

# 非线性系统在任意初值下的 PID 型迭代学习控制

郝晓弘<sup>1</sup> 李卓悦<sup>2</sup> 王 华<sup>2</sup>

(兰州理工大学计算机与通信学院 兰州 730050)<sup>1</sup>

(兰州理工大学电气工程与信息工程学院 兰州 730050)<sup>2</sup>

**摘 要** 针对一类在有限时间区间上重复运行的非线性系统,给出了一种可以解决迭代学习控制中任意初值问题的 PID 型迭代学习算法及其收敛条件。采用算子理论证明了该算法的收敛性,结果表明该算法不仅有效解决了迭代学习控制的初值问题,而且放宽了收敛条件。仿真分析及与 PD 型迭代学习控制算法的仿真结果的对比证明,非线性系统在任意初值条件下经过 PID 型迭代学习后跟踪精度显著提高,输出误差曲线更快速趋于零,表明了该算法的有效性。

**关键词** 非线性系统,任意初值,PID 迭代学习控制,算子理论

中图分类号 TP18 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.2.059

## PID-type Iterative Learning Control for a Class of Nonlinear Systems with Arbitrary Initial Value

HAO Xiao-hong<sup>1</sup> LI Zhuo-yue<sup>2</sup> WANG Hua<sup>2</sup>

(School of Computer and Communication, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)<sup>1</sup>

(School of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)<sup>2</sup>

**Abstract** The paper gave an PID-type iterative learning control algorithm with initial state study aiming at a class of nonlinear system running repeatedly in limited interval. Operator theory proves the validity of the algorithm. The algorithm not only solves initial state problem of the iterative learning control, but also relaxes the convergence conditions. Results of comparing the simulation analysis of PID-type iterative learning control algorithm with the simulation analysis of PD-type iterative learning control algorithm show that the tracking accuracy of nonlinear system in the initial state conditions is significantly improved after PID-type iterative learning, and the output error curve tends to zero more quickly. The results illustrate the effectiveness of the algorithm.

**Keywords** Nonlinear system, Arbitrary initial value, PID-type iterative learning control, Operator spectral theory

20 世纪 80 年代,日本学者 Arimoto 提出了迭代学习控制的思想<sup>[1]</sup>。该方法是一种仿效人类的学习行为获取学习经验的过程,采用的是一种“在重复中学习”的学习策略,具有记忆系统和对积累经验的修正机制,它以系统的实际输出与期望输出的偏差修正不理想的控制信号,产生新的控制信号,使被控系统的跟踪性能得以提高。迭代学习控制的初始条件是指在每次迭代开始时,为保证控制系统的收敛性,对系统迭代初始点的重复定位操作所限定的条件<sup>[2]</sup>。目前多数研究都假定被控对象在每次运行时的初值均精确地在期望轨迹上。然而,在实际工程应用中不仅不易求得期望跟踪轨迹的初值,而且每次重复定位操作往往会引起迭代初值相对于期望初值的偏移。

初值问题是迭代学习控制的重要问题之一,国内外学者对此也作了许多研究。Lee 等<sup>[3]</sup>针对连续线性系统,讨论了存在固定初始偏差时 D 型和 PD 型迭代学习控制问题,结果表明具有固定初始误差优于具有变化的初始误差。林辉<sup>[4]</sup>研究了当初始偏差很大时,迭代学习控制仍然可以收敛到真值;

孙明轩等<sup>[5]</sup>讨论了放宽常规迭代学习控制方法的初始定位条件,它允许一定的定位误差。在迭代中不需要定位在某一具体位置上,使得学习控制系统具有鲁棒收敛性;任雪梅等<sup>[6]</sup>给出了同时进行系统的输入和初值的学习,在学习开始时对系统的初始状态无要求,结果表明了这种方法的可行性。姚仲舒等<sup>[7]</sup>提出了迭代学习控制器在频域中设计的思想,给出了在任意初值下迭代学习控制算法收敛的充分条件,证明了经过逐次迭代后系统实际输出信号对期望输出信号的逼近轨迹,输出跟踪误差将一致有界,且与期望输出状态和期望输入无关。文献<sup>[8,9]</sup>利用相同的控制策略给出了任意初值下的迭代学习控制算法的收敛条件。

论文针对一类具有重复运行性质的非线性时变系统,提出了一种在任意初值下的开环 PID 型迭代学习控制算法,解决了迭代学习控制中的初值问题。理论证明了该算法的收敛性并且收敛条件相比以范数形式的收敛条件放宽了;仿真研究结果表明,经过该算法,非线性系统对期望轨迹实现了完全跟踪。

