文章编号：1673-5196(2020)02-0150-05

Pascal 菱形与 Riordan 矩阵

杨胜良，高圆圆

（兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州　730050）

摘要：利用 2-Motzkin 路得到了 Pascal 菱形的 Riordan 矩阵表示，利用加权 2-Motzkin 路及 3-Motzkin 路给出几种广义的 Pascal 菱形及其 Riordan 矩阵表示.

关键词：Pascal 菱形；Riordan 矩阵；2-Motzkin 路
中图分类号：O157.1　　文献标志码：A

Pascal rhombus and Riordan array

YANG Sheng-liang, GAO Yuan-yuan

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou　730050, China)

Abstract: Riordan array representation of Pascal rhombus is obtained with 2-Motzkin paths and several generalized Pascal rhombus and their Riordan array representation are given out with weighted 2-Motzkin paths and 3-Motzkin paths.

Key words: Pascal rhombus; Riordan array; 2-Motzkin path

Klostermeyer 等[1]提出了 Pascal 菱形的概念，并给出了 Pascal 菱形和 left-bounded Pascal 菱形的几个性质.Pascal 菱形作为广义的 Pascal 三角形是一个无限数组 $\Re=(r_{i,j})_{i=0,j=-\infty}^{\infty,\infty}$，它通过下面递推关系定义(图 1 给出了 Pascal 菱形的前几行)

$$\begin{cases} r_{i,j}=r_{i-1,j-1}+r_{i-1,j}+r_{i-1,j+1}+r_{i-2,j} \\ \qquad i\geqslant 2, j\in \mathbf{Z} \\ r_{0,0}=r_{1,0}+r_{1,1}=1 \\ r_{0,j}=0 \qquad j\neq 0 \\ r_{1,j}=0 \qquad j\neq -1,0,1 \end{cases} \tag{1}$$

而 left-bounded Pascal 菱形 $S=(s_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}$ 满足以下的递推关系(图 2 给出了 left-bounded Pascal 菱形前几行)

$$\begin{cases} s_{i,j}=s_{i-1,j-1}+s_{i-1,j}+s_{i-1,j+1}+s_{i-2,j} \\ \qquad i\geqslant 2, 0\leqslant j\leqslant i \\ s_{0,0}=s_{1,0}=s_{1,1}=1 \\ s_{i,-1}=0 \qquad i\geqslant 0 \\ s_{i,j}=0 \qquad i<j \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 8 & 9 & 8 & 3 & 1 & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

图 1　Pascal 菱形

Fig.1　Pascal rhombus

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 3 & 2 & 1 & & \\ 6 & 7 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

图 2　Left-bounded Pascal 菱形

Fig.2　Left-bounded Pascal rhombus

2015 年 Ramirez 在文献[2]中得到了 Pascal 菱形中元素的一般表达式，并给出了 Pascal 菱形关于 super 2-Motzkin 路的组合解释.本文根据 Pascal 菱形和 left-bounded Pascal 菱形的组合意义给出 Pascal 菱形和 left-bounded Pascal 菱形的 Riordan 矩阵表示.然后通过加权 2-Motzkin 路及 3-Motzkin 路给出几种广义的 Pascal 菱形和 left-bounded Pascal 菱形，并且得到它们的 Riordan 矩阵表示及矩阵中元素的一般表达式.

收稿日期：2018-06-01
基金项目：国家自然科学基金(11561044)
作者简介：杨胜良(1963-)，男，甘肃静宁人，教授.

