非线性尘埃声孤波的非标准变系数 Korteweg-de Vries (KdV) 方程。然后把非标准变系数 KdV 方程变为标准变系数 KdV 方程, 并且得到了此标准变系数 KdV 方程的近似解析解。研究表明, 此系统中存在着两种形式的孤波, 即压缩型孤波和稀疏型孤波, 外部磁场对三维非线性尘埃声孤波的宽度有影响, 而对其振幅没有影响。此外, 波的相速度与波的斜向传播和非均匀性有着非常紧密的联系。

**关键词:** 尘埃等离子体; 双温离子; 磁场; 非均匀性

中图分类号: O534

文献标志码: A

## 1 引言

尘埃等离子体广泛存在于星际云、彗星大气、行星环、黄道光、电离层和磁层等空间环境<sup>[1-5]</sup>中。尘埃等离子体是一种含有电子、离子和尘埃颗粒的电离气体。与等离子体中其它荷电离子相比, 尘埃颗粒具有大质量和高的带负电量的特性, 其荷质比远远小于电子和离子的荷质比。因此, 其运动行为与其它带电离子也大不相同, 其存在会显著影响等离子体的集体行为并激发非常丰富的波动模式[如尘埃声波(DAW)、尘埃离子声波(DAIW)等<sup>[5]</sup>、不稳定性 and 大量奇特的新现象<sup>[6]</sup>。最近的研究表明, 非均匀性是尘埃等离子体的一个基本性质, 并且非均匀尘埃等离子体广泛存在于实验室和空间环境。在氩直流辉光放电中, 对尘埃密度扰动的实验和观察表明, 尘埃密度扰动的相速度沿着等离子体柱有很大变化<sup>[7]</sup>。这些实验数据的数值分析已经指出绝大部分等离子体平衡参数沿着放电管变化。

大量的实验和理论研究表明, 非均匀性对波的传播有着非常重要的影响, 不可忽略<sup>[8-11]</sup>。Shalini Bagchi研究了磁场对含有双温离子磁化热尘埃等离子体中尘埃声孤波的影响, 研究结果发现在此系统中存在着压缩型孤波和稀疏型孤波<sup>[12]</sup>。谢等人研究了具有电荷扰动时含有双温离子的尘埃等离子体中小振幅和大振幅尘埃声孤波的特性<sup>[13]</sup>。研究表明, 双温离子的存在必须满足一个条件, 即两种离子的能量交换率  $E_R$  远远小于系统的特征频率  $\omega_{pd} = \sqrt{4\pi n_{d0} e^2 z_d^2 / m_d}$ 。其中,  $n_{d0}$  为未扰动的尘埃颗粒的数密度;  $z_d$  为尘埃颗粒的带电量;  $m_d$  为尘埃颗粒的质量。假设两种离子具有相同的质量和带电量, 但是一种离子具有比较低的温度  $T_{i1}$ , 另一种离子具有比较高的温度  $T_{i2}$ 。此外, 离子温度满足的关系为  $T_{i1} \ll T_{i2} \ll T_e$ 。  $E_R = \Gamma / v_{i2}^2$ , 其中  $v_{i2} = \sqrt{T_{i2} / m_i}$ ,  $\Gamma = 4\pi n_{i0} e^4 \ln \Lambda / m_i^2$ , 库伦对数  $\ln \Lambda \approx 10 \sim 15$ ,  $n_{i0}$  为未扰动的低温离子数密度<sup>[13, 14]</sup>。

收稿日期: 2013-07-17; 修订日期: 2014-02-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61164006)

作者简介: 马栋林(1971-), 男, 回族, 甘肃兰州人, 副教授, 学士, 主要从事于等离子体物理的研究。

此外,对于含有双温离子尘埃等离子体中非线性波的研究大多数都集中于均匀一维情况,对于非均匀尘埃等离子体中三维非线性波的研究非常少。研究表明,一维波动不能够很好地解释低极光区域和较高极光区域中的波<sup>[14]</sup>。对于高维的尘埃等离子体系统,系统的各向异性会显著改变着波的结构和稳定性。所以,含有双温离子的非均匀尘埃等离子体中三维非线性波的研究非常重要。

本文运用约化摄动法得到描述含有双温离子磁化非均匀尘埃等离子体中三维尘埃声孤波的变系数Korteweg-de Vries(KdV)方程,分别从理论和数值上研究了双温离子、非均匀性、斜向传播以及外部磁场对非均匀尘埃等离子体中三维孤波的影响。研究表明,此系统中存在着压缩型孤波和稀疏型孤波。非均匀性、斜向传播以及外部磁场对非均匀尘埃等离子体中三维孤波有着不可忽略的影响。

