

文章编号: 1007-7294(2020)04-0512-06

冲击载荷作用下功能梯度梁瞬态响应的解析解

张靖华, 吕亚丽

(兰州理工大学 理学院, 兰州 730050)

摘要: 本文解析研究了功能梯度材料悬臂梁受冲击载荷作用时的瞬态响应特性。考虑材料的物性参数沿厚度以幂函数连续梯度变化建立了功能梯度梁的动力学控制方程; 并采用分离变量法求解获得功能梯度悬臂梁的固有频率及主振型, 同时证明了非均匀功能梯度梁主振型的正交性; 最后采用模态叠加法联合杜哈梅积分法解析研究考虑惯性效应的梁在端部集中冲击载荷作用下的瞬态响应, 求解获得端部最大挠度随时间变化的精确解析解, 并给出冲击发生较短时间内的数值结果, 分析了冲击响应特性及其影响因素。

关键词: 动态响应; 功能梯度材料; 冲击载荷; 解析解

中图分类号: O347.2 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1007-7294.2020.04.011

Analytical solutions of transient response of functionally- gradient beam subjected to impact load

ZHANG Jing-hua, LÜ Ya-li

(School of Sciences, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: In the present study, dynamic response of a functionally-graded material (FGM) beam subjected to the impact load is studied analytically. Firstly, governing equations of motion are derived, in which material properties of FGM are assumed to vary continuously in the thickness direction of the beam according to a power function. And then, nature frequencies and principal modes of cantilever FGM beam are obtained by using the method of variables separation. The orthogonality of principal modes is also confirmed. Finally, the dynamic response characteristics of FGM beam subjected to the impact load on the end are studied by the method of principal modal superposition combining with DuHamel integral. The accurately-analytical solutions of the maximum deflections with respect to time are obtained. And the numerical results are given in the short time of the impact. The shock response characteristics and its influencing factors are analyzed in detail.

Key words: dynamic response; functionally-graded materials; impact load; analytical solution

0 引 言

功能梯度材料(Functionally Graded Materials, FGM)以连续梯度变化的材料组份代替具有突变界面的传统层合复合材料, 消除了材料性能的不连续性, 使结构中的应力集中降到最小^[1-2]。所以 FGM 在航天航空、核工程等领域有着非常广阔的应用前景。

由 FGM 所制成的结构因常受复杂载荷的作用而产生变形, 例如冲击载荷作用下引起的瞬态响

收稿日期: 2019-10-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11662008; 11262010)

作者简介: 张靖华(1979-), 女, 博士, 副教授, 博士生导师, E-mail: zjhhrb@163.com;

吕亚丽(1991-), 女, 硕士研究生。

应。关于该问题已有一些研究成果,文献[3]运用二维 FGM 接触模型,求解了低速冲击下的接触力和 FGM 扁球壳的非线性动力响应,并讨论了温度场及材料参数对动态响应的影响;文献[4]基于 Timoshenko 梁理论,通过 Hertz 法求解得到冲击器与 FGM 碳纳米增强复合梁之间的接触力,并求解获得动态响应;文献[1]和[5]中分别研究了 FGM 圆柱壳在热冲击载荷作用下的瞬态热应力和位移,研究表明 FGM 能有效减缓热应力;在文献[6]中,基于非线性板理论研究了 FGM 圆板在热冲击载荷作用下的动力稳定特性,求解获得了热冲击屈曲临界载荷及后屈曲路径。

综合已有研究,关于 FGM 结构冲击响应特性的研究还不够深入,鲜见关于冲击载荷作用下解析研究 FGM 悬臂梁动态响应并获得精确解析解的成果。本文基于经典 Euler 梁理论,解析研究了端部受集中冲击载荷作用下功能梯度梁的动力响应特性,分析了结构几何、材料梯度特性等对瞬态最大挠度的影响。