1　基本概念

一个无限下三角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 叫做 Riordan 矩阵,如果它的第 k 列的发生函数为 $d(t)h(t)^k$,其中 $d(t)$,$h(t)$为形式幂级数,$d_0=1$,$h_0=0$,$h_1\neq 0$,Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的一般项为 $d_{n,k}=[t^n]d(t)h(t)^k$,这里$[t^n]$是系数算子.Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 表示为 $\boldsymbol{D}=(d(t),h(t))$,它的集合关于矩阵的乘法运算构成一个群[3].Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}=(d(t),h(t))$的乘法法则如下:

$$(d(t),h(t))(g(t),f(t))=\\(d(t)g(h(t)),f(h(t)))\tag{3}$$

由文献[4]知,一个 Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}=(d(t),h(t))$由序列 $A=(a_0,a_1,\cdots)$和序列 $Z=(z_0,z_1,\cdots)$刻画,对所有 $n,k\geqslant 0$,它们分别满足:

$$\begin{aligned}d_{n+1,k+1}&=\sum_{m\geqslant 0}a_jd_{n,k+j}\\ d_{n+1,0}&=\sum_{m\geqslant 0}z_jd_{n,j}\end{aligned}\tag{4}$$

另外,设 $A(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_it^i$,$Z(t)=\sum_{i=0}^{\infty}z_it^i(i\in\mathbf{N})$分别为 A 序列和 Z 序列的发生函数[5],则

$$d(t)=\frac{1}{1-tZ(h(t))},\quad h(t)=tA(h(t))\tag{5}$$

Baccherini 等[6]给出了一种刻画 Riordan 矩阵的方法:无限下三角矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{n,k})_{n,k\in\mathbf{N}}$是 Riordan 矩阵当且仅当存在矩阵$(\alpha_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}(\alpha_{0,0}\neq 0)$和序列$(\rho_j)_{j\in\mathbf{N}}$使得

$$d_{n+1,k+1}=\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0}\alpha_{i,j}d_{n-i,k+j}+\sum_{j\geqslant 0}\rho_jd_{n+1,k+j+2}\tag{6}$$

矩阵$(\alpha_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}$叫做 Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的 $\boldsymbol{A}$-矩阵,如果用 $P^{[0]}(t)$,$P^{[1]}(t)$,$P^{[2]}(t)\cdots$表示 Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的 $\boldsymbol{A}$-矩阵第 0,1,2$\cdots$行的发生函数则 $P^{[i]}(t)=\alpha_{i,0}+\alpha_{i,1}t+\alpha_{i,2}t^2+\alpha_{i,3}t^3+\cdots$

设序列$(\rho_j)_{j\in\mathbf{N}}$的发生函数为 $Q(t)$,则有

$$\frac{h(t)}{t}=\sum_{i\geqslant 0}t^iP^{[i]}(h(t))+\frac{h(t)^2}{t}Q(h(t))\tag{7}$$

对于第 0 列的发生函数的定义类似于式(7)有

$$d_{n+1,0}=\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0}\zeta_{i,j}d_{n-i,j}+\sum_{j\geqslant 0}\sigma_jd_{n+1,j+2}\tag{8}$$

类似于矩阵$(\alpha_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}$,用 $R^{[0]}(t)$,$R^{[1]}(t)$,$R^{[2]}(t)$,$\cdots$表示矩阵$(\zeta_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}$第 0,1,2,$\cdots$行的发生函数,则 $R^{[i]}(t)=\zeta_{i,0}+\zeta_{i,1}t+\zeta_{i,2}t^2+\zeta_{i,3}t^3+\cdots$

设序列$(\sigma_j)_{j\in\mathbf{N}}$的发生函数为 $S(t)=\sum_{j\geqslant 0}\sigma_jt^j$,则有

$$d(t)=\frac{d_{0,0}}{1-\sum_{i\geqslant 0}t^{i+1}R^{[i]}(h(t))-h(t)S(h(t))}\tag{9}$$

这样就得到了 Riordan 矩阵 $\boldsymbol{D}=(d(t),h(t))$.

定义 1　从(0,0)到$(n,0)$允许的步为上步 $U=(1,1)$,下步 $D=(1,-1)$,及水平步 $H_1=(1,0)$,且在 x 轴上方的格路叫做一个长度为 n 的 Motzkin 路,而长度为 n 的 Motzkin 路的个数记为 M_n,叫做 Motzkin 数[7].

定义 2　从(0,0)到$(n,0)$允许的步为上步 $U=(1,1)$,下步 $D=(1,-1)$,及水平步 $H_1=(1,0)$和 $H_2=(2,0)$,且在 x 轴上方的格路叫做一个长度为 n 的 2-Motzkin 路[3].如果一个长度为 n 的 2-Motzkin 路可以到达 x 轴下方称为一个长度为 n 的 super 2-Motzkin 路.