## 2 模型和基本方程

非均匀尘埃等离子体由大质量带负电量的尘埃颗粒、满足玻尔兹曼分布的电子、玻尔兹曼分布的高温离子和低温离子四种成分组成。假定非均匀和外部磁场沿 $x$ 方向 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{x}_0$  ( $\mathbf{x}_0$ 为 $x$ 方向的单位矢量),无扰动时电中性条件为 $n_{i0}(x) + n_{ih0}(x) = n_{d0} + n_{e0}(x)$ 。其中, $n_{d0}$ (认为是常数)、 $n_{ih0}(x)$  [ $n_{i0}(x)$ ]、 $n_{e0}(x)$ 分别为无扰动的尘埃颗粒、高温(低温)离子和电子的数密度。对尘埃声波,流体力学方程组为:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_d}{\partial t} + \nabla \cdot (n_d \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = [\nabla \phi - \omega_{cd}(\mathbf{V} \times \mathbf{x}_0)] \\ \nabla^2 \phi = n_d + n_e - n_{i1} - n_{ih} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{V} = (u, v, w)$ ;  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ 。空间坐标,时间和速度 $\mathbf{V}$ 分别用等离子体周期 $\omega_{pd}^{-1} = \sqrt{m_d / 4\pi n_{d0}(0) Z_{d0}^2(0) e^2}$ 、德拜长度 $\lambda_{Dd} = C_d / \omega_{pd}$ 和有效声速 $C_d = \sqrt{Z_{d0}(0) T_{eff} / m_d}$  {  $T_{eff} = Z_{d0} n_{d0}(0) /$

$[n_{e0}(0) / T_e + n_{i0}(0) / T_{i1} + n_{ih0}(0) / T_{ih}]$ ,  $T_e$ 、 $T_{ih}$  ( $T_{i1}$ )分别为电子、高温(低温)离子温度;无量纲化。尘埃颗粒的数密度由 $n_{d0}$ 无量纲化。静电势 $\phi$ 由 $T_{eff} / e$ 无量纲化。 $n_d, n_e, n_{i1}, n_{ih}$ 由 $n_{d0}(0)$ 无量纲化。

满足玻尔兹曼分布的电子,高温和低温离子密度分别为:

$$n_e = n_{e0}(x) \exp(s \beta_1 \phi) \quad (2)$$

$$n_{ih} = n_{ih0}(x) \exp(-s \beta_2 \phi) \quad (3)$$

$$n_{i1} = n_{i0}(x) \exp(-s \phi) \quad (4)$$

其中, $\beta_1 = T_{i1} / T_e$ ,  $\beta_2 = T_{ih} / T_{i1}$ ,  $s = T_{eff} / T_{i1} = (\delta_1 + \delta_2 + 1) / (\beta_1 + \beta_2 \delta_2 + \delta_1)$ ,  $\delta_1 = n_{i0}(0) / n_{e0}(0)$ ,  $\delta_2 = n_{ih0}(0) / n_{e0}(0)$ 。

## 3 非线性方程的导出

在长波近似下,利用非均匀等离子体中的约化摄动法<sup>[15, 16]</sup>推导出尘埃粒子所满足的非线性方程,坐标伸展变换为:

$$\begin{cases} X = \varepsilon^{3/2} x \\ \xi = \varepsilon^{1/2} (l_x \int_0^x \frac{1}{V_0(x')} dx' + l_y y + l_z z - t) \end{cases} \quad (5)$$

上面的坐标变换适用于沿着零阶流体速度和场的空间非均匀等离子体。式中, $\varepsilon$ 为描述非线性强度的小参量; $V_0(x)$ 为移动体系的速度; $l_x$ 、 $l_y$ 和 $l_z$ 分别为波矢 $\mathbf{k}$ 沿 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴的方向余弦,于是有 $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$ 。自变量的展开形式为:

$$\begin{cases} n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots \\ u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ v = \varepsilon^{3/2} v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \\ w = \varepsilon^{3/2} w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\ \phi = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots \end{cases} \quad (6)$$

将式(2)、(3)、(4)和(6)代入式(1),并比较 $\varepsilon$ 各幂次的系数,可得一阶近似为:

$$u_1 = \frac{l_x}{V_0} \phi_1, \quad n_1 = B \phi_1, \quad V_0^2 = \frac{l_x^2}{B} \quad (7)$$

