DOI:10.11721/cqnuj20160615

时空加权回归模型局部线性估计的渐近性质*

玄海燕[1]，张安琪[2]，张玉春[1]，杨　帆[2]
(1. 兰州理工大学 经济管理学院；2. 兰州理工大学 理学院，兰州 730050)

摘要：在模型分析中，对未知参数的估计及其相关性质的研究甚为重要。首先通过假定时空加权回归模型的回归系数是时空位置的函数，给出了时空加权回归模型的一种局部线性估计方法。其次，在假设 I～V 及引理 1 下，研究了由此估计方法得到的第 p 个系数函数估计量所具有的渐近条件性质。最后，证明了第 p 个系数函数估计量的渐近条件偏差和渐近条件方差。结果表明该估计具有良好的表现。

关键词：时空加权回归；局部线性估计；渐近性质
中图分类号：O212.7　　文献标志码：A　　文章编号：1672-6693(2016)06-0072-06

伴随着近年计算机运算能力的进步和各领域空间数据生产能力的提升，空间数据统计分析方法正成为统计学新兴分支学科——空间统计学研究的前沿热点。空间计量经济学作为空间数据分析方法与某些学科的交叉学科，变量的观测值(数据)一般都有特定的地理位置，随着地理位置的变化，变量间的关系或者结构会发生变化，将这种变化称之为空间非平稳性。而一般的线性回归模型要求回归系数在所研究的空间区域内具有一致性，没有考虑空间非平稳性，因此结果不能反映空间数据的真实特征。为了更好地拟合空间数据，Huang 等人[1]提出了时空加权回归模型，形式如下：

$$Y_i=\sum_{l=1}^{p}\beta_l(u_i,v_i,t_i)X_{il}+\varepsilon_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

其中，$(Y_i;X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{ip})$，$i=1,2,\cdots,n$ 是因变量和自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_p$ 的 n 组观测值，ε_i，$i=1,2,\cdots,n$ 为独立同分布的正态随机误差项，均值为 0，方差为 δ^2，(u_i,v_i,t_i) 是对应于第 i 组观测$(Y_i;X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{ip})$的时空位置，给定第 i 组观测的时空位置，就得到了(u_i,v_i,t_i)的值，记时空位置为 Υ_i，所以 GTWR 模型本质上是变系数模型在空间数据下的一个直接推广。具体形式可写为：

$$Y_i=\sum_{l=1}^{p}\beta_l(\Upsilon_i)X_{il}+\varepsilon_i,\tag{1}$$

其中，$\beta_l(\Upsilon_i)$是时空位置 Υ_i 的未知函数。该模型将数据的时空位置嵌入到回归关系中，既能描述因变量和自变量的关系，又能反映数据的时空变化特征。与变系数模型相比，GTWR 简单易行，能直观地刻画时空非平稳性。

目前，关于时空加权回归模型的研究主要包括 3 个方面。第一，应用时空加权回归模型解决实际问题，例如，Yu 等人[2]使用时空加权回归模型探讨了当地的犯罪事件机制的非平稳性。第二，时空加权回归模型的假设检验问题，例如，玄海燕等人[3]给出了时空加权回归模型的非平稳性检验，肖燕婷等人[4-5]给出了时空地理加权模型回归关系的非平稳性及 Bootstrap 检验。第三，时空加权回归模型的估计问题，例如，玄海燕等人[6]给出了时空地理加权回归模型的拟合方法，玄海燕等人[7]给出了时空加权回归模型的局部线性估计和二步估计，Yan 和 Mei 等人[8]用时空加权回归模型的二步估计方法研究了中国 1986—2005 年的人口变化。

以上文献都对时空加权回归模型进行了相关研究，但存在以下不足：没有给出时空加权回归模型各种估计方法的渐近性质，而在模型分析中，对未知参数的估计量的渐近性质的研究也甚为重要。因此，本文在文献[9]的启发下，通过假定时空加权回归模型的回归系数是自变量 γ(时空位置)的函数，给出了时空加权回归模型的局

* 收稿日期：2015-11-13　修回日期：2015-12-15　网络出版时间：2016-11-02 13:28
资助项目：国家自然科学基金(No.11261031；No.11561045)
作者简介：玄海燕，女，副教授，研究方向为应用概率统计，E-mail：haiyanxuan@msn.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20161102.1328.036.html

