

文章编号: 1000-4750(2016)07-0031-08

# 基于分数阶热弹性理论的 含有球型空腔无限大体的热冲击动态响应

马永斌<sup>1,2</sup>, 何天虎<sup>2</sup>

(1. 西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心, 兰州 730050; 2. 兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

**摘 要:** 基于新近提出的分数阶广义热弹性理论, 研究了含有球型空腔的无限大体受热冲击作用时的动态响应。该文给出分数阶广义热弹性理论下的控制方程, 通过拉普拉斯积分变换及其数值反变换对控制方程进行了求解, 得到了带有球型空腔无限大体中的无量纲温度、位移、径向应力和环向应力等物理量的分布规律。计算中重点研究了分数阶参数对各物理量的影响效应。结果表明: 含有球腔的无限大体内由于热冲击而出现了热弹耦合效应; 分数阶参数显著地影响各物理量的分布规律。

**关键词:** 广义热弹性理论; 热冲击; 分数阶; 拉普拉斯变换; 球型腔体

中图分类号: O343.6 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.12.1062

## THERMAL SHOCK DYNAMIC RESPONSE OF AN INFINITE BODY WITH A SPHERICAL CAVITY UNDER FRACTIONAL ORDER THEORY OF THERMOELASTICITY

MA Yong-bin<sup>1,2</sup>, HE Tian-hu<sup>2</sup>

(1. Western Engineering Research Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering of Ministry of Education, Lanzhou 730050, China;

2. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** The dynamic response of an infinite body with a spherical cavity subjected to a thermal shock is investigated in the context of fractional order thermoelasticity theory proposed recently. The governing equations of the problem based on the fractional order thermoelasticity theory are formulated and solved by means of Laplace transform and its numerical inversion. The non-dimensional temperature, displacement, radial stress and hoop stress are thusly obtained and illustrated graphically. In the calculation, the emphasis is focused on investigating the effect of the fractional order theory on the variations of the physical variables considered. The results show that the thermoelastic coupling effect caused by the applied thermal shock occurs in the infinite body and the fractional order parameter significantly influences the distributions of the physical variables considered.

**Key words:** theory of generalized thermoelasticity; thermal shock; fractional order; Laplace transform; spherical cavity

为消除经典热弹性理论中热在介质中以无限大速度进行传播的悖论, 学者们发展了广义的热弹性理论, 目前得到广泛应用的有 Lord-Shulman<sup>[1]</sup> (L-S)广义热弹性理论和 Green-Lindsay<sup>[2]</sup> (G-L)广义热弹性理论。基于广义热弹性理论, 学者们开展了

大量的研究工作<sup>[3-8]</sup>。

自 Abel 首次运用分数阶导数求解等时曲线问题中积分方程的解之后, 分数阶微积分已被成功运用来修正许多现有的物理模型, 尤其是在热传导、扩散、粘弹性等领域<sup>[9-13]</sup>。对于许多的材料和物理

收稿日期: 2014-12-18; 修改日期: 2015-12-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(11372123); 甘肃省自然科学基金项目(148RJZA007); 兰州理工大学红柳杰出人才计划项目(050454)

通讯作者: 何天虎(1973-), 男, 甘肃人, 教授, 博士, 从事多物理场耦合、电磁固体力学研究(E-mail: heth@lut.cn).

作者简介: 马永斌(1974-), 男, 甘肃人, 副教授, 硕士, 从事多物理场耦合力学研究(E-mail: myb\_ssy@lut.cn).

过程,例如,低温过程、人造物和生物材料/聚合物、瞬时荷载等,经典热弹性理论和广义热弹性理论已难以有效描述这些情形下的热弹行为。在此情形下,将分数阶微积分引入热弹性理论已变得十分必要。Povstenko<sup>[14]</sup>基于对时间微分的分数阶热传导方程,提出了一个准静态非耦合的热弹性理论。Youssef<sup>[15-16]</sup>通过将 Riemann-Liouville 分数阶积分算子引入广义热传导方程中,建立了耦合的分数阶广义热弹性理论,其中,热传导方程具有如下形式:

$$q_i + \tau_0 \frac{\partial q_i}{\partial t} = -\kappa_{ij} I^{\alpha-1} \theta_{,j}, \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad (1)$$

该理论认为,当  $0 < \alpha < 1$  为弱传导,  $\alpha = 1$  时为正常传导,  $1 < \alpha \leq 2$  时为强传导。基于该理论, Youssef<sup>[17]</sup>借助拉氏和傅氏积分变换研究了二维的热冲击问题; Youssef 和 Al-Lehaibi<sup>[18]</sup>利用拉氏变换和状态空间法研究了受坡形热载荷作用的半无限大体的热弹问题。最近, Sherief 等<sup>[19]</sup>提出了一个全新的分数阶广义热弹性理论。应用该理论, Shweta 和 Santwana<sup>[20]</sup>借助拉氏变换和状态空间法研究了半无限大体的热弹响应问题; Sherief 和 El-Latief<sup>[21]</sup>借助拉氏变换及其数值反变换研究了具有可变热传导率的半无限大体的热冲击问题。

在 Sherief<sup>[19]</sup>等的分数阶广义热弹性理论中,热传导方程具有如下形式:

$$q_i + \tau_0 \frac{\partial q_i}{\partial t} = -\kappa_{ij} \theta_{,j} \quad (2)$$

