“有趣”的应用型案例教学在《线性代数》中的探索与实践

周永强[1],李燕娟[2]
(1.兰州理工大学　理学院,甘肃　兰州　730050;
2.兰州交通大学博文学院　教务处,甘肃　兰州　730101)

摘要:本文针对线性代数教学中面临的枯燥乏味、理解困难问题,从行列式的起源、“爱情行列式”、商品交易中的矩阵乘法等案例探索线性代数教学方式方法的改革与实践。

关键词:线线代数;行列式的起源;“爱情行列式”
中图分类号:G642.0　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1674-9324(2020)09-0268-02

兴趣是最好的老师,怎样把枯燥的数学理论应用于社会生活、融入传统历史文化等是提高学生学习积极性的重要问题。因此,本文针对建设线性代数“金课”,提出“有趣”的应用型案例教学方法及在具体知识点上的应用。

一、行列式的起源

西游记中唐僧有句口头禅:“贫僧唐三藏,自东土大唐而来,去往西天拜佛取经”,这句儿时看西游记很讨厌的一句话(唐僧不自报家门,妖怪可能还不知道他是唐僧,自然不会吃他),现在看来这句口头禅其实回答了三大哲理性问题(我是谁,从哪儿来,到哪儿去)。那么行列式从哪儿来的呢?

行列式起源于线性方程组的求解。1693年4月,德国数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz)在写给法国数学家洛必达(Marquis de l'Hôpital)的一封信中使用并给出了行列式,并给出方程组的系数行列式为零的条件 [1]。1729年,英国数学家麦克劳林(Colin Maclaurin)得到了著名的“Cramer法则”,即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式。1750年,瑞士数学家克拉默(Cramer,Gabriel)在其著作《代数曲线的分析引论》中,对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述[2],由于其优越的符号,形成了“Cramer法则”。1841年,德国数学家雅克比(Jacobi,Carl Gustav Jacob)在其《On the formation and the properties of determinants》中,提出了行列式的系统理论[1]。

在开篇第一讲,由唐僧的口头禅引出“事物皆有源”,通过求解二元线性方程组进而给出二阶行列式。将古典名著引入到线性代数教学中,提高学生的学习兴趣,增加学生学习线性代数的趣味,同时增强了学生对中国历史文化的认同感,有助于建立学生的“文化自信”。

二、爱情行列式

数学从来不是枯燥无味的,数学到处充满了哲理和美,数学是浪漫的。从笛卡尔的心形线到著名的微积分,我将对你的爱写进每一个微分里,然后积起来,直到无法收敛……我的心就像e^x,不管求几次导,依旧不变。线性代数也有其独特的浪漫,比如在讲授三阶行列式时,我们将引入“爱情行列式”。“爱情行列式”是什么样的?应该怎么计算呢?带着这个问题,我们先来讲解三元线性方程组与三阶行列式。

对于三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1}$$

采用消元法求出它的解(有点复杂)。为了便于表示它的解,我们引进三阶行列式。

定义[3]:设有9个数排成3行3列的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{2}$$

记:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

收稿日期:2019-05-18
基金项目:2019年度兰州理工大学高等教育研究项目(GJ2019B-33);兰州理工大学博士基金项目(05-061405);甘肃省高等学校科研项目(2017A-240);兰州交通大学博文学院教育教学改革项目(2019BWJX007)
作者简介:周永强(1986-),男,河南人,博士,副教授,研究方向:随机差错控制及应用。

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (3)$$

（3）式称为数表（2）所确定的三阶行列式。

从上述定义可看出，数表（2）中各个元素为方程组（1）中未知数的系数。三阶行列式含有6项，每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积，前三项为加号，后三项为减号，其规律符合对角线法则：主对角线上的元素相乘+和主对角线平行的元素相乘-次对角线上的元素相乘-和次对角线平行的元素相乘。而且，6项中每一项元素的行标均为123，而每一项元素的列标为123的6种排列。此规律为下一节逆序数和n阶行列式的定义做铺垫。作为练习，请同学们计算如下行列式：

$$\begin{vmatrix} 我 & 0 & 生 \\ 0 & 有 & 0 \\ 你 & 0 & 幸 \end{vmatrix}=我有幸-生有你 \qquad (4)$$

（4）式称为“爱情行列式”。此式从行列式的角度阐释了数学的浪漫，从某种程度上激发了学生学习的积极性。随着时间的流逝，若干年后，同学们也许对线性代数这门课不那么熟悉了，但对“爱情行列式”可能会印象深刻。

三、商品交易中的矩阵乘法

矩阵的乘法在矩阵的运算乃至线性代数中起着举足轻重的作用。为了加深这部分内容的理解，阐明数学来源于生活，在本部分教学中首先通过社会生活实例“商品的日均总收入和总利润”引出矩阵的乘法，并由此给出矩阵乘法的定义。

小周和小李同时销售α、β、γ三种型号的iPad，它们的日均销量（单位：部）及单价和利润（单位：千元）分别可以用下列矩阵来表示：

$$A=\begin{array}{c} \\ 周 \\ 李 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \quad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 单价 & 利润 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0.2 \\ 4 & 0.3 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array}$$

问题：周李二人销售这三种型号iPad的日均总收入和总利润分别是多少？

$$C=AB=\begin{array}{c} \\ 周 \\ 李 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 6 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 单价 & 利润 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0.2 \\ 4 & 0.3 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array}=\begin{array}{c} \\ 周 \\ 李 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 总收入 & 总利润 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 110 & 9 \\ 130 & 10.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

由此引出矩阵乘法的定义：

定义[4]：设矩阵$A=(a_{ik})_{m\times t}$，$B=(b_{kj})_{t\times n}$，定义$C=(c_{ij})_{m\times n}$为矩阵A左乘矩阵B（或矩阵B右乘矩阵A）之积，记为$C=AB$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{t}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{it}b_{tj}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

乘积矩阵$AB=C$的第i行第j列元素c_{ij}就是A的第i行元素与B的第j列对应元素的乘积之和。

参考文献：

[1]杨浩菊.行列式理论历史研究[D].西北大学博士学位论文，2004.

[2]杜新伟.浅谈如何讲好线性代数的第一节课[J].吉林广播电视大学学报，2019，5:1-2.

[3]同济大学数学系.工程数学线性代数第五版[M].北京：高等教育出版社，2013.

[4]唐晓文，王昆仑，陈翠.线性代数第二版[M].上海：同济大学出版社，2014.

Exploration and Practice of "Interesting" Applied Case Teaching in Linear Algebra

ZHOU Yong-qiang[1], LI Yan-juan[2]

(1.School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China;
2.Lanzhou Jiaotong University Bowen College, Lanzhou, Gansu 730101, China)

Abstract: This paper aims at the boring and difficult problems in linear algebra teaching, and explores the reform and practice of linear algebra teaching method from the origin of determinant, " love determinant", matrix multiplication in commodity trading and other cases.

Key words: linear algebra; the origin of determinant; "love determinant"