到稿日期:2014-12-20 返修日期:2015-04-30 本文受国家自然科学基金(61263008)资助。

郝晓弘(1960—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为学习控制、电机控制技术、现场总线技术、机器人技术等,E-mail:haoxhlut@163.com;李卓悦(1989—),女,硕士,主要研究方向为学习控制理论及应用,E-mail:345939164@qq.com(通信作者);王 华(1987—),女,硕士,主要研究方向为学习控制理论及应用。

# 1 问题的描述

针对以下具有重复运行性质的一类非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(t, x_k(t)) + B(t)u_k(t) \\ y_k(t) = g_x(t, x_k(t)) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $t \in [0, T]$ ,  $x_k(t) \in R^n$  为系统的状态,  $u_k(t) \in R^n$  为系统的输入,  $y_k(t) \in R^r$  为系统的输出,  $f, B, C$  为适当维数的矩阵。假设该系统每次迭代时的初态都不相同, 第  $k$  次迭代的初态为  $x_k(0)$ , 则输出误差为

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t) \quad (2)$$

系统输入采用开环 PID 型迭代学习律:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + (H(t) + P(t) \int dt + L(t) \frac{d}{dt}) e_k(t) \quad (3)$$

系统初态采用迭代学习律:

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + B(0)L(0)e_k(0) \quad (4)$$

欲研究的问题就是系统(1)输入采用式(3)迭代学习律, 初态采用式(4)学习律, 满足什么条件时, 在任意初态下系统的实际输出能够完全跟踪期望轨迹。

# 2 收敛性证明

在证明本文学习算法的定理之前, 先介绍以下定义和引理。

定义 1  $f = \max\{|f_i|\}$  为  $n$  维向量  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  的范数;  $\|A\| = \max\{\sum_{1 \leq i \leq n, j=1}^m |a_{ij}|\}$  为矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  的范数; 函数矩阵  $g_x(t, x(t))$  为:

$$g_x(t, x(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

引理 1 设常数序列  $\{b_k\}_{k \geq 0} (b_k \geq 0)$  收敛到零, 算子  $Q_k$ :

$$C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T] \text{ 满足: } \|Q_k(u)(t)\| \leq M(b_k + \int_0^t \|u(s)\| ds),$$

其中  $M \geq 1$  为常数,  $C_r[0, T]$  为定义在区间  $[0, T]$  上的所有  $r$  维向量值连续函数空间, 且  $r$  维向量取最大值范数,  $P(t)$  为  $r \times r$  维连续函数矩阵, 令  $P: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$  为:  $P(u)(t) = p(t)u(t)$ , 若  $p$  的谱半径小于 1, 则  $\lim(P + Q_n)(P + Q_{n-1}) \dots (P + Q_0)(u)(0) = 0$  对于  $t$  一致成立。

定理 1 对于式(1)所描述的系统, 在  $t \in [0, T]$  时满足如下条件:

(a1)  $f(t, x(t))$  关于  $x(t)$  满足全局一致 Lipschitz 条件, 即对于  $x_1(t), x_2(t) \in R^n$ ,  $\|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \leq K_f \cdot \|x_1(t) - x_2(t)\|$ ;

(a2) 期望轨迹  $y_d(t)$  在  $t \in [0, T]$  上连续;

(a3)  $g(t, x(t))$  关于  $x(t)$  的倒数  $g_x(x(t))$  存在,  $g(t, x(t))$  关于  $x(t)$  满足一致 Lipschitz 条件, 且  $g_x(x(t))$  有界;

(a4) 若取学习律为条件(a2)(a3)并满足:

$\rho(I - g_x(t, x(t))B(t)L(t)) < 1, x(t) \in R^n, t \in [0, T]$ , 则当  $k \rightarrow \infty$  时,  $y_k(t)$  一致收敛于  $y_d(t)$ 。

引理 2 设  $x(t), [0, T]$  和  $a(t)$  是  $[0, T]$  上的实值连续函数, 且  $a(t)$  在  $[0, T]$  上非负, 如果  $x(t) \leq c(t) + \int_0^t a(\tau)c(\tau)d\tau$ ,

$t \in [0, T]$ , 那么:  $x(t) \leq c(t) + \int_0^t a(\tau)c(\tau)e^{\int_0^t a(\sigma)d\sigma} d\tau, t \in [0, T]$ 。