式(1)和式(2)中:  $q_i$  为热流分量;  $\theta$  为温度增量;  $\tau_0$  为热松弛时间;  $\kappa_{ij}$  为热传导系数;  $\alpha$  为分数阶参数,此处取值为  $0 < \alpha \leq 1$ 。在推导该方程的过程中, Sherief 等应用了绝对连续函数  $f(t)$  的阶数为  $\alpha$  ( $\alpha \in (0,1]$ ) 的分数导数,其定义式如下<sup>[22]</sup>:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = I^{1-\alpha} f'(t)$$

式中:  $I^\alpha$  是阶数为  $\alpha$  的函数  $f(t)$  的分数积分,其定义式如下<sup>[23]</sup>:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

其中,  $f(t)$  为勒贝格积分函数且  $\alpha > 0$ 。

分数阶导数和整数阶导数的最大区别就是分数阶导数是全局拟算子,整数阶导数是一个局部算子。Riemann-Liouville 分数阶导数数学性质如下:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(x,t) = \begin{cases} f(x,t) - f(x,0), & \alpha \rightarrow 0 \\ I^{1-\alpha} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}, & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

这里  $I^\alpha$  为 Riemann-Liouville 分数阶积分算子。

分数阶参数  $\alpha$  可视为延迟时间影响因子,通过改变延迟效应来影响热冲击的作用效果。不同的分数阶参数对弹性波及热波传播的影响效果不同。

当  $\alpha = 1$  时,上述热传导方程式(2)将退化为 L-S 理论中的波型热传导方程:

$$q_i + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} q_i = -\kappa_{ij} \theta_{,j} \quad (3)$$

本文则基于 Sherief 等<sup>[19]</sup>的分数阶热弹性理论,研究含有球形空腔无限大体受热冲击作用的动态响应问题。借助拉氏变换及其数值反变换,得到了无限大体中无量纲温度、位移、应力等的分布规律。

## 1 基本方程及问题描述

不计体力和内热源,对均质各向同性热弹体,基于 Sherief<sup>[19]</sup>等提出的分数阶广义热弹性理论,其控制方程为:

运动方程:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} - \beta \theta_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (4a)$$

热传导方程:

$$\kappa \theta_{,ii} = \left( 1 + \tau_0 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) (\rho C_E \dot{\theta} + T_0 \beta \dot{e}_{kk}) \quad (4b)$$

本构方程:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij} (\lambda e_{kk} - \beta \theta) \quad (4c)$$

应变-位移关系:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4d)$$

其中:  $u_i$  为位移分量;  $e_{ij}$  为应变分量;  $e = e_{kk}$  为体积膨胀率;  $\sigma_{ij}$  为应力分量;  $\rho$  为密度;  $\tau_0$  为热松弛时间;  $C_E$  为常应变下比热;  $\kappa$  为热传导系数;  $T_0$  为初始环境温度;  $\theta$  为温度增量;  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 张量分量;  $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ ,  $\alpha_t$  为线性热膨胀系数,  $\lambda$ 、 $\mu$  为拉梅常数; 下标的逗号及其后缀表示对空间坐标的导数; 变量上方的点表示对时间的导数。

考虑一含有半径为  $R$  的球形空腔的无限大体,

空腔内表面处受热冲击作用。采用球坐标系  $(r, \theta, \phi)$ ，坐标原点在球形空腔的中心处。由于几何形状及外加载荷的球对称性，位移分量具有如下形式：

$$u_r = u(r, t), \quad u_\theta = 0, \quad u_\phi = 0 \quad (5)$$

根据以上位移分量，式(1)~式(3)可简化为：

$$(\lambda + 2\mu)e_{,r} - \beta\theta_{,r} = \rho\ddot{u} \quad (6)$$

$$\kappa\nabla^2\theta = \left(1 + \tau_0 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right)(\rho C_E \dot{\theta} + T_0 \beta \dot{e}) \quad (7)$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda e - \beta\theta \quad (8a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = 2\mu \frac{u}{r} + \lambda e - \beta\theta \quad (8b)$$

其中： $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$  为拉普拉斯算子； $e$  为体积膨胀率，其表达式如下：

$$e = e_{kk} = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\phi\phi} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) \quad (9)$$

为便于计算，引入如下的无量纲量：

$$\begin{cases} r^* = c_0 \eta_0 r, & u^* = c_0 \eta_0 u, & \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} / (\lambda + 2\mu), \\ t^* = c_0^2 \eta_0 t, & \tau_0^* = c_0^2 \eta_0 \tau_0, & \eta_0 = \rho C_E / \kappa, \\ \theta^* = \beta \theta / (\lambda + 2\mu), & c_0^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho \end{cases} \quad (10)$$

经无量纲化处理，式(6)~式(8b)具有如下形式(为简便起见，去掉各量右上方的星号)。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (11)$$

$$\nabla^2 \theta = \left(1 + \tau_0 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right)(\dot{\theta} + \varepsilon \dot{e}) \quad (12)$$

$$\sigma_{rr} = e - \frac{4}{\beta_1^2} \frac{u}{r} - \theta \quad (13a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \left(1 - \frac{2}{\beta_1^2}\right)e + \frac{2}{\beta_1^2} \frac{u}{r} - \theta \quad (13b)$$

式中： $\beta_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \mu$ ； $\varepsilon = \beta^2 T_0 / (\rho^2 C_E c_0^2)$ 。