2　Pascal 菱形与 2-Motzkin 路

Pascal 三角形可以用一个无限下三角矩阵的形式表示,但是 Pascal 菱形用一个无限下三角矩阵无法完全表示[8],所以本文将 Pascal 菱形从中间劈开取其右半部分正好构成一个无限下三角矩阵[9],发现这个无限下三角矩阵 $\boldsymbol{T}=(r_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$是一个 Riordan 矩阵.

$$\boldsymbol{T}=(d(t),h(t))=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&0&\cdots\\4&2&1&0&0&\cdots\\9&8&3&1&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

定理 1　矩阵 $\boldsymbol{T}=(r_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}$可以表示成如下形式:

$$\boldsymbol{T}=\left(\frac{1}{\sqrt{(1-t-t^2)^2-4t^2}},\right.\\\left.\frac{1-t-t^2-\sqrt{(1-t-t^2)^2-4t^2}}{2t}\right)\tag{10}$$

证明　根据式(1)给出的递推关系,取其右半部分的递推关系式

$$r_{i+1,j+1}=r_{i,j}+r_{i,j+1}+r_{i,j+2}+r_{i-1,j+1}\\ i\geqslant 1,j>0\\ r_{i+1,0}=r_{i,0}+2r_{i,1}+r_{i-1,0}\qquad i\geqslant 1$$

利用 $\boldsymbol{A}$-矩阵的定义,有

$$P^{[0]}(t)=\alpha_{0,0}+\alpha_{0,1}t+\alpha_{0,2}t^2=1+t+t^2$$

$$P^{[1]}(t)=\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}t=t$$
$$R^{[0]}(t)=\zeta_{0,0}+\zeta_{0,1}t+\zeta_{0,2}t^2=1+2t$$
$$R^{[1]}(t)=\zeta_{1,0}+\zeta_{1,1}t=1$$

$S(t)=0,Q(t)=0$，求得

$$h(t)=\frac{1-t-t^2-\sqrt{(1-t-t^2)^2-4t^2}}{2t}$$

$$d(t)=\frac{1}{\sqrt{(1-t-t^2)^2-4t^2}}$$

组合解释：$r_{i,j}$ 表示从(0,0)到(i,j)的 super 2-Motzkin 路的个数，它满足的递推关系式如图 3 所示.

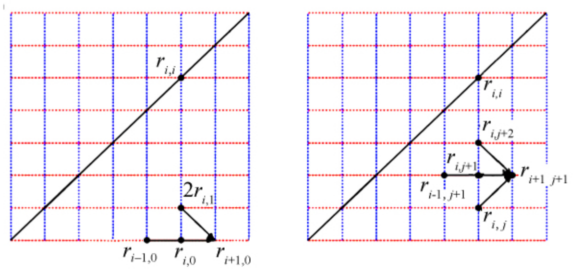

图 3　2-Motzkin 路的部分递推关系式

Fig.3　Partially recurred dependence 2-Motzkin path

推论 1　矩阵 T 中元素的一般表达式为

$$r_{ij}=\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{i-j}{2}\rfloor}\sum_{l=0}^{i-j-2m}\binom{j+2m+l}{l}\binom{l}{i-j-2m-l}\binom{2m+j}{m}\tag{11}$$

证明　将矩阵 T 分解$(d(t),h(t))=\left(\frac{1}{1-t-t^2},\frac{t}{1-t-t^2}\right)(B(t^2),tC(t^2))$其中 $B(t)$，$C(t)$分别为中心二项式系数和 Catalan 数的发生函数，根据矩阵的分解求 T 中元素的一般表达式

$$r_{ij}=\sum_{k=j}^{i}[t^i]t^k(1-t-t^2)^{-k-1}[z^k]z^jB(z^2)C(z^2)^j=\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{i-j}{2}\rfloor}\sum_{l=0}^{i-j-2m}\binom{j+2m+l}{l}\binom{l}{i-j-2m-l}\binom{2m+j}{m}$$

根据图 3 可以将 left-bounded Pascal 菱形表示成矩阵的形式$(s_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}$，下面给出其关于 2-Motzkin 路的组合解释.