部线性估计及其估计量的渐近条件偏差和渐近条件方差，并给出了估计量的渐近性的证明。

1 时空加权回归模型的局部线性估计

给定所研究区域的任何一个时空位置，记为 γ_0，对每个 $l=1,2,\cdots,p$，由 Taylor 公式可知，$\beta_l(\Upsilon_i)$ 可被逼近为 $\beta_l(\gamma_i)=\beta_l(\gamma_0)+\beta_l'(\gamma_0)(\gamma_i-\gamma_0)$。根据加权最小二乘法，$\gamma_0$ 处的未知参数 $\beta_l(\gamma_0),\beta_l'(\gamma_0),l=1,2,\cdots,p$，可以通过使

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[Y_i-\sum_{l=1}^{p}[\beta_l(\gamma_0)+\beta_l'(\gamma_0)(\gamma_i-\gamma_0)]X_{il}\Big]^2K_h(d_{0i}) \tag{2}$$

达到最小来予以估计。其中 $K(\cdot)$ 是核函数，h 是光滑参数，$K_h(t)=\dfrac{1}{h}K\left(\dfrac{t}{h}\right)$，$d_{0i}$ 为 Υ_i 到 γ_0 的距离，因此可记为 $d_{0i}=\Upsilon_i-\gamma_0$，$K_h(d_{01}),K_h(d_{02}),\cdots,K_h(d_{0n})$ 为 γ_0 处指定的一组权。通过在 γ_0 处指定一组权，来表示各处的观测值的作用，若令

$$\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{W}_0=\mathbf{diag}(K_{h_1}(\Upsilon_1-\gamma_0),K_{h_1}(\Upsilon_2-\gamma_0),\cdots,K_{h_1}(\Upsilon_n-\gamma_0)),$$

$$\boldsymbol{X}_0=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{11}(\Upsilon_1-\gamma_0) & \cdots & X_{1p} & X_{1p}(\Upsilon_1-\gamma_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ X_{n1} & X_{n1}(\Upsilon_n-\gamma_0) & \cdots & X_{np} & X_{np}(\Upsilon_n-\gamma_0)\end{bmatrix},$$

$$\beta(\gamma_0)=(\beta_1(\gamma_0),\beta'_1(\gamma_0),\cdots,\beta_p(\gamma_0),\beta'_p(\gamma_0))^{\mathrm{T}}。$$

则 γ_0 处的参数估计值可表示为：

$$\hat{\beta}(\gamma_0)=(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{Y},$$

则

$$\hat{\beta}_l(\gamma_0)=\boldsymbol{e}_{2l-1,2p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{Y}, \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{e}_{l,m}$ 表示第 l 个元素为 1，其余元素为 0 的 m 维列向量。显然如果知道了 γ_0 处自变量的观测值为 $(x_1,x_2,\cdots,x_p)$，则可以得到该处因变量 y 的拟合值为：

$$\hat{y}(\gamma_0)=\hat{\beta}_1(\gamma_0)x_1+\cdots+\hat{\beta}_p(\gamma_0)x_p。$$

光滑参数 h_1 的选择可用交叉确认法，即使得下式最小的 h 即为最优光滑参数

$$CV=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_{(-i)}(h))^2,$$

其中，$\hat{y}_{(-i)}(h)$ 为光滑参数为 h 时删掉第 i 个观测值后对第 i 个点的预测值。

2 时空加权回归模型的局部线性估计的渐近性质

首先，给出一些必要的假设条件和文中用到的记号。

1）记号。令自变量 Υ 和 $X_1,X_2,\cdots,X_p$ 的观测值集合为 $\boldsymbol{D}=(\Upsilon_1,\cdots,\Upsilon_n,X_{11},\cdots,X_{1n},\cdots,X_{P1},\cdots,X_{pn})^{\mathrm{T}}$。进一步令 $r_{il}=r_{il}(\gamma_0)=E(X_iX_l|\gamma_0),i,l=1,2,\cdots,p$；$\psi=\mathrm{diag}(\sigma^2(\Upsilon_1),\sigma^2(\Upsilon_2),\cdots,\sigma^2(\Upsilon_n))$；$\alpha_l(\gamma)=(r_{1l}(\gamma),r_{2l}(\gamma),\cdots,r_{(p-1)l}(\gamma))^{\mathrm{T}}$；$\alpha_l=\alpha_l(\gamma_0)$，对 $l=1,2,\cdots,p$；$\Omega_i(\gamma)=E\{(X_1,\cdots,X_i)^{\mathrm{T}}(X_1,\cdots,X_i)|\Upsilon=\gamma\}$；$\Omega_i=\Omega_i(\gamma_0)$，对 $i=1,2,\cdots,p$；$\mu_i=\int t^iK(t)\,\mathrm{d}t$，$v_i=\int t^iK^2(t)\,\mathrm{d}t$。