为了对控制方程进行求解，需给定问题的初始条件和边界条件。初始条件和边界条件如下：

初始条件：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } u = \theta = 0, \quad \dot{u} = \dot{\theta} = 0 \quad (14)$$

边界条件：

$$\sigma_{rr}(R, t) = 0, \quad \theta(R, t) = \theta_0 H(t) \quad (15)$$

## 2 拉普拉斯域方程求解

将 Riemann-Liouville 拉普拉斯变换式<sup>[4]</sup>：

$$L[I^n F(t)] = \frac{1}{s^n} L[F(t)], \quad n > 0 \quad (16)$$

应用到式(11)~式(13b)，可得：

$$s^2 \bar{u} = \frac{\partial \bar{e}}{\partial r} - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} \quad (17)$$

$$\nabla^2 \bar{\theta} = (s + \tau_0 s^\alpha) \bar{\theta} + \varepsilon (s + \tau_0 s^\alpha) \bar{e} \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \bar{e} - \frac{4}{\beta_1^2} \frac{\bar{u}}{r} - \bar{\theta} \quad (19a)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \bar{\sigma}_{\phi\phi} = \left(1 - \frac{2}{\beta_1^2}\right) \bar{e} + \frac{2}{\beta_1^2} \frac{\bar{u}}{r} - \bar{\theta} \quad (19b)$$

对式(17)运用微分算子  $\nabla = \partial / \partial r + 2 / r$ ，可得：

$$(\nabla^2 - s^2) \bar{e} = \nabla^2 \bar{\theta} \quad (20)$$

由式(18)和式(20)消去  $\bar{\theta}$ ，得到满足  $\bar{e}$  的微分方程：

$$\nabla^4 \bar{e} - [(s + \tau_0 s^\alpha)(\varepsilon + 1) + s^2] \nabla^2 \bar{e} + s^2 (s + \tau_0 s^\alpha) \bar{e} = 0 \quad (21)$$

类似地，可得到  $\bar{\theta}$  所满足的偏微分方程：

$$\nabla^4 \bar{\theta} - [(s + \tau_0 s^\alpha)(\varepsilon + 1) + s^2] \nabla^2 \bar{\theta} + s^2 (s + \tau_0 s^\alpha) \bar{\theta} = 0 \quad (22)$$

式(21)、式(22)可被分解成如下形式：

$$(\nabla^2 - k_1^2)(\nabla^2 - k_2^2)(\bar{e}, \bar{\theta}) = 0 \quad (23)$$

其中， $k_1^2$  和  $k_2^2$  是如下特征方程的根：

$$k^4 - [(s + \tau_0 s^\alpha)(\varepsilon + 1) + s^2] k^2 + s^2 (s + \tau_0 s^\alpha) = 0 \quad (24)$$

通过求解，可得  $\bar{e}$  和  $\bar{\theta}$  的解的表达式分别如下：

$$\bar{e}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 B_i(s) K_{1/2}(k_i r) \quad (25)$$

$$\bar{\theta}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 B'_i(s) K_{1/2}(k_i r) \quad (26)$$

其中： $B_i$ 、 $B'_i$  ( $i=1, 2$ ) 为与  $s$  相关的待定参数； $K_{1/2}$  为修正的第二类贝塞尔函数，从式(20)、式(25)和式(26)可得到如下关系：

$$B'_i(s) = \frac{k_i^2}{k_i^2 - s^2} B_i(s) \quad (27)$$

由式(9)和式(26)，可得：

$$\bar{u}(r, s) = -\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 \frac{B_i(s) K_{3/2}(k_i r)}{k_i} \quad (28)$$

将式(26)和式(29)分别代入式(19a)和式(19b), 可得:

$$\bar{\sigma}_{rr}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 [B_i(s) / (k_i^2 - s^2)] \cdot [K_{1/2}(k_i r) s^2 + K_{3/2}(k_i r) 4k_i / \beta_1^2 r] \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(r, s) = \bar{\sigma}_{\phi\phi}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^2 [B_i(s) / (k_i^2 - s^2)] \cdot [K_{1/2}(k_i r) (s^2 - 2k_i^2 / \beta_1^2) - K_{3/2}(k_i r) 2k_i / \beta_1^2 r] \quad (30)$$

拉氏域中的边界条件:

$$\bar{\sigma}_{rr}(R, s) = 0, \quad \bar{\theta}(R, s) = \theta_0 / s \quad (31)$$

为计算待定参数  $B_i(s) (i=1, 2)$ , 将式(26)及式(29)分别代入边界条件式(31)中, 可得:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{k_i^2}{k_i^2 - s^2} B_i(s) K_{1/2}(k_i R) = \theta_0 \sqrt{R} / s \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^2 [B_i(s) / (k_i^2 - s^2)] \cdot [K_{1/2}(k_i R) \cdot s^2 + K_{3/2}(k_i R) \cdot 4k_i / \beta_1^2 R] = 0 \quad (33)$$

联立求解, 可得:

$$B_1(s) = 2\sqrt{R} \cdot \theta_0 \cdot (M_{12} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{32} k_2) (k_1^2 - s^2) / [M_{11} M_{12} R \beta_1^2 s^2 (k_1^2 - k_2^2) + 4M_{11} M_{32} k_2 \cdot (k_1^2 - s^2) - 4M_{12} M_{31} k_1 (k_2^2 - s^2)] \quad (34a)$$

$$B_2(s) = -2\sqrt{R} \cdot \theta_0 \cdot (M_{11} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{31} k_1) (k_2^2 - s^2) / [M_{11} M_{12} R \beta_1^2 s^2 (k_1^2 - k_2^2) + 4M_{11} M_{32} k_2 \cdot (k_1^2 - s^2) - 4M_{12} M_{31} k_1 (k_2^2 - s^2)] \quad (34b)$$