定理 2　$s_{i,j}$ 是从(0,0)到(i,j)的 2-Motzkin 路的个数，则矩阵$(s_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}}$可以表示成以下的 Riordan 矩阵的形式

$$(d_1(t),h_1(t))=\left(\frac{1-t-t^2-\sqrt{(1-t-t^2)^2-4t^2}}{2t^2},\frac{1-t-t^2-\sqrt{(1-t-t^2)^2-4t^2}}{2t}\right)$$

其证明与定理 1 类似.

推论 2　矩阵$(d_1(t),h_1(t))$的元素的一般表达式为

$$s_{ij}=\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{i-j}{2}\rfloor}\sum_{l=0}^{i-j-2m}\frac{j+1}{2m+j+1}\times\binom{j+2m+l}{l}\binom{l}{i-j-2m-l}\binom{2m+j+1}{m}=\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{i-j}{2}\rfloor}\frac{j+1}{2m+j+1}\binom{2m+j+1}{m}F_{i-j-2m+1}^{(j+2m+1)}$$

其中：$F_{i-j-2m+1}^{(j+2m+1)}$是 Fibonacci 数的卷积[10].

3　广义的 Pascal 菱形与加权 2-Motzkin 路

给 2-Motzkin 路的上步 $U=(1,1)$加上权 1，水平步 $H_1=(1,0)$加上权 a，水平步 $H_2=(2,0)$加上权 b，下步 $D=(1,-1)$加上权 1，得到了加权 2-Motzkin 路[11].利用递推关系和 A-矩阵的方法可以得到以下结果.

定理 3　设 $f_{ij}^{(a,b)}$是从(0,0)到(i,j)的加权 super 2-Motzkin 路的个数，则矩阵$(f_{ij}^{(a,b)})_{ij\in\mathbf{N}}$可以表示成以下的 Riordan 矩阵的形式

$$(f^{(a,b)}(t),g^{(a,b)}(t))=\left(\frac{1}{\sqrt{(1-at-bt^2)^2-4t^2}},\frac{1-at-bt^2-\sqrt{(1-at-bt^2)^2-4t^2}}{2t}\right)$$

定理 3 中给出了加权的 Pascal 菱形的 Riordan 矩阵表示，下面的例子中将给出权取具体值时的对应的 Pascal 菱形.

推论 3　矩阵$(f^{(a,b)}(t),g^{(a,b)}(t))$中元素的一般表达式为

$$f_{ij}^{(a,b)}=\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{i-j}{2}\rfloor}\sum_{l=0}^{i-j-2m}a^{(i-j-2m-2l)}b^l\times\binom{i-l}{i-j-2m-l}\binom{i-j-2m-l}{l}\binom{2m+j}{m}=\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{i-j}{2}\rfloor}\sum_{l=0}^{i-j-2m}a^{(i-j-2m-2l)}b^l\binom{2m+j}{m}F_{i-j-2m+1}^{(j+2m+1)}$$

例 1　当 $b=0,a=1$ 时，Riordan 矩阵的表达式为

$$(f^{(1,0)}(t),g^{(1,0)}(t))=\left(\frac{1}{\sqrt{(1-t)^2-4t^2}},\frac{1-t-\sqrt{(1-t)^2-4t^2}}{2t}\right)$$

矩阵中元素的一般表达式为

$$f_{ij}^{(1,0)}=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor}\binom{i}{i-j-2m}\binom{2m+j}{m}$$

它对应的 Pascal **菱形如图** 4 **所示.**

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

图 4　Pascal 菱形($f_{ij}^{(1,0)}$)

Fig.4　Pascal rhombus ($f_{ij}^{(1,0)}$)