2）假设条件。

Ⅰ. 存在 $s>2$，使对 $l=1,2,\cdots,p$ 有 $EX_l^{2s}<\infty$；

Ⅱ. 对 $l=1,2,\cdots,p$，$\beta_l''(\cdot)$ 在 Υ_0 的某领域内连续。进一步假定对 $l=1,2,\cdots,p$，$\beta_l''(\Upsilon_0)\neq 0$；

Ⅲ. 对 $i,l=1,2,\cdots,p$，$r_{il}''(\cdot)$ 在 Υ_0 的某领域内连续且 $r_{il}''(\gamma_0)\neq 0$；

Ⅳ. Υ 的边缘密度函数 $f(\Upsilon)$ 在 Υ_0 的某领域内有连续的二阶导数，且 $f(\Upsilon_0)\neq 0$；

Ⅴ. 核函数 $K(t)$ 是一个具有紧支撑的对称概率密度函数。

接着,给出如下定理。

定理1　在条件Ⅰ～Ⅴ都成立的条件下,当 $h_1\to 0, nh_1\to\infty$ 时,$\hat{\beta}_p(\gamma_0)$ 的渐近条件偏差为:

$$\mathrm{bias}(\hat{\beta}_p(\gamma_0)\mid \boldsymbol{D})=\frac{h_1^2\mu_2}{2}\beta_p''(\gamma_0)(1+o_p(1))。$$

渐近条件方差为:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_p(\gamma_0)\mid \boldsymbol{D})=\frac{\sigma^2(\gamma_0)v_0}{nh_1 f(\gamma_0)}e_{p,p}^{\mathrm{T}}\Omega_p^{-1}\boldsymbol{e}_{p,p}\{1+o_p(1)\}。$$

引理1　设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 是独立同分布的向量,其中 Y_i 是随机标量,假定 $E|y|^s<\infty$ 且 $\sup_x\int|y|^s f(x,y)\mathrm{d}y<\infty$,其中 $f(x,y)$ 表示 (X,Y) 的联合密度。设 $K(\cdot)$ 是一个具有有界支撑的对称概率密度函数,满足李普利兹条件,则若对 $\varepsilon<1-s^{-1}$,有 $n^{2\varepsilon-1}h\to\infty$,则

$$\sup_{x\in D}\left|n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\{K_h(X_i-x)Y_i-E[K_h(X_i-x)Y_i]\}\right|=o_p\left[\left\{\frac{nh}{\log\left(\frac{1}{h}\right)}\right\}^{-\frac{1}{2}}\right],$$

其中,D 是随机变量 X 的取值范围。

证明(定理1)　首先计算 $\hat{\beta}_p(\gamma_0)$ 的渐近偏,将 Y 泰勒展开

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{\beta}(\gamma_0)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p}\begin{pmatrix}\beta_l''(\xi_{1l})(\Upsilon_1-\gamma_0)^2X_{1l}\\ \vdots\\ \beta_l''(\xi_{nl})(\Upsilon_n-\gamma_0)^2X_{nl}\end{pmatrix}+\varepsilon=X_0\beta(\gamma_0)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p}\begin{pmatrix}\beta_l''(\gamma_0)(\Upsilon_1-\gamma_0)^2X_{1l}\\ \vdots\\ \beta_l''(\gamma_0)(\Upsilon_n-\gamma_0)^2X_{nl}\end{pmatrix}+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p}\begin{pmatrix}(\beta_l''(\xi_{1l})-\beta_l''(\gamma_0))(\Upsilon_1-\gamma_0)^2X_{1l}\\ \vdots\\ (\beta_l''(\xi_{nl})-\beta_l''(\gamma_0))(\Upsilon_n-\gamma_0)^2X_{nl}\end{pmatrix}+\varepsilon,$$