式中, $B = s \beta_1 n_{e0}(x) + s n_{i0}(x) + s \beta_2 n_{ih0}(x)$ 。由式(7)可以看出,波的相速度与双温离子、波的斜向传播以及非均匀性有着密切的联系。

高次幂的连续性方程、 $x$ 方向的动量方程和泊松方程为：

$$\begin{cases} -\frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial X} + l_y \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + l_z \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{l_x}{V_0} \frac{\partial (u_2 + n_1 u_1)}{\partial \xi} = 0 \\ -\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_1}{\partial X} + \frac{l_x}{V_0} (u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi}) = 0 \\ [\frac{l_x^2}{V_0^2} + (1 - l_x^2)] \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} - n_2 - B\phi_2 - C\phi_1^2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $C = s^2[\beta_1^2 n_{e0}(x) + n_{i0}(x) + \beta_2^2 n_{ih0}(x)]/2$ 。利用方程(7)和(8)消去  $n_2$ 、 $u_2$ 、 $v_2$ 、 $w_2$  和  $\phi_2$  得到：

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial X} + A\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + D \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3} + E\phi_1 = 0 \quad (9)$$

式中, 系数  $A$ 、 $D$ 、 $E$  分别为  $A = -\frac{V_0}{2l_x}[3B^2 + 2C]$ 、 $D = \frac{V_0}{2l_x}[(1 - l_x^2)(B + \frac{1}{\omega_{cd}^2})]$ 、 $E = \frac{1}{2} \frac{d}{dX} \ln(\frac{1}{V_0})$ 。式(9)为描述含有双温离子的非均匀磁化尘埃等离子体中三维非线性尘埃声孤波的非标准变系数KdV方程。系数  $A$ 、 $D$  分别为熟悉的非线性系数和色散系数, 系数  $E$  为由非均匀性引起的。

#### 4 近似解

式(9)的精确解很难给出, 下面给出此方程的近似解。系数  $E$  与非均匀性有关, 所以有  $\phi_1 = \phi_1^0(X)\phi(\xi, X)$ ,  $\phi_1^0(X) = \exp[-\int_0^X E(X'dX')] = (1/V_0)^{-1/2}$ 。于是, 式(9)变为标准的变系数KdV方程：

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial X} + A'\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + D \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3} = 0 \quad (10)$$

式中,  $A' = A\phi_1^0$  使  $\phi_1 = \phi$ 。为了得到方程(10)的近似解对方程(10)作行波变换: 即  $\eta = \xi - U_0 X$ , 考虑到边界条件, 当  $\eta \rightarrow \pm\infty$  时,  $\phi \rightarrow 0, d\phi/d\eta \rightarrow 0, d^2\phi/d\eta^2 \rightarrow 0$ , 所以式(10)的定态解<sup>[17]</sup>为:

$$\phi = \phi_m \operatorname{sech}^2[(\xi - U_0 X)/\delta] \quad (11)$$

波的振幅  $\phi_m$  和宽度  $\delta$  分别为:

$$\phi_m = 3U_0/A', \quad \delta = \sqrt{4D/U_0} \quad (12)$$

其中,  $U_0$  为被尘埃声速度无量纲化的波速, 其值为常量( $U_0 = 1$ )。

由系数  $A'$  和  $A$  的表达式以及式(12)可以看出, 孤波的振幅与双温离子的温度和数密度、非均匀性、波的斜向传播 ( $l_x$ ) 有关而与磁场的大小 ( $\omega_{cd}$ ) 无关。由系数  $D$  的表达式和式(12)可以看出, 波的宽度与非均匀性、双温离子、波的斜向传播以及磁场有关。

#### 5 数值结果和讨论

Gill<sup>[18]</sup>等人研究了含有双温离子的尘埃等离子体中孤波的传播特性, 但是没有考虑非均匀性和磁场对非线性尘埃声孤波传播特性的影响。为了研究含有双温离子的非均匀磁化尘埃等离子体中三维非线性尘埃声孤波的传播特性, 用数值方法求解方程(12)。数值结果表明, 低温离子的温度、高温离子的温度、低温离子的数密度和高温离子的数密度对三维尘埃声孤波特性的影响和一维情况的相同, 即压缩型孤波的振幅随着高温离子数密度的增加而增加, 但是随着低温离子数密度、高温离子和低温离子的温度的增加而减小, 稀疏型孤波的振幅随着高温离子和低温离子数密度、高温离子和低温离子的温度的增加而增加。对于孤波宽度来说, 随着高温离子数密度的增加而减小, 但是随着低温离子数密度、高温离子和低温离子的温度的增加而增加。

