

引用格式: Qu Zhaoxia, Zhao Yonggang, Qin Huifeng. Bending Deflection of Built-in Beams at Both Ends with Nonlinear Constitutive Relation[J]. Journal of Gansu Sciences, 2020, 32(1): 1-4. [曲昭霞, 赵永刚, 秦慧峰. 非线性本构关系下两端固定梁的弯曲变形[J]. 甘肃科学学报, 2020, 32(1): 1-4.]
doi: 10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2020.01.001.

非线性本构关系下两端固定梁的弯曲变形

曲昭霞, 赵永刚, 秦慧峰

(兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要 基于经典梁理论和非线性本构关系, 研究两端固定梁在横向分布载荷作用下的弯曲问题。首先假设材料弹性模量是应变的线性函数, 推导了本构关系非线性情况下弯曲问题的基本方程。运用数值方法求解该支承条件下的弯曲问题无量纲方程的数值结果, 分析了本构非线性参数和载荷对弯曲变形的影响, 将大挠度问题与小挠度问题结果进行了对比。结果表明: 对于非线性本构关系材料的梁的弯曲问题, 即使在变形较小时也应采用大挠度方程求解。

关键词 梁; 弯曲; 数值方法; 本构关系; 非线性

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0366(2020)01-0001-04

经典力学认为在构件的变形过程中材料的弹性系数是不变的, 即在弹性范围内应力-应变本构关系是线性关系。实际上, 材料的本构关系并非完全是线性的。早在 20 世纪 60 年代末, 研究者就注意到某些材料具有明显的非线性本构关系, 如陶瓷、石墨、混凝土、多孔材料和一些有机材料、复合材料、软材料等。相关的理论和实验研究表明材料的弹性系数在构件的变形过程中是变化的, 这一变化在主应力正负号发生变化时最为明显, 研究者把受拉和受压阶段的弹性系数分别进行了线性化处理, 认为在受拉和受压阶段弹性系数分别为常数, 由此建立了拉压不同弹性模量理论, 也称为双模量理论。苏联学者 Ambartsumyan 在 1982 年完成了第一本关于该理论的著作《不同模量弹性理论》^[1]。近年来, 国内外众多学者针对弹性构件进行了大量的力学研究^[2-10]。

考虑连续变化的本构关系, 认为材料的弹性系数是应变的函数, 对横向均布载荷作用下的梁的非线性弯曲问题展开研究。通过数值结果讨论了本构关系的非线性参数对梁弯曲变形的影响。

1 基本方程

我们研究一具有非线性应力-应变本构关系的

矩形截面梁的弹性弯曲问题。梁的长度为 l , 横截面高度为 h , 宽度为 b , 梁上承受铅垂方向分布载荷 q 的作用。基于几何中面建立直角坐标系 $Oxyz$ (见图 1), x 轴为梁的轴线, y 轴和 z 轴分别选取了矩形横截面的水平和铅垂对称轴。

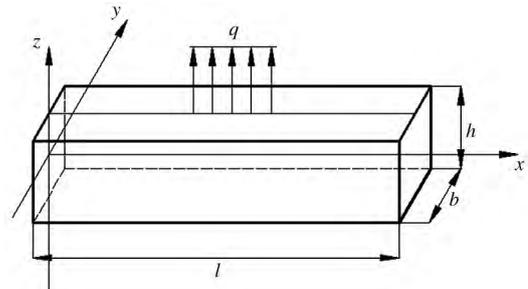


图 1 梁的结构和坐标系示意图

Fig.1 Diagram of beam structure and coordinate

1.1 几何关系

梁在发生弯曲变形时, 几何中面上的轴向应变 ϵ_0 为

$$\epsilon_0 = \frac{du}{dx} + p \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \quad (1)$$

其中: u 、 w 分别表示中面上的轴向和铅垂位移。若乘子 $p=0$, 式(1)即为梁的小挠度弯曲的几何关系, 而乘子 $p=1$ 时为大挠度弯曲情况。

对于非中面层上的任一点的变形情况, 其应变

收稿日期: 2019-03-10; 修回日期: 2019-04-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(11472123)