其中,$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)^{\mathrm{T}}$,$\xi_{kl}$ 在 Υ_k 和 γ_0 之间,$k=1,2,\cdots,n$,因此将上式带入公式(3),有:

$$\hat{\beta}_p(\gamma_0)=\beta_p(\gamma_0)+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\sum_{l=1}^{p}\begin{pmatrix}\beta_l''(\gamma_0)(\Upsilon_1-\gamma_0)^2X_{1l}\\ \cdots\\ \beta_l''(\gamma_0)(\Upsilon_n-\gamma_0)^2X_{nl}\end{pmatrix}+$$
$$\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\sum_{l=1}^{p}\begin{pmatrix}(\beta_l''(\xi_{1l})-\beta_l''(\gamma_0))(\Upsilon_1-\gamma_0)^2X_{1l}\\ \cdots\\ (\beta_l''(\xi_{nl})-\beta_l''(\gamma_0))(\Upsilon_n-\gamma_0)^2X_{nl}\end{pmatrix}+\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\varepsilon。$$

通过引理1,有 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0=E(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)(1+o_p(1))$,其中,$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_{0(2p\times 2p)}=$

$$\begin{pmatrix}\sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \cdots & \sum_{I=1}^{n}X_{I1}X_{Ip}(\Upsilon_I-\gamma_0)K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0)\\ \sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)^2K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \cdots & \sum_{I=1}^{n}X_{I1}X_{Ip}(\Upsilon_I-\gamma_0)^2K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum_{I=1}^{n}X_{I1}X_{Ip}K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \sum_{I=1}^{n}X_{I1}X_{Ip}(\Upsilon_I-\gamma_0)K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \cdots & \sum_{I=1}^{n}X_{Ip}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0)\\ \sum_{I=1}^{n}X_{I1}X_{Ip}(\Upsilon_I-\gamma_0)K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \sum_{I=1}^{n}X_{I1}X_{Ip}(\Upsilon_I-\gamma_0)^2K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \cdots & \sum_{I=1}^{n}X_{Ip}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)^2K_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0)\end{pmatrix}。$$

通过观察上式,可知上式含有通项 $(\Upsilon_I-\gamma_0)^JK_{h_1}(\Upsilon_I-\gamma_0)$,$J=0,1,2,\cdots$。

在文献[10]中,$S_{n,j}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-x_0)^jK_{h_1}(X_i-x_0)$,求期望和方差得,$S_{n,j}=nh^jf(x_0)\mu_j(1+o_p(1))$,进一

步得 $S_n=(S_{n,j+l})_{0\leqslant j,l\leqslant p}=nf(x_0)\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{H}_1(1+o_p(1))$。

用类似的方法找出 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_{0(2p\times 2p)}$ 中项之间的规律。若令，$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0$ 中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 项组成的子矩阵为：

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}\sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2K_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)K_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0)\\ \sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)K_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0) & \sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)^2K_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0)\end{pmatrix},$$

则可将 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0$ 写成分块矩阵：

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1p}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pp}\end{pmatrix},$$

那么，对 $\boldsymbol{A}_{11}$ 求期望：

$$E\Big(\sum_{I=1}^{n}X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)^mK_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0)\Big)=nE(X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)^mK_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0))=$$

$$nE(E(X_{I1}^2(\Upsilon_I-\gamma_0)^mK_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0))\mid\Upsilon=\Upsilon_I)=nE(r_{11}(\Upsilon_I)(\Upsilon_I-\gamma_0)^mK_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0))=$$

$$n\int f(\Upsilon_I)\,r_{11}(\Upsilon_I)(\Upsilon_I-\gamma_0)^mK_{h1}(\Upsilon_I-\gamma_0)\mathrm{d}\Upsilon_I n\int f(z_ih_1+\gamma_0)\,r_{11}(z_ih_1+\gamma_0)(z_ih_1)^m\frac{1}{h_1}K(z_i)\mathrm{d}(z_ih_1+\gamma_0)=$$

$$nf(\gamma_0)r_{11}(\gamma_0)(h_1)^m\int(z_i)^mK(z_i)\mathrm{d}z_i,$$

其中，$m=0,1,2,\cdots,h_1\to 0$，且根据条件Ⅲ～Ⅳ，可得：

$$\boldsymbol{A}_{11}=nf(\gamma_0)r_{11}(\gamma_0)\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_0&\mu_1\\\mu_1&\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix}。$$

依此类推，在 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0$ 中

$$\boldsymbol{A}_{1p}=nf(\gamma_0)r_{1p}(\gamma_0)\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_0&\mu_1\\\mu_1&\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{A}_{p1}=nf(\gamma_0)r_{p1}(\gamma_0)\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_0&\mu_1\\\mu_1&\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{A}_{pp}=nf(\gamma_0)r_{pp}(\gamma_0)\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_0&\mu_1\\\mu_1&\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix}。$$

