

# 考虑非局部效应和记忆依赖微分的广义热弹问题<sup>1)</sup>

张培 何天虎<sup>2)</sup>

(兰州理工大学工程力学系, 兰州 730050)

**摘要** 现有的广义热弹理论主要适用于求解时间尺度极短但空间尺度仍属宏观尺度的广义热弹问题的动态响应, 而当所研究的弹性体的特征几何尺寸也属微尺度时, 弹性体的力学响应将呈现出强烈的尺寸相关性, 现有的广义热弹理论不再适用. 本文基于通过非局部效应和记忆依赖微分修正的广义热弹性理论, 研究了两端固定、受移动热源作用的有限长热弹杆的动态响应. 建立了问题的控制方程, 给出了问题的初始条件及边界条件, 运用拉普拉斯变换及其数值反变换, 对方程进行了求解. 数值计算中, 首先考察了时间延迟因子对模型所预测各物理量分布的影响; 然后对比了模型中的时间延迟因子在两种不同类别核函数下(通过归一化条件修正和未修正形式)对各物理量分布的影响效应; 最后考察了考虑新的可以描述尺寸效应的非局部因子对无量纲温度、位移及应力的影响, 并用图形进行了示例. 结果表明, 时间延迟因子增大, 各物理量的峰值变大, 传播距离变小, 且时间延迟因子在归一化条件修正过的核函数下影响更加显著; 非局部参数几乎不影响无量纲温度的分布, 轻微影响无量纲位移的分布, 但对无量纲应力的峰值的影响显著.

**关键词** 非局部效应, 记忆依赖微分, 改进的核函数, 广义热弹性理论, 拉普拉斯变换, 动态响应

中图分类号: O343.6 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-079

## A GENERALIZED THERMOELASTIC PROBLEM WITH NONLOCAL EFFECT AND MEMORY-DEPENDENT DERIVATIVE<sup>1)</sup>

Zhang Pei He Tianhu<sup>2)</sup>

(Department of Engineering Mechanics, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract** The existing generalized thermoelastic theory is mainly applicable to obtain the dynamic responses of the problems in which the time scale is extremely short while the spatial scale is still macro-scale. Nevertheless, when the characteristic length scale of elastic body is also of micro-scale, the dynamic responses of the elastic body will take on intense size-dependent effect, and the existing generalized thermoelastic theory will be no longer suitable for such problems. In present work, based upon the generalized thermoelasticity with nonlocal effect and memory-dependent derivative, the dynamic response of a finite thermoelastic rod fixed at both ends and subjected to a moving heat source is investigated. The corresponding governing equations of the problem are formulated and the initial conditions as well as the boundary conditions are specified. Then, the governing equations are solved by means of Laplace transform and its numerical inversion. In calculation, first, the influence of the time-delay factor on the distributions of the considered physical quantity was examined. Then, the influence of the time-delay factor on the distributions of the considered variables under two kinds of kernel functions (i.e. normalized form and unmodified form) was compared. Last, the influence of the nonlocal

2018-03-19 收稿, 2018-03-21 录用, 2018-03-29 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11372123).

2) 何天虎, 教授, 主要研究方向: 多场耦合及电磁固体力学. E-mail: heth@lut.edu.cn

引用格式: 张培, 何天虎. 考虑非局部效应和记忆依赖微分的广义热弹问题. 力学学报, 2018, 50(3): 508-516

Zhang Pei, He Tianhu. A generalized thermoelastic problem with nonlocal effect and memory-dependent derivative. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 508-516

factor on the dimensionless temperature, displacement and stress is considered and illustrated graphically. The results show that: with the increase of the time-delay factor, the heat wave propagation velocity becomes smaller, the peak values of the physical quantities become larger, and the influence of the time delay factor on the considered variables is more significant in the case with the kernel function modified by normalized condition than that with unmodified kernel function; The non-local parameter barely affects the distribution of the dimensionless temperature, slightly affects the distribution of the dimensionless displacement, while markedly affects the peak values of the dimensionless stress.