其中:  $M_{11} = K_{1/2}(k_1 R)$ ;  $M_{12} = K_{1/2}(k_2 R)$   $M_{31} = K_{3/2}(k_1 R)$ ;  $M_{32} = K_{3/2}(k_2 R)$ , 进而可得:

$$B'_1(s) = 2\sqrt{R} \cdot \theta_0 \cdot k_1^2 (M_{12} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{32} k_2) / [M_{11} M_{12} R \beta_1^2 s^2 (k_1^2 - k_2^2) + 4M_{11} M_{32} k_2 \cdot (k_1^2 - s^2) - 4M_{12} M_{31} k_1 (k_2^2 - s^2)] \quad (35a)$$

$$B'_2(s) = -2\sqrt{R} \cdot \theta_0 \cdot k_2^2 (M_{11} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{31} k_1) / [M_{11} M_{12} R \beta_1^2 s^2 (k_1^2 - k_2^2) + 4M_{11} M_{32} k_2 \cdot (k_1^2 - s^2) - 4M_{12} M_{31} k_1 (k_2^2 - s^2)] \quad (35b)$$

令:

$$A = [M_{11} M_{12} R \beta_1^2 s^2 (k_1^2 - k_2^2) + 4M_{11} M_{32} k_2 (k_1^2 - s^2) - 4M_{12} M_{31} k_1 (k_2^2 - s^2)],$$

得到各物理量的表达式:

$$\bar{\theta}(r, s) = 2\sqrt{R} \theta_0 (k_1^2 K_{1/2}(k_1 r) (M_{12} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{32} k_2) - k_2^2 K_{1/2}(k_2 r) (M_{11} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{31} k_1)) / A \sqrt{r} \quad (36)$$

$$\bar{\sigma}_{rr}(r, s) = 2\sqrt{R} \theta_0 [(K_{1/2}(k_1 r) s^2 + K_{3/2}(k_1 r) 4k_1 / \beta_1^2 r) \cdot (M_{12} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{32} k_2) - (K_{1/2}(k_2 r) s^2 + K_{3/2}(k_2 r) \cdot 4k_2 / \beta_1^2 r) \cdot (M_{11} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{31} k_1)] / A \sqrt{r} \quad (37)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(r, s) = \bar{\sigma}_{\phi\phi}(r, s) = 2\sqrt{R} \theta_0 / A \sqrt{r} \cdot [(K_{1/2}(k_1 r) \cdot (s^2 - 2k_1^2 / \beta_1^2) - K_{3/2}(k_1 r) 2k_1 / \beta_1^2 r) \cdot (M_{12} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{32} k_2) - (K_{1/2}(k_2 r) \cdot (s^2 - 2k_2^2 / \beta_1^2) - K_{3/2}(k_2 r) 2k_2 / \beta_1^2 r) \cdot (M_{11} R \beta_1^2 s^2 + 4M_{31} k_1)] \quad (38)$$

### 3 拉普拉斯数值反变换

为得到时间域中各物理量的分布规律, 需对拉氏域中得到的各物理量的解进行拉普拉斯反变换。

由于拉氏域中各物理量解的复杂性, 要对其进行解析反变换几乎是不可能的, 只能采取数值反变换的方法。这里, 引入如下拉普拉斯数值反变换方法<sup>[24]</sup>。

将拉普拉斯变换函数  $y(t)$  做如下定义:

$$\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt, \quad s > 0 \quad (39)$$

令  $x = e^{-t}$ , 并代入式(39), 可以得到:

$$\tilde{F}(s) = \int_0^1 x^{s-1} H(x) dx \quad (40)$$

其中,  $H(x) = y(-\ln(x))$ , 对式(40)运用高斯求积公式, 则:

$$\tilde{F}(s) = \sum_{i=1}^N Q_i x_i^{s-1} H(x_i) \quad (41)$$

其中:  $x_i (i=1, 2, \dots, N)$  为勒让德多项式  $s_N(x) = 0$  的根;  $Q_i (i=1, 2, \dots, N)$  为相应加权函数。式(41)可写为:

$$Q_1 x_1^{s-1} H(x_1) + \dots + Q_N x_N^{s-1} H(x_N) = \tilde{F}(s) \quad (42)$$

将  $s=1, 2, \dots, N$  代入式(42)可以得到:

$$\begin{cases} Q_1 H(x_1) + \dots + Q_N H(x_N) = \tilde{F}(1) \\ Q_1 x_1 H(x_1) + \dots + Q_N x_N H(x_N) = \tilde{F}(2) \\ \dots \\ Q_1 x_1^{N-1} H(x_1) + \dots + Q_N x_N^{N-1} H(x_N) = \tilde{F}(N) \end{cases} \quad (43)$$

则  $H(x_i)$  可表示为:

$$\begin{Bmatrix} H(x_1) \\ H(x_2) \\ \dots \\ H(x_N) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_N \\ Q_1 x_1 & Q_2 x_2 & \dots & Q_N x_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_1 x_1^{N-1} & Q_2 x_2^{N-1} & \dots & Q_N x_N^{N-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

$$\begin{cases} \tilde{F}(1) \\ \tilde{F}(2) \\ \dots \\ \tilde{F}(N) \end{cases} \quad (44)$$