最终可得：

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0=nf(\gamma_0)\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_0^*\boldsymbol{H}(1+o_p(1)),\tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}_p\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&h_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S}_0^*=\boldsymbol{\Omega}_p\otimes\begin{pmatrix}\mu_0&0\\0&\mu_2\end{pmatrix}$，$\otimes$表示矩阵的直积，根据条件Ⅴ，可得 $\mu_1=0,\mu_0=1$。

同理有：

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\sum_{l=1}^{p}\begin{pmatrix}\beta_l''(\gamma_0)(\nu_1-\gamma_0)^2X_{1l}\\ \vdots\\ \beta_l''(\gamma_0)(\nu_n-\gamma_0)^2X_{nl}\end{pmatrix}=nf(\gamma_0)h_1^2H\beta_0(1+o_p(1)),\tag{5}$$

其中，$\beta_i^{\mathrm{T}}=\sum_{d=1}^{p}\beta_d''(\Upsilon_i)\mu_2(\alpha_d^{\mathrm{T}}(\Upsilon_i),r_{pd}(\Upsilon_i))\otimes(1,0)$，令 $\Upsilon_i=\gamma_0$ 即得 β_0。

结合(4)式和(5)式，有：

$$\mathrm{bias}(\hat{\beta}_p(\gamma_0)|\boldsymbol{D}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\sum_{l=1}^{p}\begin{pmatrix}\beta_l''(\gamma_0)(\Upsilon_1-\gamma_0)^2X_{1l}\\ \vdots \\ \beta_l''(\gamma_0)(\Upsilon_n-\gamma_0)^2X_{nl}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}h_1^2\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}(S_0^*)^{-1}\beta_0(1+o_p(1)) =$$

$$\frac{1}{2}h_1^2\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_p^{-1}\otimes\begin{pmatrix}\mu_0 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}^{-1}\times\sum_{d=1}^{p}\beta_d''(\gamma_0)\mu_2(\alpha_d^{\mathrm{T}}(\gamma_0),r_{pd}(\gamma_0))^{\mathrm{T}}\otimes(1,0)^{\mathrm{T}}(1+o_p(1))。\quad (6)$$

利用直积的性质,(6)式可写为:

$$\mathrm{bias}(\hat{\beta}_p(\gamma_0)|\boldsymbol{D}) =$$

$$\left[\frac{1}{2}h_1^2\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_p^{-1}\times\sum_{d=1}^{p}\beta_d''(\gamma_0)\mu_2(\alpha_d^{\mathrm{T}}(\gamma_0),r_{pd}(\gamma_0))^{\mathrm{T}}\right]\otimes\left[\begin{pmatrix}\mu_0 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}^{-1}\times(1,0)^{\mathrm{T}}\right](1+o_p(1)) =$$

$$\frac{1}{2}h_1^2\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\beta_1''(\gamma_0)\\ \beta_2''(\gamma_0)\\ \vdots\\ \beta_p''(\gamma_0)\end{pmatrix}\mu_2\otimes\begin{pmatrix}\frac{1}{\mu_0}\\ 0\end{pmatrix}(1+o_p(1)) =$$

$$\frac{1}{2\mu_0}h_1^2\mu_2\beta_p''(\gamma_0)(1+o_p(1)) = \frac{1}{2}h_1^2\mu_2\beta_p''(\gamma_0)(1+o_p(1))。$$

上式最后一步是因为由条件 V 可得,$\mu_0=1$。

接下来证明局部线性估计的渐近方差:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_p(\gamma_0)|\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)^{-1}\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\psi\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0)^{-1}e_{2p-1,2p}。$$

由此,需求解:

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0\psi\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{X}_0 = \frac{1}{h_1}nf(\gamma_0)\sigma^2(\gamma_0)\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Omega}_p\otimes\begin{pmatrix}v_0 & 0\\ 0 & v_2\end{pmatrix}\boldsymbol{H}(1+o_p(1))。\quad (7)$$