**Key words** nonlocal effect, memory-dependent derivative, improved kernel function, generalized thermoelasticity, Laplace transform, dynamic response

## 引 言

经典的热弹耦合理论<sup>[1]</sup>克服了非耦合理论中不考虑温度场与变形场的耦合影响的缺陷,但同时,它又继承了非耦合理论的另一个不足:所预测的热传播速度是无限大的<sup>[2]</sup>,这与实验结果<sup>[3]</sup>是相悖的.为了克服这一缺陷,学者们对热传导方程进行了修正,提出了非傅里叶热传导理论模型,如:C-V热波模型<sup>[4-5]</sup>、抛物型两步模型<sup>[6]</sup>、双曲型两步模型<sup>[7]</sup>等. Lord和Shulman<sup>[8]</sup>引入C-V模型建立了L-S型广义热弹性理论.受C-V模型和L-S理论的启发,许多用于描述热以有限速度传播的广义热弹理论相继涌现,比如:引入两个热松弛时间的G-L广义热弹性理论<sup>[9]</sup>、不考虑能量损耗的G-N广义热弹性理论<sup>[10]</sup>、双温度广义热弹性理论<sup>[11]</sup>、双相滞后广义热弹性理论<sup>[12]</sup>、广义热弹动力学理论<sup>[13]</sup>、惯性熵热弹性理论<sup>[14]</sup>和热质量热弹性理论<sup>[15]</sup>等.

近年来,由于在极端环境下热传导、生物组织黏弹特性和随机动力学<sup>[16-17]</sup>等方面研究上的成功应用,分数阶微积分学受到越来越多的关注.在广义热弹性领域,已经有不同形式的基于分数阶积分修正的分数阶广义热弹性理论<sup>[18-20]</sup>被提出并在不同模型中得到应用<sup>[21-22]</sup>. Diethelm<sup>[23]</sup>改进了Caputo型分数阶微分,得到

$$D_a^\alpha f(t) = \int_a^t K(t-p)f^{(n)}(s)ds \quad (1)$$

式中

$$K(t-p) = \frac{(t-p)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}$$

$n$ 是整数且 $\alpha$ 满足 $n-1 < \alpha \leq n$ ,  $K(t-p)$ 是核函数, $\Gamma$ 是伽马函数, $f^{(n)}$ 是函数 $f$ 的 $n$ 阶微分.上述定义具有直观的物理意义,即 $f(t)$ 的 $\alpha$ 阶分数阶微分依赖整个积分域 $[a, t]$ 上所有 $f^{(n)}(t)$ 的影响.这种影响称为“记忆依赖影响”,核函数 $K(t-p)$ 可视为每一时刻

$f^{(n)}(t)$ 影响的比重.因为这一特性, Caputo分数阶微分便可用于描述一些系统或物理过程的瞬时变化率受过去情形的影响. Wang和Li<sup>[24]</sup>认为,对于任何给定的正数 $a$ 和核函数,式(1)不能反映出当时间 $t$ 取值较大时候的记忆影响.受此启发,他们提出了“记忆依赖微分”,函数 $f$ 的一阶记忆依赖微分算子可表示为如下形式

$$D_\omega f(t) = \frac{1}{\omega} \int_{t-\omega}^t K(t-\xi)f'(\xi)d\xi \quad (2)$$

式中, $\omega$ 称为时间延迟因子(记忆影响的有效时间),它和核函数 $K(t-\xi)$ 可自由选取,如取: $1$ ,  $1 - (t-\xi)/\omega$ ,  $[1 - (t-\xi)/\omega]^2$ 等来反映在不同应用中的记忆影响.

Yu等<sup>[25]</sup>将记忆依赖微分算子用于改进C-V传热方程,从而得到新的热传导方程,并提出了基于上述热传导方程的新的记忆依赖广义热弹性理论,当 $K(t-\xi) = 1$ 且 $\omega \rightarrow 0$ 时,模型即退化为L-S理论. Ezzat等<sup>[26-27]</sup>用泰勒级数展开的方法,也得到了记忆依赖广义热传导模型

$$q_i + \omega D_\omega q_i = -\kappa \theta_{,i} \quad (3)$$

此时,若取 $K(t-\xi) = 1$ 且 $\omega \rightarrow 0$ ,模型退化为经典热弹耦合理论<sup>[1]</sup>.