进而从式(44)可以得到  $x_i$  和  $Q_i$ 。采用插值方法得到函数  $y(t)$ 。

### 4 数值结果及讨论

计算中, 含有球形空腔的无限大体采用铜质材料, 其材料特性参数如下:

$$\begin{aligned} \alpha_t &= 1.78 \times 10^5 \text{ K}^{-1}, \lambda = 7.76 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \\ \rho &= 8954 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, C_E = 383.1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ \kappa &= 386 \text{ N} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}. \end{aligned}$$

其他参数:

$$R = 1, T_0 = 293, \tau = 0.01, \theta_0 = 1.$$

为分析各物理量随时间  $t$  和分数阶参数  $\alpha$  的变化规律, 计算中考虑两个时刻, 即  $t=0.02$ 、 $t=0.3$ , 四个不同的  $\alpha$  值, 即  $\alpha=0.25$ 、 $0.5$ 、 $0.75$ 、 $1.0$ 。得到了无量纲温度  $\theta$ 、位移  $u$ 、径向应力  $\sigma_{rr}$  和环向应力  $\sigma_{\phi\phi}$  的分布规律, 如图 1~图 8 所示。

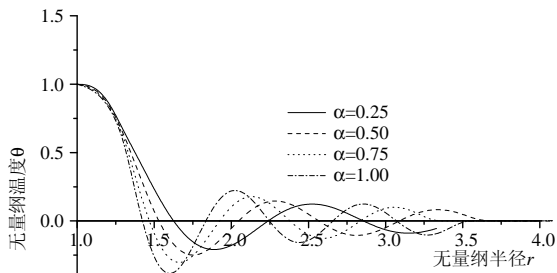


图 1 无量纲温度  $\theta$  随  $\alpha$  的变化规律( $t=0.02$ )

Fig.1 The distributions of the non-dimensional temperature  $\theta$  with  $\alpha$  ( $t=0.02$ )

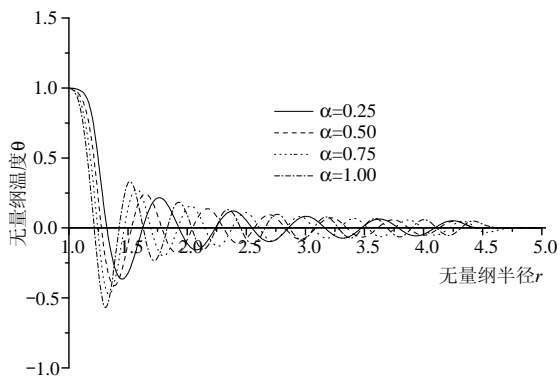


图 2 无量纲温度  $\theta$  随  $\alpha$  的变化规律( $t=0.3$ )

Fig.2 The distributions of the non-dimensional temperature  $\theta$  with  $\alpha$  ( $t=0.3$ )

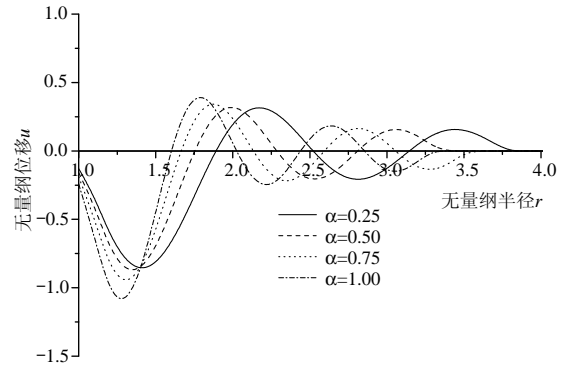


图 3 无量纲位移  $u$  随  $\alpha$  的变化规律( $t=0.02$ )

Fig.3 The distributions of the non-dimensional displacement  $u$  with  $\alpha$  ( $t=0.02$ )

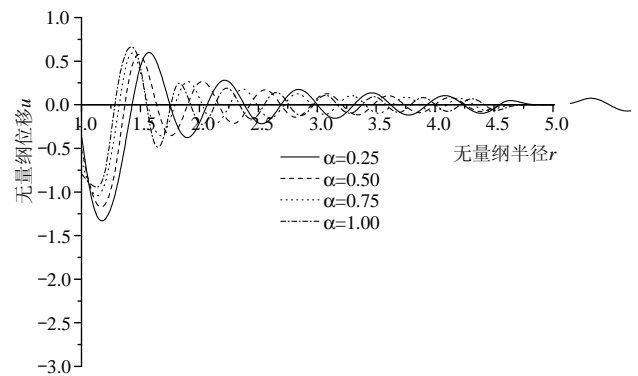


图 4 无量纲位移  $u$  随  $\alpha$  的变化规律( $t=0.3$ )

Fig.4 The distributions of the non-dimensional displacement  $u$  with  $\alpha$  ( $t=0.3$ )