1 基本方程

考虑长为 l 、厚为 h 、宽为 b 的陶瓷/金属功能梯度矩形截面梁,上表面是纯金属,下表面是纯陶瓷,中间是这两种材料的连续过渡。选取原点在左端面形心处的坐标系 (x, y) ,其中 x 轴与变形前的轴线重合, y 轴沿厚度方向。考虑左端固定右端自由的悬臂梁,研究其自由端受冲击载荷作用时的动力响应。

假设 FGM 中陶瓷和金属的体积分数沿厚度以幂函数连续变化,基于 Voigt 等应变假设,将梁的弹性模量 E 和密度 ρ 设为材料组分含量的函数,表达式为^[7]

$$P(y) = (P_m - P_c)V_m(y) + P_c, V_m(y) = \left(\frac{h - 2y}{2h}\right)^n \tag{1}$$

式中, P_c 和 P_m 分别代表陶瓷和金属的物性参数; V_m 代表金属的体积分数; n 为 FGM 的梯度参数, $n=0$ 时为纯金属, $n \rightarrow \infty$ 为纯陶瓷。

梁的挠度记为 $W(x, t)$, 单位长度上分布的外力记为 $p(x, t)$ 。基于经典 Euler 梁理论,考虑线弹性变形,推导可得 FGM 梁的动态响应控制微分方程:

$$A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t) \tag{2}$$

式中, A 和 B 为与材料参数有关的积分常数,表达式为

$$A = \left[(E_m - E_c) \frac{(n^2 + n + 2)h^3}{4(n + 1)(n + 2)(n + 3)} + E_c \frac{h^3}{12} \right], B = h \left(\frac{\rho_m + n\rho_c}{n + 1} \right)$$

2 控制方程的求解

对于方程(2),本文采用振型叠加法求解。首先研究功能梯度悬臂梁的自振特性可求得主振型

$$W_i(x) = C_i \left[\cos \beta_i x - \operatorname{ch} \beta_i x + r_i (\sin \beta_i x - \operatorname{sh} \beta_i x) \right] \quad i = 1, 2, 3 \dots \tag{3}$$

式中, $r_i = \frac{\sin \beta_i l - \operatorname{sh} \beta_i l}{\cos \beta_i l + \operatorname{ch} \beta_i l}, \beta_i = \frac{B\omega^2}{A}$ 。证明发现对于功能梯度材料梁,其主振型关于质量与关于刚度的正交性条件依然成立。同时可由正则化条件求得正则振型,此时常数

$$C_i = \sqrt{\frac{8\beta_i}{BbL}}$$

式中, $L = (2r_i^2 \cos \beta_i l - 4r_i \sin \beta_i l - 2 \cos \beta_i l) \operatorname{sh} \beta_i l - 2(r_i \sin \beta_i l + \sin \beta_i l) \operatorname{ch} \beta_i l + \left(r_i^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sh}(2\beta_i l) - 2(r_i^2 - 1) \sin(2\beta_i l) + r_i \operatorname{ch}(2\beta_i l) - 4r_i \cos(2\beta_i l) + 8\beta_i l$ 。

固有频率 $\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{A}{B}}$ 由如下频率方程确定:

$$\cos\beta l \operatorname{ch}\beta l = -1 \quad (4)$$

采用牛顿法求解上式,前四个根为

$$\beta_1 l = 1.875, \beta_2 l = 4.694, \beta_3 l = 7.855, \beta_4 l = 10.996$$

当 $i \geq 3$ 时,可近似取

$$\beta_i l \approx (i - 0.5)\pi \quad (i = 3, 4, 5 \dots)$$

可得FGM悬臂梁的各阶固有频率

$$\omega_i = \left[\frac{(i - 0.5)\pi}{l} \right]^2 \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (i = 3, 4, 5 \dots) \quad (5)$$

将FGM梁退化为均质纯陶瓷梁 ($n \rightarrow \infty$), 则固有频率 ω_i 退化为

$$\omega_i = \left[\frac{(i - 0.5)\pi}{l} \right]^2 \sqrt{\frac{E_c h^3}{12\rho_c}}$$