证明: 由式(1)、式(3)、式(4)知:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) &= x_{k+1}(0) + \int_0^t [f(\tau, x_{k+1}(\tau)) + B(\tau)u_{k+1}(\tau)] d\tau \\ &= x_k(0) + B(0)L(0)e_k(0) + \int_0^t f(\tau, x_{k+1}(\tau)) d\tau + \\ &\quad \int_0^t B(\tau)u_k(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} e_k(\tau) d\tau + \\ &\quad \int_0^t B(\tau)H(\tau)e_k(\tau) d\tau + tP(t) \int_0^t e_k(\tau) d\tau \\ &= x_k(t) + B(0)L(0)e_k(0) + \int_0^t [f(\tau, x_{k+1}(\tau)) - \\ &\quad f(\tau, x_k(\tau))] d\tau - \int_0^t \frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} e_k(\tau) d\tau + \\ &\quad \int_0^t B(\tau)H(\tau)e_k(\tau) d\tau + tP(t) \int_0^t e_k(\tau) d\tau \quad (5) \end{aligned}$$

由微分中值定理知:

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) - e_k(t) &= (y_d(t) - y_{k+1}(t)) - (y_d(t) - y_k(t)) \\ &= g_x(t, \xi_k(t))(x_k(t) - x_{k+1}(t)) \quad (6) \end{aligned}$$

将式(5)代入式(6)得:

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) - e_k(t) &= g_x(t, \xi_k(t)) \cdot \{B(0)L(0)e_k(0) + \int_0^t \\ &\quad [f(\tau, x_{k+1}(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau))] d\tau - \\ &\quad \int_0^t \frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} e_k(\tau) d\tau + \int_0^t B(\tau)H(\tau) \\ &\quad e_k(\tau) d\tau + tP(t) \int_0^t e_k(\tau) d\tau\} \quad (7) \end{aligned}$$

则:

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) &= [I - g_x(t, \xi_k(t))B(t)L(t)]e_k(t) + g_x(t, \xi_k(t)) \\ &\quad \{ \int_0^t [f(\tau, x_{k+1}(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau))] d\tau - \int_0^t \\ &\quad \frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} e_k(\tau) d\tau + \int_0^t B(\tau)H(\tau)e_k(\tau) + \\ &\quad tP(t) \int_0^t e_k(\tau) d\tau\} \quad (8) \end{aligned}$$

定义算子  $P: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$  为:

$$P_{e_k(t)} = [I - g_x(t, \xi_k(t))B(t)L(t)]e_k(t) \quad (9)$$

定义算子  $Q_k: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$  为:

$$\begin{aligned} Q_k(e_k)(t) &= g_x(t, \xi_k(t)) \{ \int_0^t \frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} e_k(\tau) d\tau - \int_0^t \\ &\quad B(\tau)H(\tau)e_k(\tau) d\tau - g_x(t, \xi_k(t)) \cdot \int_0^t [f(\tau, \\ &\quad x_{k+1}(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau))] d\tau + g_x(t, \\ &\quad \xi_k(t)) \int_0^t tP(\tau)e_k(\tau) d\tau \quad (10) \end{aligned}$$

式(7)变为

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) &= P e_k(t) + Q_k(e_k)(t) \\ &= (P + Q_k)(P + Q_{k-1}) \dots (P + Q_0)(e_0)(t) \quad (11) \end{aligned}$$

下面对算子  $Q_k$  进行估计。

对式(9)的前半部分取范数:

$$\begin{aligned} \|g_x(t, \xi_k(t)) \{ \int_0^t \frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} e_k(\tau) d\tau - \int_0^t B(\tau)H(\tau) \\ e_k(\tau) d\tau + \int_0^t tP(\tau)e_k(\tau) d\tau\} \| + \|g_x(t, \xi_k(t))\| \int_0^t \\ \|B(\tau)\| \cdot \|H(\tau)\| \cdot \|e_k(\tau)\| d\tau \\ \leq \|g_x(t, \xi_k(t))\| \cdot \int_0^t \|\frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} e_k(\tau) d\tau\| \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| e_k(\tau) \| d\tau + \| g_x(t, \xi_k(t)) \| \int_0^t t \| P(\tau) \| \cdot \\ & \| e_k(\tau) \| d\tau \\ & \leq (\beta\alpha + \beta bh + \beta t p) \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\beta = \sup_{(x,t) \in R^n \times [0,T]} \| g_x(t, \xi_k(t)) \|$ ;  $\alpha = \sup_{t \in [0,T]} \| \frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} \|$ ;  $b = \sup \| B(t) \|$ ;  $h = \sup \| H(t) \|$ ;  $p = \sup \| P(t) \|$ 。