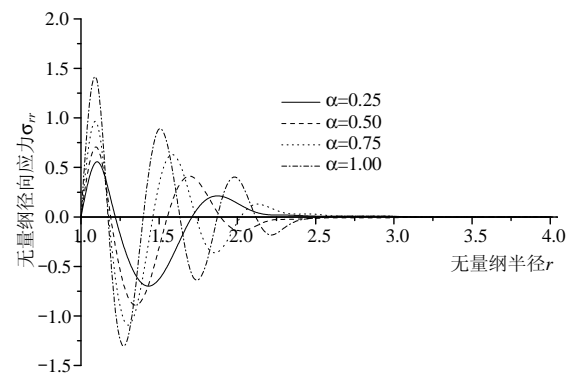


图 5 无量纲径向应力  $\sigma_{rr}$  随  $\alpha$  的变化规律( $t=0.02$ )

Fig.5 The distributions of the non-dimensional radial stress  $\sigma_{rr}$  with  $\alpha$  ( $t=0.02$ )

当球腔内施加热冲击时, 临近球腔的无限大体的介质受热变形, 由此产生了位移和应力, 体现了热-弹的耦合效应。从图 1~图 8 可看出, 在较小时刻, 各物理量非零值的分布区间也较小, 随时间增大, 各物理量非零值的分布区间在扩大, 这意味着由热扰动引起的热弹耦合效应随时间增大而向无限大体内进行延伸。而一旦时刻给定, 热-弹扰动的区间都是有限的。

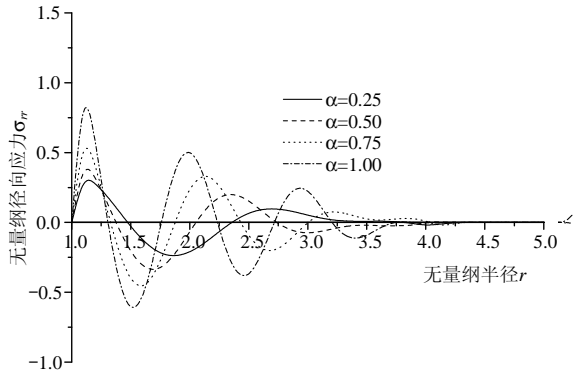


图 6 无量纲径向应力  $\sigma_{rr}$  随  $\alpha$  的变化规律( $t=0.3$ )

Fig.6 The distributions of the non-dimensional radial stress  $\sigma_{rr}$  with  $\alpha$  ( $t=0.3$ )

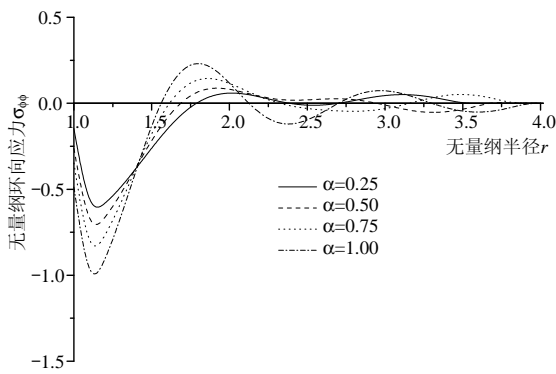


图 7 无量纲环向应力  $\sigma_{\phi\phi}$  随  $\alpha$  的变化规律( $t=0.02$ )

Fig.7 The distributions of the non-dimensional hoop stress  $\sigma_{\phi\phi}$  with  $\alpha$  ( $t=0.02$ )

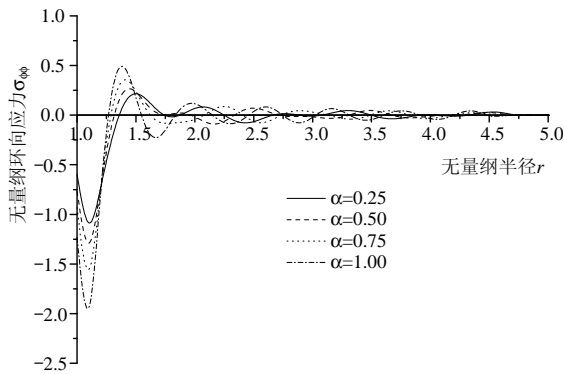


图 8 无量纲环向应力  $\sigma_{\phi\phi}$  随  $\alpha$  的变化规律( $t=0.3$ )

Fig.8 The distributions of the non-dimensional hoop stress  $\sigma_{\phi\phi}$  with  $\alpha$  ( $t=0.3$ )

从图 1~图 8 可看出, 分数阶参数  $\alpha$  对各物理量的分布影响显著。在同一时刻, 不同的分数阶参数下, 物理量的变化趋势具有相似性, 均呈波动变化, 幅值逐渐减小并趋于零值; 随分数阶参数  $\alpha$  增大, 各物理量的正值的最大值、负值绝对值的最大值的大小都在显著增加, 且各物理量幅值的变化由平缓变得陡峭。

图 1 和图 2 中, 在  $r=1$  处, 温度的变化始终是

从 1 开始减小, 这与球腔处所施加的热冲击是一致的, 即当在球腔处施加一个热冲击后, 此处的温度值保持恒定, 即为所施加的热冲击的幅值。

图 5 和图 6 中, 在  $r=1$  处, 径向应力始终保持为零, 这与无限大体在球腔处的应力自由的边界条件是相吻合的。

为反映球型空间特征点随时间的变化规律, 这里取  $r=1.5$ 、 $r=2.0$  处的空间特征点进行分析, 得到这些空间特征点处无量纲位移、径向应力和环向应力随时间变化规律(图 9~图 11)。可以看出, 在  $t=1$  时刻, 无量纲位移、径向应力和环向应力均出现比较明显的变化。