图1给出了尘埃声孤波的振幅随非均匀性和  $l_x$  的变化情况。从图1中可以看出, 此系统中存在着稀疏型孤波 ( $\phi_m < 0$ ) 和压缩型孤波 ( $\phi_m > 0$ ), 并且压缩型孤波的振幅随着非均匀性的增强而减小且随着  $l_x$  的增大而增大, 但是稀疏型孤波的振幅随非均匀性和  $l_x$  的变化是相反的, 即随着非均匀性的增强和  $l_x$  的增大而减小。图2和图3给出了尘埃声孤波宽度随非均匀性、 $l_x$  和外部磁场的变化情况。

由图2和图3可以看出, 孤波的宽度随着非均匀性和磁场的增强而增大, 但是随着  $l_x$  的增大而减小。由以上讨论可知, 和均匀情况相比考虑了非均匀性以后, 压缩型孤波的振幅增加了而稀疏型孤波的振幅减小了。此外, 非均匀性使孤波宽度增加。

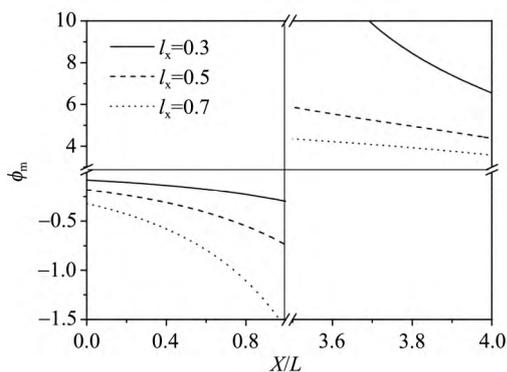


图 1 尘埃声孤波的振幅随  $X/L$  和  $l_x$  的变化关系

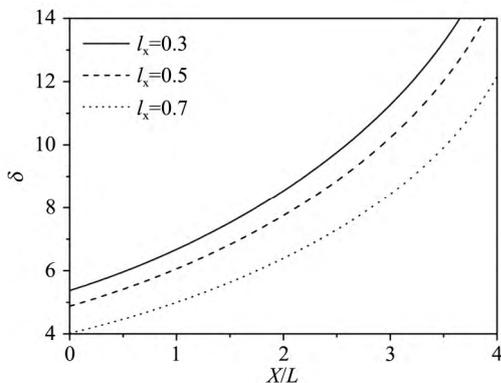


图 2 尘埃声孤波的宽度随  $X/L$  和  $l_x$  的变化关系

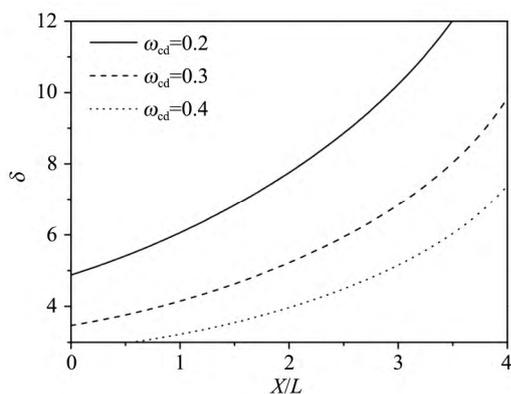


图 3 尘埃声孤波的宽度随  $X/L$  和  $\omega_{cd}$  的变化关系

## 6 结论

总之, 本文从理论和数值上研究了双温离子、外部磁场、非均匀性和斜向传播对尘埃等离子体中三维非线性尘埃声孤波的影响。运用约化摄动法得

到描述含有双温离子的非均匀磁化尘埃等离子体中三维非线性尘埃声孤波的非标准变系数KdV方程。然后把非标准KdV方程变为标准变系数KdV方程, 并且得到了标准变系数KdV方程的近似解析解。由此解析解可以看出, 双温离子的温度和数密度、非均匀性、波的斜向传播和磁场对三维非线性尘埃声孤波的特性有很大的影响。外部磁场对三维非线性尘埃声孤波的宽度有影响, 而对其振幅没有影响。