由式(1)可得:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) - x_k(t) &= \int_0^t [f(\tau, x_{k+1}(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau))] d\tau + \\ & B(t)L(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d[B(\tau)L(\tau)]}{d\tau} e_k(\tau) d\tau + \\ & \int_0^t B(\tau)H(\tau)e_k(\tau) d\tau - \int_0^t P(\tau)e_k(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

上式两端取范数得:

$$\begin{aligned} \| x_{k+1}(t) - x_k(t) \| &\leq K_f \int_0^t \| k_{k+1}(\tau) - x_k(\tau) \| d\tau + bl \\ & \| e_k(t) \| + \alpha \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau + bh \int_0^t \\ & \| e_k(\tau) \| d\tau + pt \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau \\ &\leq K_f \int_0^t \| k_{k+1}(\tau) - x_k(\tau) \| d\tau + \\ & \| e_k(t) \| + (\alpha + bh + pt) \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $\alpha_1 = \alpha + bh + pt$ ;  $l = \sup \| L(t) \|$ ;  $p = \sup \| P(t) \|$ 。

上式可变为:

$$\begin{aligned} \| x_{k+1}(t) - x_k(t) \| &\leq K_f \int_0^t \| x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau) \| d\tau + \\ & bl \| e_k(t) \| + \alpha_1 \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau \\ &\leq bl \| e_k(t) \| + \alpha_1 \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau + \\ & K_f \int_0^t [bl \| e_k(\tau) \| + \alpha_1 \int_0^\tau \| e_k(v) \| \\ & dv] e^{K_f(t-\tau)} d\tau \\ &\leq bl \| e_k(t) \| + F \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $F = \alpha_1 + K_f b l e^{K_f T} + T K_f \alpha_1 e^{K_f T}$ 。

对式(9)的后半部分取范数:

$$\begin{aligned} & \| g_x(t, \xi_k(t)) \| \int_0^t [f(\tau, x_{k+1}(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau))] d\tau \\ & \leq \beta K_f \int_0^t \| x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau) \| d\tau \\ & \leq \beta K_f b l \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau + \beta K_f F \int_0^t \int_0^\tau \| e_k(s) \| ds d\tau \\ & \leq N \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $N = \beta K_f b l + \beta K_f F T$ 。

由式(10)、式(12)、式(16)可得:

$$\begin{aligned} \| Q_k e_k(t) \| &\leq \beta\alpha \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau + \beta bh \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau + \\ & N \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau \\ &\leq \mu \int_0^t \| e_k(\tau) \| d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\mu = \max(1, \beta\alpha + \beta bh + N)$ 。

由引理1可得:  $\lim_{K \rightarrow \infty} \| e_{K+1}(t) \| = 0$ , 即当  $k \rightarrow \infty$  时,  $t \in [0, T]$ ,  $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$ , 证明输出轨迹趋近于期望轨迹。

### 3 仿真分析

考虑如下系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sin x_1(t) & 1.5(\sin x_1(t) - 1) \\ 1.5 - 3t & 3 - 4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y_1(t) = t \cdot x_1(t) - x_2(t)$$

$$y_2(t) = 0.5 \cdot x_1(t) + x_2(t)$$

设期望输出为:  $y_{d1} = y_{d2} = 12t^2(1-t)$ , 迭代初始状态为

$$[x_1(0), x_2(0)] = [1, 2, 1], L(t) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \text{且初始控制}$$

为  $[u_1(t) \ u_2(t)] = [0 \ 1], t \in [0, 1]$ , 计算可得:  $g_x(t, x(t)) =$

$$\begin{bmatrix} t & -1 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}, A = I - g_x(t, x(t)) B(t) L(t) = \begin{bmatrix} 1 - 0.1t & 0.8 \\ -0.05 & 0.2 \end{bmatrix}, t \in [0, 1].$$

显然  $\rho(A) < 1$ , 满足定理1的条件, 由定义1知:  $\|A\| > 1$ , 不满足条件  $\|A\| < 1$ , 因此收敛条件放宽了。仿真结果如图1所示。