上式无量纲化后的一阶固有频率与参考文献[8]中的已有结果相一致,说明本文结果正确可靠。

现利用模态叠加法求解FGM悬臂梁在端部冲击载荷作用下的动态响应。将梁的挠度按正则振型 $W_i(x)$ 展开为无穷级数:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \eta_i(t) \quad (6)$$

式中, $\eta_i(t)$ 是正则坐标。将(6)式代入(2)式并等式两边同乘正则振型 $W_j(x)$, 沿梁长对 x 积分, 同时利用正交性条件得

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = q_j(t) \quad (7)$$

上式为第 j 个正则坐标 $\eta_j(t)$ 的方程, 其中第 j 个广义力为 $q_j(t) = bB \int_0^l p(x, t) W_j(x) dx$ 。

考虑零初始条件的FGM悬臂梁在自由端 $x=l$ 处受到集中半正弦脉冲力作用。借助于单位脉冲函数 δ 将集中力表示成分布力, 并由该函数的筛选性得正则坐标的广义力

$$q_i(t) = C_i P_0 \sin \omega t \cdot [\cos \beta_i l - \operatorname{ch} \beta_i l + r_i (\sin \beta_i l - \operatorname{sh} \beta_i l)]$$

求解方程(7)并联合(6)式可得载荷作用时间段 $0 \leq t \leq t_1$ 内FGM悬臂梁的瞬态挠度解析表达式

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i^2 P_0}{\omega_i} [\cos \beta_i l - \operatorname{ch} \beta_i l + r_i (\sin \beta_i l - \operatorname{sh} \beta_i l)] \cdot [\cos \beta_i x - \operatorname{ch} \beta_i x + r_i (\sin \beta_i x - \operatorname{sh} \beta_i x)] \cdot \frac{\omega_i \sin \omega t - \omega \sin \omega_i t}{(\omega_i - \omega)(\omega_i + \omega)} \quad (8)$$

当 $t > t_1$ 时集中冲击载荷作用结束, 系统的响应变为以 $t = t_1$ 时的位移和速度为初始条件的自由振动。因此 t_1 时刻以后系统的响应为

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 P_0 [\cos \beta_i l - \operatorname{ch} \beta_i l + r_i (\sin \beta_i l - \operatorname{sh} \beta_i l)] \cdot [\cos \beta_i x - \operatorname{ch} \beta_i x + r_i (\sin \beta_i x - \operatorname{sh} \beta_i x)] \cdot \left[\frac{\omega_i \sin \omega t_1 - \omega \sin \omega_i t_1}{\omega_i (\omega_i - \omega)(\omega_i + \omega)} \cdot \cos \omega_i (t - t_1) + \frac{\omega \cos \omega t_1 - \omega \cos \omega_i t_1}{\omega_i (\omega_i - \omega)(\omega_i + \omega)} \sin \omega_i (t - t_1) \right] \quad (9)$$

3 数值算例和讨论

对于FGM梁冲击响应的无穷级数形式的解析解, 本文进一步计算给出了其数值结果。其中假定

FGM 梁由陶瓷 ZrO_2 和金属 Al 复合而成,两种组分材料的物理性能参数分别为 $E_c=151\text{ GPa}$, $E_m=70\text{ GPa}$, $\rho_c=3\ 000\text{ kg/m}^3$, $\rho_m=2\ 707\text{ kg/m}^3$ [8]。

为了考察材料的梯度参数对 FGM 梁基频的影响,图 1 绘出了给定不同长细比 l/h 的 FGM 梁的基频随体积分数指数 n 的变化关系曲线。由图可见, $n=0$ 时纯金属梁的基频最小,随 n 的增大,基频逐渐增大,但当 $n>2$ 时,FGM 梁的基频随 n 增大的变化较小。这是由于 $n=0$ 时功能梯度材料梁退化为纯金属梁; $n \rightarrow \infty$ 时退化为均匀陶瓷梁,随 n 的增大,梁中金属的含量减少、陶瓷的含量增多,使得梁的弯曲刚度随 n 的增大而增大,FGM 梁的固有频率随之增大。并且随长细比的增大,梁的弯曲刚度减小,基频也减小。