作者简介: 曲昭霞(1991-), 女, 甘肃武威人, 硕士研究生, 研究方向为结构非线性分析。E-mail: 18794831065@163.com

ϵ 为

$$\epsilon = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 p. \quad (2)$$

1.2 物理方程

在研究梁的弯曲变形时,假设材料的弹性模量 E 是应变的函数,即 $E = E(\epsilon)$ 。作为特例,研究时选取了弹性模量是应变的线性函数,即

$$E(\epsilon) = E_0 + E_1 \epsilon, \quad (3)$$

$$F_N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot b dz = \frac{1}{4} E_0 b \left\{ \frac{1}{3} E_r \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 h^3 + \left[E_r \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 p + 2E_r \frac{du}{dx} + 2 \right] \left[\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 p + 2 \frac{du}{dx} \right] h \right\},$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma z \cdot b dz = \frac{1}{12} E_0 b \frac{d^2w}{dx^2} \left[E_r \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 p + 2E_r \frac{du}{dx} + 1 \right] h^3. \quad (5)$$

1.3 静力学关系

当梁上承受如图 1 所示的横向分布载荷时,研究微段的平衡,得到内力平衡方程为

$$\frac{dF_N}{dx} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q + F_N \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (7)$$

$$\overline{F_N} = \frac{12F_N}{E_0 b l^2 \delta^3} = E_r \delta^2 \left(\frac{d^2W}{dX^2} \right)^2 + 3 \left[E_r \delta^2 p \left(\frac{dW}{dX} \right)^2 + 2E_r \delta^2 \frac{dU}{dX} + 2 \right] \left[\left(\frac{dW}{dX} \right)^2 p + 2 \frac{dU}{dX} \right],$$

$$\overline{M} = \frac{12M}{E_0 b l^2 \delta^4} = \frac{d^2W}{dX^2} \left[E_r \delta^2 \left(\frac{dW}{dX} \right)^2 p + 2E_r \delta^2 \frac{dU}{dX} + 1 \right]. \quad (9)$$

无量纲控制方程为

$$\frac{d\overline{F_N}}{dX} = 0, \quad \frac{d^2\overline{M}}{dX^2} = Q + \overline{F_N} \frac{d^2W}{dX^2}. \quad (10)$$

位移形式的无量纲边界条件为

固定端:在 $X = 0, 1$ 时 $U = 0, W = 0, \frac{dW}{dX} = 0$ 。

3 数值求解及结果分析

图 2 给出了长细比 $\delta = 0.08$, 本构非线性参数 E_r 不同时, 两端固定梁小挠度问题 ($p = 0$) 的中点挠度 $W(0.5)$ 随载荷 Q 变化的平衡路径。从图 2 中不同 E_r 值的路径曲线可以发现, $E_r = 0$ 时, 中点挠度随载荷 Q 的增加而线性增加; $E_r \neq 0$ 时, 挠度-载荷关系不再是线性的, 且在 E_r 取正值和负值时, 分布在 $E_r = 0$ 直线的两侧。当 $E_r > 0$ 时, 中点挠度变小, 反映了梁的抗弯曲变形能力增加了; 而 $E_r < 0$ 时, 曲线在上方, 则体现了梁的抗弯曲变形能力下降了, 呈软弹簧效应。

图 3 给出了 $Q = 100, \delta = 0.08$, 本构非线性参数 E_r 不同时, 两端固定梁的小挠度弯曲构形和中性层的位置。其中横坐标 x 为梁轴线上的坐标点, 纵坐

其中: E_0 是初始变形时材料的弹性模量; E_1 是材料弹性模量随应变线性变化的参数, 该参数体现了本构关系的非线性特性。

梁弯曲变形时, 横截面上的正应力为

$$\sigma = E(\epsilon) \cdot \epsilon = (E_0 + E_1 \epsilon) \epsilon = E_0 (\epsilon + E_r \epsilon^2), \quad (4)$$