从图1可以看出, 经过15次迭代输出已经能完全跟踪期望轨迹。

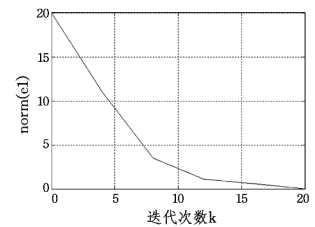
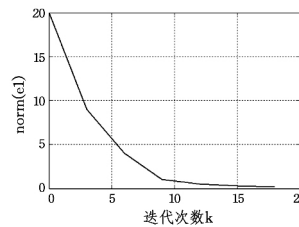


图1 PID型算法输出误差曲线 图2 PD型算法输出误差曲线

比较图1、图2可以看出, PID型算法经过15次迭代后系统的误差已经趋近于零, 而PD型算法则需要迭代20次后才可达到相同效果, 由此可见PID型算法的优越性。

从图3可以看出, 经过12次迭代输出已经能完全跟踪期望轨迹。

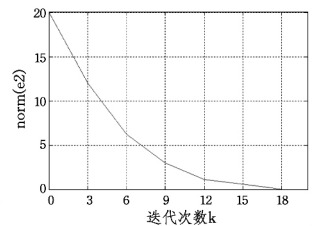
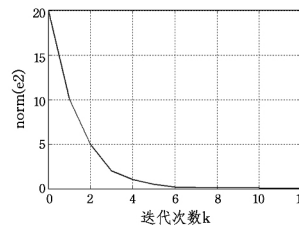


图3 PID型算法输出误差曲线 图4 PD型算法输出误差曲线

比较图3、图4可以看出, PID型算法经过12次迭代后系统的误差已经趋近于零, 而PD型算法则需要迭代18次后才可达到相同效果, 由此可见PID型算法的优越性。

考虑如下系统:

$$G(s) = \frac{s+6}{s^2+3s+2} \quad (18)$$

若选用零阶保持器进行采样,采样时间为 0.05s,迭代长度为 4s,给定期望信号为  $y_d(t)$  所示方波信号,仿真结果如下。

从图 5 可以看出,经过 30 次迭代输出已经能很好地跟踪期望轨迹。

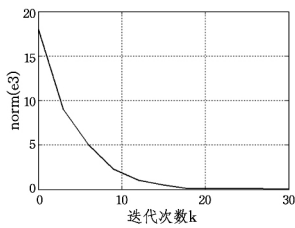


图 5 PID 型算法输出误差曲线  
norm(e3)

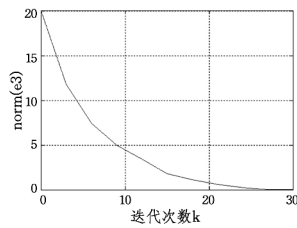


图 6 PD 型算法输出误差曲线  
norm(e3)

比较图 5、图 6 可以看出,PID 型算法经过 18 次迭代后系统的误差已经趋近于零,而 PD 型算法则需要迭代 27 次后才可达到相同效果,由此可见 PID 型算法的优越性。

结束语 本文讨论了一类非线性时变系统在任意初值条件下开环 PID 型迭代学习控制,证明了迭代学习控制中的收敛条件在初值学习下可以放宽,所提出的学习算法不要求严格的初始定位操作,这与常规的控制方法要求在所有迭代中一律定位在具体位置上的初始条件不同,算法解决了迭代学习控制中的初值问题。相比之前学者们所研究的初值问题算法,此算法能更快地跟踪期望轨迹,迭代次数明显减少。理论分析与仿真研究都证明了该算法的正确性和有效性。

## 参考文献

- [1] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning [J]. Journal of Robotic System (S1097-4563), 1984, 1(2): 123-140
- [2] Sun Ming-xuan, Huang Bao-jian. Iterative Learning Control [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999: 265-271 (in Chinese)  
孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1999: 265-271
- [3] Lee H S, Bien Z. Study on robustness of interative learning control with non-zero initial error [J]. International Journal of Control (S0020-7179), 1996, 64(3): 345-359
- [4] Lin Hui, Wang Lin. Iterative Learning Control Theory [M]. Xian: Northwestern Polytechnical University Press, 1998: 91-92 (in Chinese)  
林辉, 王林. 迭代学习控制理论 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998: 91-92
- [5] Sun Ming-xuan, Huang Bao-jian, Zhang Xue-zhi. PD-Type Iterative Learning Control For a Class of Nonlinear Systems [J]. Acta Automatica Sinica, 1998, 24(5): 711-714 (in Chinese)  
孙明轩, 黄保健, 张学智. 非线性系统的 PD 型迭代学习控制 [J]. 自动化学报, 1998, 24(5): 711-714
- [6] Ren Xue-mei, Gao Wei-bing. Learning control with an arbitrary Initialstate [J]. Acta Automatica Sinica, 1994, 20(1): 74-79 (in Chinese)  
任雪梅, 高为炳. 任意初始状态下的迭代学习控制 [J]. 自动化学报, 1994, 20(1): 74-79
- [7] Yao Zhong-shu, Yang Cheng-wu, Wang Hong-fei. A Frequency-Domain Design Method for Iterative Learning Control in an Arbitrary Initial State [J]. Systems Engineering and Electronics,