定理 4　**设** $d_{ij}^{(a,b)}$ **表示从** $(0,0)$ **到** (i,j) **的加权** 2-Motzkin **路的个数，则矩阵** $(d_{ij}^{(a,b)})_{ij\in\mathbf{N}}$ **可以表示成以下的** Riordan **矩阵的形式**

$$(d_{ij}^{(a,b)})_{ij\in\mathbf{N}}=\left(\frac{1-at-bt^2-\sqrt{(1-at-bt^2)^2-4t^2}}{2t^2},\frac{1-at-bt^2-\sqrt{(1-at-bt^2)^2-4t^2}}{2t}\right)$$

推论 4　**矩阵** $(d^{(a,b)}(t),h^{(a,b)}(t))$ **元素的一般表达式为**

$$d_{ij}^{(a,b)}=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor}\sum_{l=0}^{i-j-2m}\frac{(j+1)a^{(i-j-2m-2l)}b^l}{2m+j+1}\times\binom{i-l}{i-j-2m-l}\binom{i-j-2m-l}{l}\binom{2m+j+1}{m}=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor}\sum_{l=0}^{i-j-2m}\frac{(j+1)a^{(i-j-2m-2l)}b^l}{2m+j+1}\binom{2m+j+1}{m}F_{i-j-2m+1}^{(j+2m+1)}$$

例 2　**当** $b=0,a=1$ **时，**Riordan **矩阵的表达式为**

$$(d^{1,0}(t),h^{(1,0)}(t))=\left(\frac{1-t-\sqrt{(1-t)^2-4t^2}}{2t^2},\frac{1-t-\sqrt{(1-t)^2-4t^2}}{2t}\right)$$

矩阵中元素的一般表达式为

$$d_{i,j}^{(1,0)}=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor}\frac{j+1}{2m+j+1}\binom{i}{i-j-2m}\binom{2m+j+1}{m}$$

得到矩阵的第 0 **列是** Motzkin **数**(1,1,2,4,9,…)，**对应的** left-bounded Pascal **菱形如图** 5 **所示.**

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
2 & 2 & 1 & & \\
4 & 5 & 3 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

图 5　Left-bounded Pascal 菱形($d_{i,j}^{(1,0)}$)

Fig.5　Left-bounded Pascal rhombu ($d_{i,j}^{(1,0)}$)

例 3　**当** $a=0,b=1$ **时，其对应的** Riordan **矩阵** $(d^{(0,1)}(t),h^{(0,1)}(t))=(d_{i,j}^{(0,1)})_{i,j\in\mathbf{N}}$ **为**

$$(d^{(0,1)}(t),h^{(0,1)}(t))=\left(\frac{1-t^2-\sqrt{(1-t^2)^2-4t^2}}{2t^2},\frac{1-t^2-\sqrt{(1-t^2)^2-4t^2}}{2t}\right)$$

矩阵中元素的一般表达式为

$$d_{i,j}^{(0,1)}=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor}\frac{1+(-1)^{i-j-2m}}{2}\cdot\frac{j+1}{2m+j+1}\binom{\frac{i+j+2m}{2}}{\frac{i-j-2m}{2}}\binom{2m+j+1}{m}$$

从矩阵中可以得到第 0 **列为充气后的** Schröder **数**(1,0,2,0,6,0,…).

若给 2-Motzkin **路再加一个步** $H_3=(3,0)$ **得到** 3-Motzkin **路**[12]，**利用** 3-Motzkin **路和** super 3-Motzkin **路给出相应的** Pascal **菱形**(**图** 6)**和** left-bounded Pascal **菱形**(**图** 7)**的** Riordan **矩阵形式，并且给出矩阵中一般元素的表达式.**

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 8 & 10 & 8 & 3 & 1 & \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

图 6　Pascal 菱形($h_{ij}^{(3)}$)

Fig.6　Pascal rhombus ($h_{ij}^{(3)}$)

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
3 & 2 & 1 & & \\
7 & 7 & 3 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

图 7　Left-bounded Pascal 菱形(h_{ij})

Fig.7　Left-bounded Pascal rhombus (h_{ij})