其中: $E_r = \frac{E_1}{E_0}$ 是一个反映材料本构关系非线性程度的无量纲参数。梁横截面上的内力为

2 对基本方程的无量纲化

为了计算方便, 引入下列无量纲参数:

$$W = \frac{w}{h}, X = \frac{x}{l}, U = \frac{ul}{h^2}, \delta = \frac{h}{l}, Q = \frac{12ql}{E_0 b \delta^4}. \quad (8)$$

无量内力的表达式为

标为弯曲过程中的位移构形和中性层位置。从图 3 可以看出, 梁的弯曲变形随着 E_r 的增大而减小, 弯曲平衡构形的拐点截面上无弯矩, 不存在弯曲中性层, 从弯曲构形的拐点处, 把梁分成 3 部分, 每一部分中性层位置都有正负间连续变化。由于几何中面轴向变形的约束, 使得 $E_r \neq 0$ 时横截面上产生轴

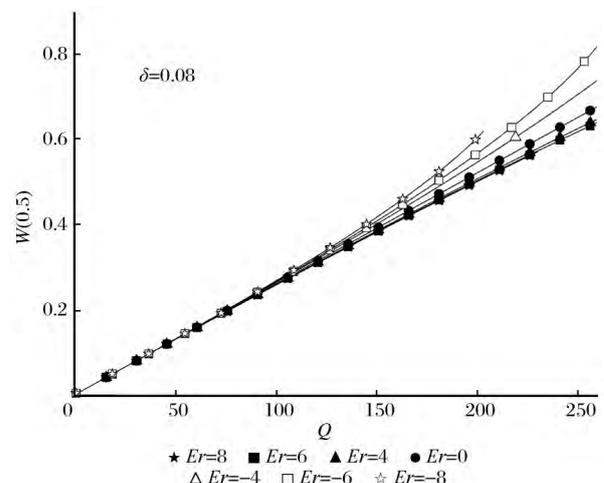


图 2 两端固定梁小挠度问题的平衡路径

Fig.2 Equilibrium path of the small deflection problem of built-in beams at both ends

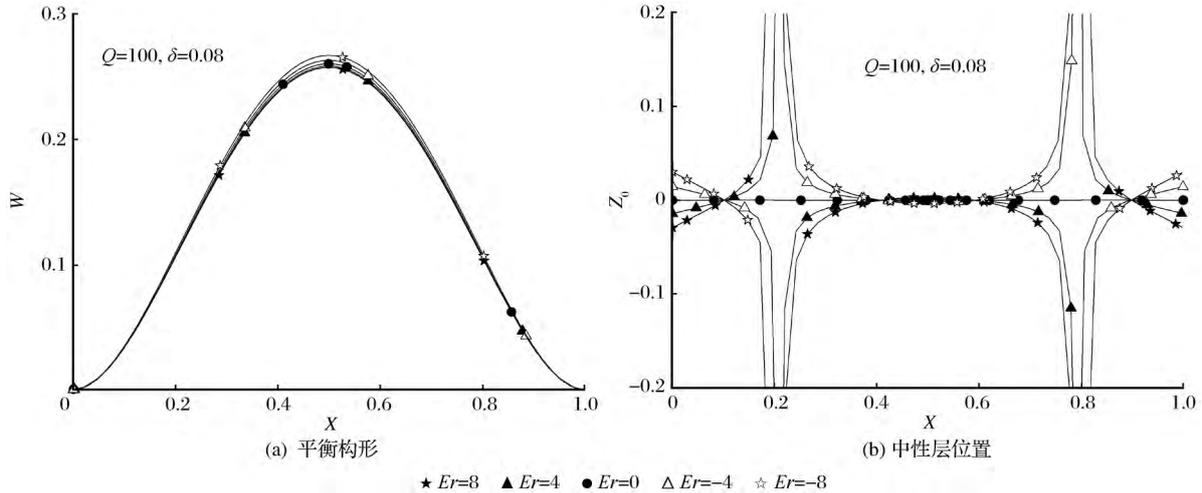


图 3 两端固定梁小挠度问题的平衡构形和中性层位置

Fig.3 Equilibrium configuration and neutral layer position in the small deflection problem of built-in beams at both ends