## 参考文献:

- [1] Nakamura Y. Experiments on ion-acoustic shock waves in a dusty plasma [J]. Phys. Plasmas, 2002, 9: 440.
- [2] 石志东, 李中元. 太阳系尘埃等离子体研究 [J]. 天文学进展, 1998, 16: 227-236.
- [3] 石志东, 李中元. 太阳系中彗星和行星环尘埃等离子体研究 [J]. 中国科学院上海天文台年刊, 2000, S1: 237-244.
- [4] Yasmin S, Asaduzzaman M, Mamun A A. Dust ion-acoustic shock waves in nonextensive dusty plasma [J]. Astrophysics and Space Science, 2013, 343: 245-250.
- [5] Boufendi L, Plain A, Blondeau J P, et al. Measurements of particle size kinetics from nanometer to micrometer scale in a low-pressure argon-silane radio-frequency discharge [J]. Appl. Phys. Lett., 1992, 60: 169.
- [6] Rao N N, Shukla P K, Yu M Y. Dust-acoustic waves in dusty plasmas [J]. Planet. Space Sci., 1990, 38: 543-546.
- [7] Samaryan A, Chemyshev A, Petrov O, et al. An analysis of oscillations in dust plasma structures [J]. J. Exp. Theor. Phys., 2001, 92: 454-461.
- [8] 陈银华, 王舸, 陆玮. 低  $\beta$  声尘埃等离子体中尘埃-动力学阿尔文孤立波 [J]. 核聚变与等离子体物理, 2000, 20: 141-146.
- [9] Mowafy A E, El-Shewy E K, Moslem W M, et al. Effect of dust charge fluctuation on the propagation of dust-ion acoustic waves in inhomogeneous mesospheric dusty plasma [J]. Phys. Plasmas, 2008, 15: 073708.
- [10] El-Bendary A A, El-Taibany W F, El-Taibany Kh H. Cherenkov radiation waves in inhomogeneous dusty plasma [J]. Physics of Wave Phenomena, 2013, 21: 226-230.
- [11] Zhang L P, Xue J K. Multidimensional nonlinear dust acoustic shock waves in nonuniform magnetized dusty plasmas with nonadiabatic dust charge fluctuation [J]. Phys. Plasmas, 2008, 15: 053706.
- [12] Bagchi S, Misra A P, Roy Chowdhury K, et al. Nonlinear oscillations in a magnetized dusty plasma with two-temperature trapped ions [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 40: 758-765.
- [13] Xie B S, He K F, Huang Z Q. Dust-acoustic solitary waves and double layers in dusty plasma with variable

- dust charge and two-temperature ions [J]. Phys. Plasmas, 1999, 6: 3808.
- [14] Landau L D, Lifshitz E M. Course of theoretical physics [M]. New York: Butterworth Heinemann, 1974.
- [15] Taniuti T, Yajima N. Perturbation method for a nonlinear wave modulation [J]. J. Math. Phys., 1969, 10: 1369.
- [16] Asano N, Ono H J. Nonlinear dispersive or dissipative waves in inhomogeneous media [J]. Phys. Soc. Jpn., 1971, 31: 1830–1836.
- [17] Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation [J]. Phys. Soc. Jpn., 1972, 32: 1681–1861.
- [18] Gill T T, Saini N S, Kaur H. The Kadomstev-Petviashvili equation in dusty plasma with variable dust charge and two temperature ions [J]. Chaos, Solitons and Fractals 2006, 28: 1106–1111.

## Effect of magnetic field on solitary waves in inhomogeneous dusty plasmas with two temperature ions

MA Dong-lin<sup>1</sup>, ZHANG Xi-jun<sup>2</sup>

(1. Information Center of Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050;

2. School of computer and communication, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050)

**Abstract:** The effect two temperature ions, the magnetic field, the inhomogeneity and the oblique propagation of waves on the amplitude and the width of the three dimensional dust acoustic solitary waves are studied numerically. By using the reductive perturbation theory, a modified variable coefficients Korteweg-de Vries (KdV) equation is derived. The approximate analytical solution of standard variable coefficients KdV equation derived from modified variable coefficients KdV equation is obtained. The results show that both compressive and rarefactive solitary waves exist. The amplitude of solitary waves is independent of the external magnetized field, but the width of solitary waves is dependent of the external magnetized field. Moreover, the phase velocity of waves is dependent of the oblique propagation of waves and inhomogeneity.

**Key words:** Dusty plasmas; Two ion temperature; Magnetic field; Inhomogeneity