图 12~图 13 显示无量纲径向应力和环向应力在  $\alpha=1$ 、 $t=0.25$  时与文献[25]结果对比。从图 12~图 13 可以看出, 径向应力和环向应力在该时刻分布趋势一致, 均出现明显的波动效应。

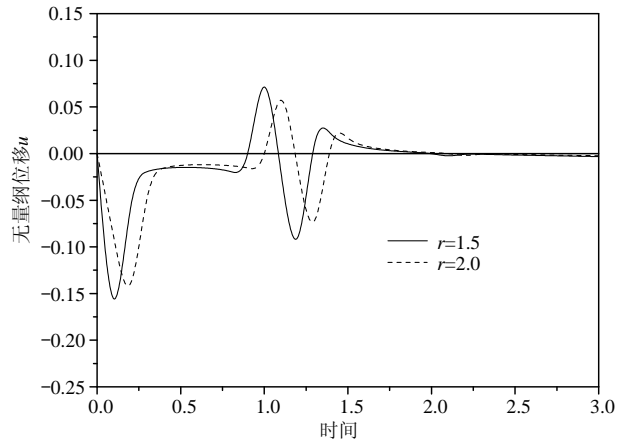


图 9 无量纲位移随时间  $t$  的变化规律

Fig.9 The distributions of the non-dimensional displacement with time  $t$

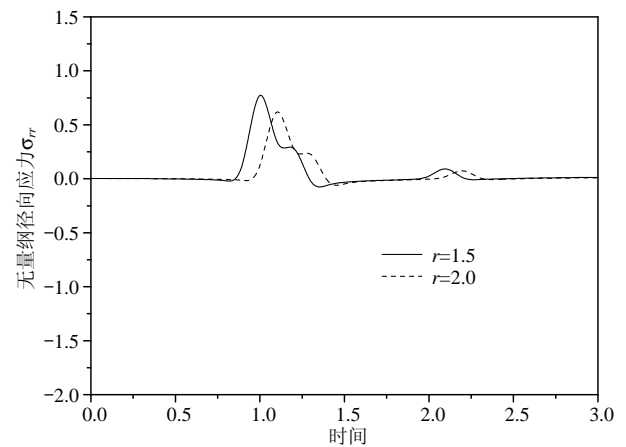


图 10 无量纲径向应力随时间  $t$  的变化规律

Fig.10 The distributions of the non-dimensional radial stress with time  $t$

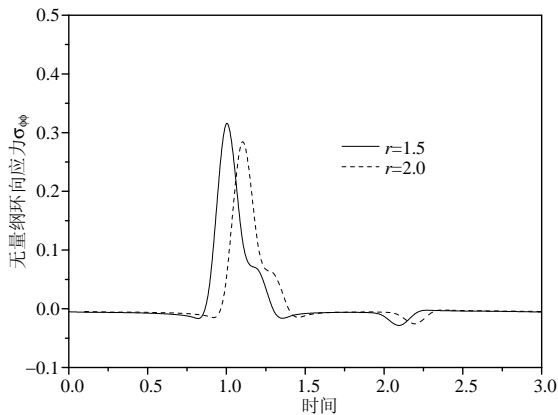


图 11 无量纲环向应力随时间  $t$  的变化规律

Fig.11 The distributions of the non-dimensional hoop stress with time  $t$

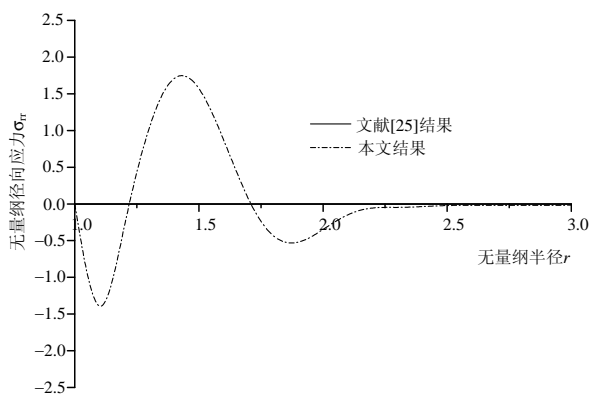


图 12  $\alpha=1, t=0.25$  时无量纲径向应力分布与文献[25]结果对比

Fig.12 The comparison of the radial stress of current solution with that in reference [25] when  $\alpha=1, t=0.25$ .

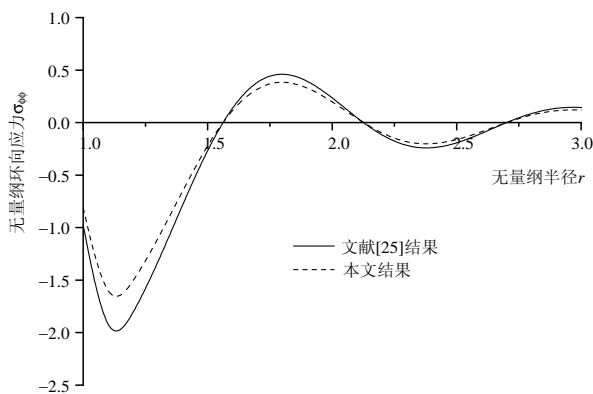


图 13  $\alpha=1, t=0.25$  时无量纲环向应力分布与文献[25]结果对比

Fig.13 The comparison of the hoop stress of current solution with that in reference [25] when  $\alpha=1, t=0.25$