向力,内力弯矩引起中性层偏离几何中面,轴力对中性层位置也有影响。因此, $Z_0 = 0$ 的截面上这 2 种影响相互抵消。

图 4 给出了长细比 $\delta = 0.08$, 本构非线性参数 E_r 不同时, 两端固定梁大挠度问题 ($p = 1$) 的中点挠度 $W(0.5)$ 随载荷 Q 变化的平衡路径。

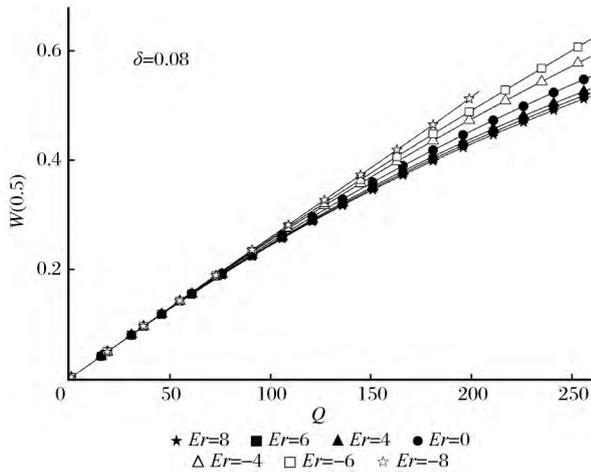


图 4 两端固定梁大挠度问题的平衡路径

Fig.4 Equilibrium path of the large deflection problem of built-in beams at both ends

从图 4 可以看出, 在 $E_r = 0$ 时, 挠度-载荷的曲线关系是非线性的, 这是几何关系非线性问题的特性。在 $E_r \neq 0$ 时同样有平衡路径分布在 $E_r = 0$ 时的两侧, 但 $E_r < 0$ 时不再呈现软弹簧效应。在 $W(0.5)$ 较小时, 大挠度问题解与小挠度问题解就有了明显的差别。 $Q = 75, Q = 125$ 时小挠度问题与大挠度问题解的比较见表 1。由表 1 可以看出, $E_r > 0$ 时小挠度问题和大挠度问题的解相对误差更大, 于是小挠度解的适用范围就更小。

表 1 小挠度问题解和大挠度问题解的比较

Table 1 Comparison of solutions between small deflection problem and large deflection problem

载荷 Q	结果来源	本构非线性参数 E_r		
		-8	0	8
$Q = 75$	小挠度	0.198 04	0.195 31	0.194 05
	大挠度	0.194 41	0.190 28	0.187 67
	相对误差	1.867%	2.643%	3.399%
$Q = 125$	小挠度	0.339 40	0.325 52	0.319 94
	大挠度	0.319 94	0.304 82	0.295 62
	相对误差	5.410%	6.791%	8.227%

注: 相对误差 = $\frac{\text{小挠度解} - \text{大挠度解}}{\text{大挠度解}} \times 100\%$ 。

图 5 给出了在 $Q = 100, \delta = 0.08$, 本构非线性参数 E_r 不同时, 两端固定梁的大挠度中性层位置。其中横坐标 x 为梁轴线上的坐标点, 纵坐标为弯曲

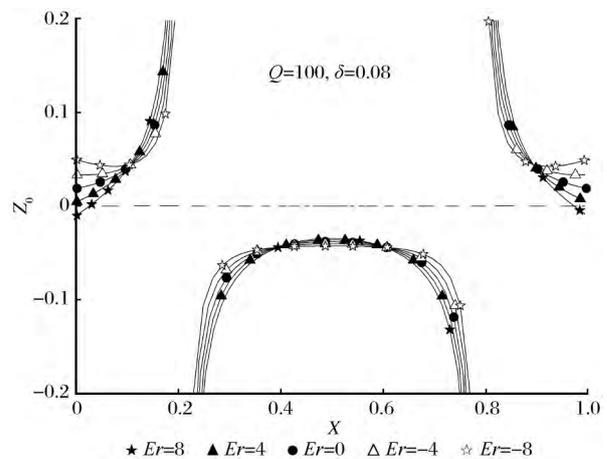


图 5 两端固定梁大挠度问题的中性层位置

Fig.5 Neutral layer position in the large deflection problem of built-in beam at both ends