定理 5　**设** $h_{ij}^{(3)}$ **表示从** $(0,0)$ **到** (i,j) **的** super 3-Motzkin **路的个数，则矩阵** $(h_{ij}^{(3)})_{ij\in\mathbf{N}}$ **可以表示成以下的** Riordan **矩阵的形式**

$$(d_3^{(3)}(t),h_3^{(3)}(t))=\left(\frac{1}{\sqrt{(1-t-t^2-t^3)^2-4t^2}},\right.$$

$$\left.\frac{1-t-t^2-t^3-\sqrt{(1-t-t^2-t^3)^2-4t^2}}{2t}\right)$$

其元素的一般表达式为

$$h_{ij}^{(3)}=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor}\sum_{p_1+2p_2+3p_3=i-j-2m}\times$$

$$\binom{q}{p_1,p_2,p_3}\binom{j+2m+q}{q}\binom{2m+j}{m} \quad (12)$$

式中:$q=p_1+p_2+p_3$.

定理6 设h_{ij}表示从$(0,0)$到(i,j)的3-Motzkin路的个数,则矩阵$(h_{ij})_{ij\in\mathbf{N}}$可以表示成以下的Riordan矩阵的形式

$$\left(\frac{1}{t}h_3^{(3)}(t),h_3^{(3)}(t)\right) \quad (13)$$

其元素的一般表达式为

$$h_{ij}=\sum_{m=0}^{\left\lfloor\frac{i-j}{2}\right\rfloor}\sum_{p_1+2p_2+3p_3=i-j-2m}\frac{j+1}{2m+j+1}\times$$

$$\binom{q}{p_1,p_2,p_3}\binom{j+2m+q}{q}\binom{2m+j+1}{m}$$

式中:$q=p_1+p_2+p_3$.

将Motzkin路的水平步由开始的$H_1(1,0)$,添加水平步$H_2(2,0)$,$H_3(3,0)$,…,一直添加无穷步,有趣的是得到一个比较简单的Riordan矩阵:

$$(d_\infty(t),h_\infty(t))=\left(\frac{1-2t-\sqrt{1-4t+8t^3-4t^4}}{2t^2(1-t)},\right.$$

$$\left.\frac{1-2t-\sqrt{1-4t+8t^3-4t^4}}{2t(1-t)}\right)$$

参考文献:

[1] KLOSTERMEYER W F, MAYS M E, SOLTES L, *et al*. A Pascal rhombus [J]. The Fibonacci Quarterly, 1997, 35: 318-328.

[2] RAMIREZ J L. The Pascal rhombus and the generalized grand Motzkin paths [J]. The Fibonacci Quarterly, 2015, 54(2): 99-104.

[3] MERLINI D, ROGERS D G, SPRUGNOLI R, *et al*. On some alternative characterizations of riordan arrays [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1996, 49(2): 301-320.

[4] HE T X, SPRUGNOLI R. Sequence characterization of Riordan arrays [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(12): 3962-3974.

[5] CHEON G S, KIM H, SHAPIRO L W. Combinatorics of Riordan arrays with identical A and Z sequences [J]. Discrete Mathematics, 2012, 312(12/13): 2040-2049.

[6] BACCHERINI D, MERLINI D, SPRUGNOLI R. Level generating trees and proper Riordan arrays [J]. Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2008, 2: 69-91.

[7] AIGNER M. Motzkin numbers [J]. European Journal of Combinatorics, 1998, 19(6): 663-675.

[8] STOCKMEYER P K. The Pascal rhombus and the stealth configuration [J]. Mathematics, 2015, 54(2): 99-104.

[9] YANG S L, DONG Y N, YANG L, *et al*. Half of a Riordan array and restricted lattice paths [J]. Linear Algebra Appl, 2018, 537: 1-11.

[10] ANDREWS G E. Some formulae for the Fibonacci sequence with generalizations [J]. Fibonacci Quarterly, 1969, 7: 113-130.

[11] WOAN W. A recursive relation for weighted Motzkin sequences [J]. Journal of Integer Sequences, 2005, 8(1): 1-8.

[12] 王丽娟,杨胜良. Riordan矩阵在广义Motzkin路计数中的应用[J]. 纯粹数学与应用数学, 2016, 32(2): 160-168.