## 5 结论

本文基于广义分数阶热弹性理论,研究了含有球形空腔的无限大体受瞬时热冲击时的热弹动态

响应。由所得结果,可得如下结论:

(1) 由于热冲击的作用,含有球腔的无限大体产生变形,进而产生位移和应力,体现了热-弹的耦合效应,随时间增长,这种热-弹耦合效应由球腔处向无限体内进行延伸。

(2) 分数阶参数对各物理量的分布有显著影响,体现在:一是对各物理量的幅值的最大值有显著影响;二是对各物理量变化的平缓程度有显著影响。

(3) 分数阶参数 $\alpha$ 可视为延迟时间的影响因子,不同的分数阶参数 $\alpha$ ,可描述不同的热传导现象。本文的研究结果,可对分析具体热弹性行为时 $\alpha$ 的取值提供一定的理论参考。

## 参考文献:

- [1] Lord H W, Shulman Y A. Generalized dynamical theory of thermoelasticity [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1967, 15(5): 299—309.
- [2] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity [J]. Journal of Elasticity, 1972, 2(1): 1—7.
- [3] 田晓耕, 沈亚鹏. 广义热弹性问题研究进展[J]. 力学进展, 2012, 42(1): 18—28.  
Tian Xiaogeng, Shen Yapeng. Research progress in generalized thermoelastic problems [J]. Advanced in Mechanics, 2012, 42(1): 18—28. (in Chinese)
- [4] 何天虎, 曹丽, 周又和. 受移动热源作用的两端固定杆的广义热-弹耦合问题[J]. 工程力学, 2008, 25(5): 22—26.  
He Tianhu, Cao Li, Zhou Youhe. Generalized thermoelastic coupled problem of a rod fixed at both ends subjected to a moving heat source [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(5): 22—26. (in Chinese)
- [5] 何天虎, 贾维维. 旋转半无限大体广义电磁热弹性耦合的二维问题[J]. 工程力学, 2009, 26(2): 196—202.  
He Tianhu, Jia Weiwei. A two-dimensional generalized electromageto-thermoelastic coupled problem for a rotating half-space [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(2): 196—202. (in Chinese)
- [6] 何天虎, 关明智. 无限长旋转圆柱中的广义磁热弹耦合效应[J]. 工程力学, 2009, 26(8): 210—215.  
He Tianhu, Guan Mingzhi. Generalized magento-thermoelastic coupled phenomenon in a rotating infinite cylinder [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(8): 210—215. (in Chinese)
- [7] 何天虎, 关明智. 有限元法求解广义热弹耦合一维热冲击问题[J]. 工程力学, 2010, 27(6): 35—39.  
He Tianhu, Guan Mingzhi. Finite element method to a generalized one-dimensional thermo-elastic coupled problem subject to a thermal shock [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(6): 35—39. (in Chinese)

- [8] 何天虎, 关明智. 考虑热松弛的热弹耦合二维问题的有限元法[J]. 工程力学, 2011, 28(12): 1—6.  
He Tianhu, Guan Mingzhi. Finite element method for a two-dimensional thermoelastic coupled problem with thermal relaxation [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(12): 1—6. (in Chinese)
- [9] Caputo M. Vibrations on an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1974, 56(3): 897—904.
- [10] Bagley R L, Torvik P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity [J]. Journal of Rheology, 1983, 27(3): 201—210.
- [11] Koeller R C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(2): 299—307.
- [12] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear heredity mechanics of solids [J]. Applied Mechanics Reviews, 1997, 50(1): 15—67.
- [13] Podlubny I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999: 41—117.
- [14] Povstenko Y Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress [J]. Journal of Thermal Stresses, 2005, 28(1): 83—102.
- [15] Youssef H M. Theory of fractional order generalized thermoelasticity [J]. Journal of Heat Transfer (ASME), 2010, 132(6): 1—7.
- [16] Youssef H M. Variational principle of fractional order generalized thermoelasticity [J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(10): 1183—1187.
- [17] Youssef H M. Two-dimensional thermal shock problem of fractional order generalized thermoelasticity [J]. Acta Mechanica, 2012, 223(6): 1219—1231.
- [18] Youssef H M, Al-Lehaibi E A. Fractional order generalized thermoelastic half space subjected to ramp type heating [J]. Mechanics Research Communications, 2010, 37(5): 448—452.
- [19] Sherief H H, El-Sayed A, El-Latif A. Fractional order theory of thermoelasticity [J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(2): 269—275.
- [20] Shweta K, Santwana M. A problem on elastic half space under fractional order theory of thermoelasticity [J]. Journal of Thermal Stresses, 2011, 34(7): 724—739.
- [21] Sherief H H, El-Latif A. Effect of variable thermal conductivity on a half-space under the fractional order theory of thermoelasticity [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 74(1): 185—189.
- [22] Caputo M. Linear model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent-II [J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1967, 13(5): 529—539.
- [23] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations [M]. New York: Wiley, 1993: 44—79.
- [24] Bellman R, Kolaba R E, Locketee J A. Numerical inversion of the Laplace transform [M]. New York: American Elsevier Publishing Company, 1966: 1—249.
- [25] Shweta K, Santwana M. Fractional order thermoelasticity for an infinite medium with spherical cavity subjected to different types of thermal loading [J]. Journal of Thermoelasticity, 2013, 1(1): 35—41.