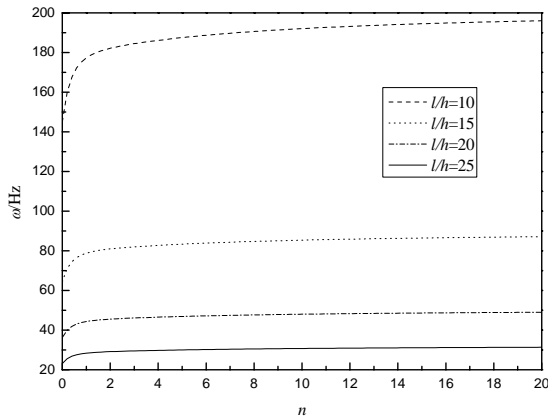


图 1 FGM 悬臂梁的基频随 n 的变化 ($n=2, l/h=20$)

Fig.1 The variation of fundamental frequencies of FGM beam with n by given different l/h ($n=2, l/h=20$)

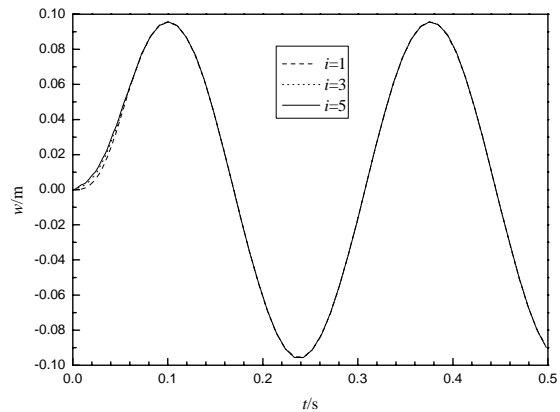


图 2 取不同级数项计算所得梁自由端的挠度 ($n=2, P_0=30\text{ kN}, \omega=50\text{ Hz}, l/h=20$)

Fig.2 The free end deflections of the FGM beam by given different number of series i ($n=2, P_0=30\text{ kN}, \omega=50\text{ Hz}, l/h=20$)

图 2 绘出了取不同级数项时悬臂 FGM 梁在半正弦脉冲作用期间及作用结束后整个过程的最大挠度随时间的变化。其中给定半正弦脉冲的载荷频率参数为 $\omega=50\text{ Hz}$, 即载荷作用时间为 $t_1=\pi/50\approx 0.063\text{ s}$ 。由图可见,本文所得的级数解收敛极快,当 $i\geq 3$ 时,曲线基本重合,数值结果随级数项的增多几乎没有变化,所以在以后的计算中取定 $i=3$,即取无穷级数解的前三项近似数值结果。

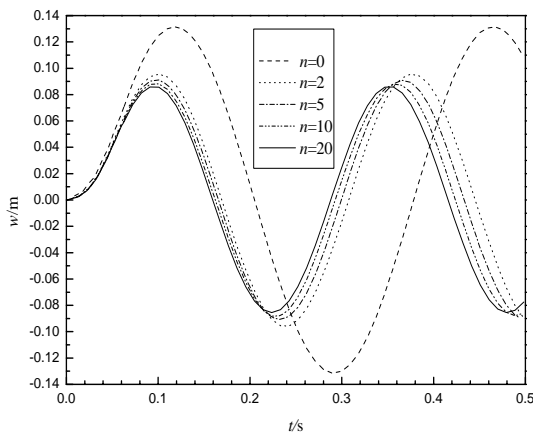


图 3 给定不同 n 的 FGM 梁自由端瞬态挠度 ($\omega=50\text{ Hz}, P_0=30\text{ kN}, l/h=20$)

Fig.3 The free end deflections of the FGM beam with different n ($\omega=50\text{ Hz}, P_0=30\text{ kN}, l/h=20$)