过程中中性层的位置。

同图3(b)比较可以看出,由于几何非线性的影响,中性层位置不会因为 E_r 的正负变化而反向,这说明大挠度问题中,轴向拉力对弯曲变形的影响比较大。结合表1的数值结果可以看出:对于非线性本构关系材料的梁的弯曲问题,即使在变形较小时也应采用大挠度方程求解。

4 结论

基于非线性本构关系研究了两端固定梁在横向均布载荷作用下的弯曲问题。假设材料弹性模量是应变的线性函数,运用数值方法求解了该支承条件下的小挠度弯曲和大挠度弯曲的数值结果。结果表明:

(1) 本构关系的非线性参数对梁的弯曲变形有影响。弯曲变形与 E_r 的符号有关且随着 E_r 的增大而减小。

(2) 由于几何中面轴向变形的约束,使得 $E_r \neq 0$ 时横截面上产生轴向力,梁的中性层位置发生变化,且横截面中性层随着 E_r 的变化而变化。

(3) 非线性本构关系下的弯曲问题,应采用大挠度问题的方程求解。

参考文献:

[1] Ambartsumyan C A.不同模量弹性理论[M].郭瑞锋,张允真,

译.北京:中国铁道出版社,1986.

- [2] 何晓婷,陈山林.不同模量弹性力学问题研究进展[J].重庆建筑大学学报,2005,27(6):136-141.
- [3] 何晓婷,陈山林,孙俊贻.不同模量简支梁均布荷载下的弹性力学解[J].工程力学,2007,24(10):51-56.
- [4] Yao Wenjuan, Ye Zhiming. Analytical Solution for Bending Beam Subject to Lateral Force with Different Modulus[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(10): 1107-1117.
- [5] 吴晓,罗佑新.拉压弹性模量不同矩形截面杆的弯曲[J].西安建筑科技大学学报:自然科学版,2013,45(4):493-498.
- [6] 吴晓,杨立军.双模量泡沫铝芯夹层梁的弯曲计算分析[J].应用力学学报,2015,32(6):922-927,1098.
- [7] He Xiaoting, Chen Shanlin, Sun Junyi. Applying the Equivalent Section Method to Solve Beam Subjected to Lateral Force and Bending-compression Column with Different Moduli[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2007, 49(7): 919-924.
- [8] 王康建,赵永刚,王铭慧,等.拉压弹性模量不等材料杆的过屈曲分析[J].甘肃科学学报,2014,26(6):19-22.
- [9] Yao Wenjuan, Ye Zhiming. Analytical Solution of Bending-compression Column Using Different Tension-compression Modulus[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(9):983-993.
- [10] Fernando Fraternali, Saverio Spadea, Luigi Ascione. Buckling Behavior of Curved Composite Beams with Different Elastic Response in Tension and Compression[J]. Composite Structures, 2013, 100:280-289.

Bending Deflection of Built-in Beams at Both Ends with Nonlinear Constitutive Relation

Qu Zhaoxia, Zhao Yonggang, Qin Huifeng

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract Based on classical beam theory and nonlinear constitutive relation, this paper studied the bending of built-in beams at both ends under the effect of transverse loading. Firstly, it was assumed that the elasticity modulus of materials was a linear function of strain, so as to derive the basic equation of bending with the nonlinear constitutive relation. By using numerical methods to solve the dimensionless equation of bending under such support condition, the effect of the nonlinear constitutive parameters and loading on bending deflection was analyzed, and the results of large deflection were compared with the results of small deflection. The results show that the bending problem of beams of materials with nonlinear constitutive relation should be solved by large deflection equation even when the deflection is minor.

Key words Beam; Bending; Numerical method; Constitutive relation; Nonlinear