结合(7)式和(4)式,得:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_p(\gamma_0)|\boldsymbol{D}) = \frac{\sigma^2(\gamma_0)}{nh_1f(\gamma_0)}\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}(S_0^*)^{-1}\boldsymbol{\Omega}_p\otimes\begin{pmatrix}v_0 & 0\\ 0 & v_2\end{pmatrix}(S_0^*)^{-1}\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}(1+o_p(1)) =$$

$$\frac{\sigma^2(\gamma_0)}{nh_1f(\gamma_0)}\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}_p)^{-1}\otimes\begin{pmatrix}v_0 & 0\\ 0 & \frac{v_2}{\mu_2^2}\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_{2p-1,2p}(1+o_p(1)) =$$

$$\frac{\sigma^2(\gamma_0)v_0}{nh_1f(\gamma_0)}\boldsymbol{e}_{p,p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}_p)^{-1}\boldsymbol{e}_{p,p}(1+o_p(1))。$$

证毕

3 结语

首先给出了时空加权回归模型的局部线性估计,然后给出了第 p 个系数函数估计量的渐近条件偏差和方差,并证明了其估计量的渐近性质。结果显示该估计具有好的渐近性质,其条件均方误差的收敛速度达到 $o_p((nh_1)^{-1})$。

参考文献:

[1] Huang B, Wu B, Barry M.Geographically and temporally weighted regression for modeling spatio-temporal variation in house prices[J].International Journal of Geographical Information Science,2010,24(3):383-401.

[2] Yu P H,Lay J G.Exploring non-stationarity of local mechanism of crime events with spatial-temporal weighted regression[J].Spatial Data Mining and Geographical Knowledge Services,2011,7-12.

[3] 玄海燕,李帅峰.时空加权回归模型的非平稳性检验[J].甘肃科学学报,2012,24(2):1-4.
Xuan H Y,Li S F.The nonstationarity tests of geographically and temporally weighted regression model[J].Journal of Gansu Sciences,2012,24(2):1-4.

[4] 肖燕婷,田铮,魏岳嵩.时空地理加权回归模型的时空非平稳性检验[J].系统工程与理论,2013,33(6):1538-1542.
Xiao Y T, Tian Z, Wei Y S. Testing for spatial-temporal

nonstationarity based on geographically and temporally weighted regression model[J].Systems Engineering-Theory and Practice,2013,33(6):1538-1542.

[5] **肖燕婷,田铮,郭文艳.时空地理加权模型回归关系的非平稳性** Bootstrap **检验**[J].**统计与决策**,2014(9):8-12.
Xiao Y T,Tian Z,Guo W Y.The bootstrap tests of spatial-temporal nonstationarity of geographically and temporally weighted regression model[J].Statistics and Decision,2014(9):8-12.

[6] **玄海燕,李帅峰.时空地理加权回归模型及其拟合**[J].**甘肃科学学报**,2011,23(4):119-121.
Xuan H Y,Li S F.Geographically and temporally weighted regression model and its fits methods[J].Journal of Gansu Sciences,2011,23(4):119-121.

[7] **李琪.时空加权回归模型的参数估计及应用研究**[D].**兰州:兰州理工大学**,2014.
Li Q.Parameter estimation and application research of geographically and temporally weighted model[D].Lanzhou: Lanzhou University of Technology,2014.

[8] Yan N,Mei C L.A two-step local smoothing approach for exploring spatiotemporal patterns with application to the analysis of precipitation in the mainland of China during 1986—2005[J].Environmental and Ecological Statistics, 2014,21(2):373-390.

[9] Fan J Q,Zhang W Y.Statistical estimation in varying coefficient models[J].The Annals of Statistics,1999,27(5): 1491-1518.

[10] Fan J,Gijbels I.Local polynomial modelling and its applications[M].New York:Chapman and Hall,1996.

Local Linear Estimation and Its Asymptotic Properties in Geographically and Temporally Weighted Regression Model

XUAN Haiyan[1], ZHANG Anqi[2], ZHANG Yuchun[1], YANG Fan[2]

(1. School of Economics and Management, Lanzhou University of Technology;
2. School of Sciences, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: In model analysis, estimation of unknown parameters and its properties are very important. Firstly, this article assumes that the regression coefficients of geographically and temporally weighted regression (GTWR) model are functions of time and space location, then local linear estimation of regression parameters is proposed. Secondly, study the asymptotic properties of the p-th coefficient function estimator obtained according to this estimate under assumption I-V and lemma 1. Finally, the asymptotic bias and variance of the estimators of the proposed estimators are proved. The results show that the estimate has a good performance.

Key words: GTWR; local linear estimation; asymptotic properties

(**责任编辑 游中胜**)