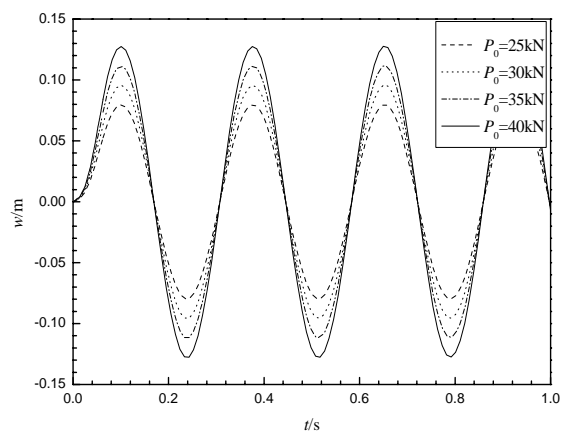


图 4 不同载荷作用下 FGM 梁的自由端挠度 ($\omega=50\text{ Hz}, n=2, l/h=20$)

Fig.4 The free end deflections of the FGM beam under different loads ($\omega=50\text{ Hz}, n=2, l/h=20$)

图 3 和图 4 分别绘出了给定不同体积分数指数的 FGM 梁和给定不同端部冲击载荷幅值时 FGM 悬臂梁自由端挠度随时间的变化曲线,其中脉冲载荷的频率为 50 Hz ,加载时间为 $\pi/50\text{ s}$ 。由图可见,载

荷作用期间自由端的挠度随着时间的增大而增大,但由于惯性的影响,冲击载荷作用开始阶段挠度增加较慢,载荷作用结束时刻梁的挠度大约为响应幅值的一半,但由于此时梁具有动能,经过与载荷作用基本相同的时段,梁的变形达到最大值,即冲击响应的最大变形发生在载荷移除后的剩余振动阶段。冲击载荷作用结束后,系统为具有初位移和初速度的自由响应,FGM 梁变为无阻尼的自由振动,其自由端挠度随着时间的增加呈周期性变化,显然具有不同体积分数指数 n 的 FGM 梁具有不同的响应频率,这是因为冲击载荷作用结束后的响应频率即为系统的固有频率。同时,载荷幅值越大,响应也越大。

图 5 绘出了 FGM 梁自由端的振幅 W 随材料体积分数指数 n 的变化关系曲线。由图可见, $n=0$ 时的纯金属梁响应的幅值最大,随 n 的增大,振幅逐渐减小。同样由于随 n 的增大,梁中金属的含量减少、陶瓷的含量增多,使得梁的弯曲刚度随 n 的增大而增大,FGM 梁的变形减小。

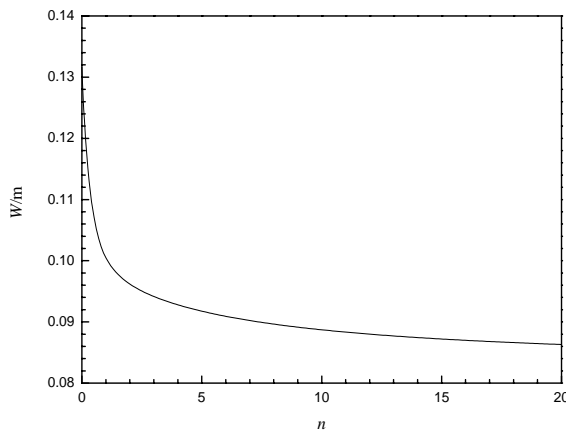


图 5 梁自由端的振幅随材料体积分数指数 n 的变化 ($\omega=50$ Hz, $P_0=30$ kN, $l/h=20$)
Fig.5 The variation of free end amplitudes of the FGM beam with n ($\omega=50$ Hz, $P_0=30$ kN, $l/h=20$)