2003, 25(2): 213-215 (in Chinese)

姚仲舒, 杨成悟, 王宏飞. 任意初始状态下的迭代学习控制的频域分析 [J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(2): 213-215

- [8] Chen Y, Wen C, Gong Z, et al. An interatuve learning controller with initial state learning [J]. IEEE Transctions on Automatic Control (S0018-9286), 1999, 44(2): 371-376
- [9] Sun Yu, Li Zhi-an, Lin Hui. Open-loop PD-Type Iterative Learning Control for a C lass of Nonlinear System sw ith Control Delay and Arbitrary Initial Value [J]. Acta Armamentarii, 2010, 31(6): 837-841 (in Chinese)  
孙瑜, 李志安, 林辉. 一类含控制时滞非线性系统在任意初始状态下的开环 PD 型迭代学习控制 [J]. 兵工学报, 2010, 31(6): 837-841
- [10] Sun Yu, Li Zhi-an. Open-loop D-Type Iterative Learning Control for a Class of Nonlinear Systems with Arbitrary Initial Value [J]. Journal of System Simulation, 2008, 20(24): 6767-6770 (in Chinese)  
孙瑜, 李志安. 一类非线性系统在任意初始状态下的开环 D 型迭代学习控制 [J]. 系统仿真学报, 2008, 20(24): 6767-6770
- [11] Sun Ming-xuan. Iterative learning control with initial state learning [J]. Control and Decision, 2007, 22(8): 848-852 (in Chinese)  
孙明轩. 初态学习下的迭代学习控制 [J]. 控制与决策, 2007, 22(8): 848-852
- [12] Wang Yi-min, Fang Yong. Iterative learning control design for irregular linear system with an arbitrary initial state [J]. Systems Engineering and Electronics, 2004, 26(3): 364-367 (in Chinese)  
王毅敏, 方勇. 任意初始状态下的非则系统的迭代学习控制设计 [J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(3): 364-367
- [13] Cao Wei, Cong Wang, Sun Ming. Iterative Learning Control with Initial State Study for Nonlinear Time-Delay System [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2012, 33(2): 315-320 (in Chinese)  
曹伟, 从望, 孙明. 初态学习下时滞非线性系统的迭代学习控制 [J]. 仪器仪表学报, 2012, 33(2): 315-320
- [14] Dai Xi-sheng, Luo Wen-guang, Cao Li-sheng. Iterative Learning Tracking Control for Distributed Parameter Systems with Initial Large Errors. [J]. Journal of Guangxi University of Technology, 2012, 23(4): 18-22 (in Chinese)  
戴喜生, 罗文广, 曹立生. 初值大偏差分布参数系统迭代学习跟踪控制 [J]. 广西工学院学报, 2012, 23(4): 18-22
- [15] Cao Wei, Dai Xue-feng. Closed-loop Iterative Learning Control with Arbitrary Initial State of Nonlinear Systems [J]. Journal of System Simulation, 2011, 23(5): 965-968 (in Chinese)  
曹伟, 戴学丰. 非线性系统在任意初始状态下的闭环迭代学习控制 [J]. 系统仿真学报, 2011, 23(5): 965-968
- [16] Hao Xiao-hong, Zhang Lei, Li Heng-jie. Application of P-type Iterative Learning Control in Active Vibration Control [J]. Process Automation Instrumentation, 2009, 30(2): 47-49  
郝晓弘, 张磊, 李恒杰. P 型迭代学习控制在振动主动控制的应用 [J]. 自动化仪表, 2009, 30(2): 47-49
- [17] Hao Xiao-hong, Jin Ya-rong, Ma Yu, et al. Fuzzy Iterative Learning Control Based on Genetic Algorithm [J]. Journal of Computer Application, 2013, 33(4): 960-963  
郝晓弘, 金亚蓉, 马宇, 等. 基于遗传算法的模糊迭代学习控制算法 [J]. 计算机应用, 2013, 33(4): 960-963