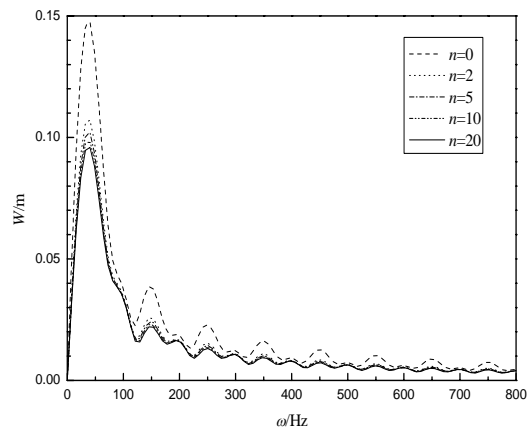


图 6 不同体积分数的 FGM 梁自由端振幅随冲击载荷频率的变化 ($P_0=30$ kN, $l/h=20$)
Fig.6 Variation of free end amplitudes of the FGM beam with the frequency of impact loads by given different volume fractions ($P_0=30$ kN, $l/h=20$)

为了考察半正弦脉冲载荷的频率对 FGM 悬臂梁动态响应的影响,图 6 绘出了自由端的响应幅值随冲击载荷频率变化的关系曲线。由图可见,随频率的增大,自由端的响应幅值先急剧增大到最大值,然后减小。对照图 1 可见,当冲击载荷频率接近 FGM 梁的固有频率时,梁的振幅最大,说明系统发生了共振。当载荷频率相对于 FGM 悬臂梁的频率很低时,响应振幅很小;当载荷频率相对于固有频率很高时,响应振幅也很小,这是因为梁的挠度受惯性的影响来不及有相应的变化。

4 结 论

本文建立了悬臂 FGM 梁在端部集中冲击载荷作用下的动力学控制方程,解析求解获得了功能梯度梁在半正弦冲击载荷作用下的瞬态动力响应的解析解,并给出其数值结果。研究发现:功能梯度悬臂梁在冲击载荷作用下的动力响应位移及固有频率都介于均匀陶瓷梁和金属梁的相应结果之间,且随材料体积分数指数的增大,瞬态位移减小,固有频率增大;随着长细比的增大,动力响应的位移增大,固有频率减小。

参 考 文 献:

[1] Zhang J H, Li G Z, Li S R, et al. DQM based thermal stress analysis of an FG cylindrical shell under thermal shock[J]. Journal of Thermal Stresses, 2015, 38(9): 959-982.
[2] 仲 政, 吴林志, 陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(5): 528-541.

- Zhong Zheng, Wu Linzhi, Chen Weiqiu. Progress in the study on mechanics problems of functionally graded materials and structures[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, 40(5): 528-541.
- [3] Mao Y Q, Fu Y M, Chen C P, et al. Nonlinear dynamic response for functionally graded shallow spherical shell under low velocity impact in thermal environment[J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2011(35): 2887-2900.
- [4] Jam J E, Kiani Y. Low velocity impact response of functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams in thermal environment[J]. *Composite Structures*, 2015(132): 35-43.
- [5] Zhang J H, Li G Z, Li S R. Analysis of transient displacements for a ceramic-metal functionally graded cylindrical shell under dynamic thermal loading[J]. *Ceramics International*, 2015, 41(9): 12378-12385.
- [6] 张靖华, 潘双超, 李世荣. 热冲击下功能梯度圆板的动力屈曲[J]. *应用力学学报*, 2015, 32(6): 901-907.
Zhang Jinghua, Pan Shuangchao, Li Shirong. Dynamic buckling of functionally graded circular plate under thermal shock [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2015, 32(6): 901-907.
- [7] 张靖华, 李世荣, 马连生. 功能梯度截顶圆锥壳的热弹性弯曲精确解[J]. *力学学报*, 2008, 40(2): 185-193.
Zhang Jinghua, Li Shirong, Ma Liansheng. Exact solution of thermoelastic bending for functionally graded truncated conical shells[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(2): 185-193.
- [8] 李世荣, 刘平. 功能梯度梁与均匀梁静态解间的相似转换[J]. *力学与实践*, 2015, 32(5): 45-50.
Li Shirong, Liu Ping. Analogous transformation of static and dynamic solutions between functionally graded material beams and uniform beams[J]. *Mechanics in Engineering*, 2015, 32(5): 45-50.