相对于分数阶热传导模型,引入记忆依赖算子有以下几个优势:首先,记忆依赖模型有其明确的物理意义,其精髓就是记忆依赖算子的定义,它能用于描述“瞬时变化率受过去情形影响”的一些系统和物理过程的响应;第二,记忆依赖模型的公式是基于整数阶的微积分运算,相比于分数阶模型在运算时更加便利;最后,对于不同情形下选取的不同核函数(类似不同过程选取不同分数阶参数),时间延迟因子也可以根据需要自由选择,从而提供了更多可能性来得到更加真实的材料力学行为,因此,它更加灵

活, 因为分数阶模型主要的影响参数只有一个分数阶系数. 基于记忆依赖广义热弹性理论, 已有以下研究: Yu 等<sup>[28]</sup> 研究了一维半无限体受热冲击时的响应; Lotfy 等<sup>[29]</sup> 引入双温度研究了光辐射半导体材料的广义热弹问题; Ezzat 等<sup>[30-31]</sup> 在其基础上发展了双相滞后记忆依赖模型和进行了热弹-磁流体动力学方面的研究; Shaw<sup>[32]</sup> 研究了记忆依赖模型下物理量求解的不连续性.

纵观上述的广义热弹性理论, 可以发现, 这些理论的“广义”主要体现在对热传导方程的改进, 即对经典理论的傅里叶定律引进一些相关的材料常数, 例如: 热松弛时间、温度变化率、相位滞后、分数阶算子和记忆依赖算子等等, 而对应的弹性方程还是维持了经典的形式. 虽然可以很好地适用于尺寸相对较大的结构, 但在一些微尺寸结构中, 比如某一材料的外部与内部特征长度接近的情况下, 其合理性却遭到了挑战. 这种情况下, 就需要引入可以描述材料内外部特征尺寸的相关材料参数来建立新的非经典弹性关系, 应用较为广泛的相关理论有: Eringen<sup>[33]</sup> 提出的非局部理论、Aifantis<sup>[34]</sup> 的梯度理论和 Yang 等<sup>[35]</sup> 改进的偶应力理论. 其中, Eringen 的非局部理论得到了广泛的应用.

Eringen 认为, 材料中一点  $\mathbf{r}$  处的应力不仅依赖于  $\mathbf{r}$  处的应变, 还依赖于整个材料其他点  $\mathbf{r}'$  处的应变, 新的应力-应变关系可以表示为

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V K_r(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \chi) \pi_{ij}(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') \quad (4)$$

$$\pi_{ij}(\mathbf{r}') = \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}') \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}') \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j(\mathbf{r}')}{\partial r'_i} + \frac{\partial u_i(\mathbf{r}')}{\partial r'_j} \right) \quad (6)$$

式中  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$  是非局部应力分量,  $\pi_{ij}(\mathbf{r}')$  是经典应力分量,  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}')$  是经典应变分量,  $\lambda, \mu$  是拉梅系数,  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 符号,  $\varepsilon_{kk}$  是体应变,  $u_i(\mathbf{r}')$  是应变分量,  $V$  是模型体积.

核函数  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \chi)$  依赖于  $\Delta = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$  的大小且满足归一化条件  $\int_V K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \chi) dV = 1$ . 这里定义了一个材料常数  $\chi = e_0 a / l$ ,  $a$  是内禀长度, 例如材料晶格长度;  $l$  是外部特征长度, 例如裂纹长度、波长等;  $e_0$  是一个材料固有参数, 称  $e_0 a$  为非局部影响参数. 在一维情形下, 式 (4) 可化简为

$$\left[ 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \pi_{ij}(\mathbf{r}') \quad (7)$$

考虑非局部效应, Yu 等<sup>[28]</sup> 建立了新的 G-L 非

局部广义热弹性理论并研究了一维半无限大体的瞬态热冲击问题; Li 等<sup>[36]</sup> 研究了非局部广义热扩散问题. 总体来看, 同时考虑记忆依赖微分和非局部理论的研究数量还是相对较少, 对于移动热源作用的两端固定杆件模型的瞬态响应研究还未发现.

本文基于同时考虑记忆依赖和非局部效应的广义热弹性理论, 研究了受移动热源作用的两端固定杆的动态响应, 并考查了不同核函数下时间延迟因子和非局部因子对响应的影响, 以期对微尺度下考虑非局部效应的弹性体的瞬态热响应的预测提供新的参考依据.

## 1 基本方程

在经典耦合热弹性理论中, 基本方程如下.

运动方程

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (8)$$

几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (9)$$

本构方程

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \theta \delta_{ij} \quad (10)$$

$$\rho \eta = \gamma \varepsilon_{kk} + \frac{\rho C_E}{T_0} \theta \quad (11)$$

傅里叶热传导方程

$$q_i = -\kappa \theta_{,i} \quad (12)$$

热量运输方程

$$q_{i,i} = -\rho T_0 \dot{\eta} + Q \quad (13)$$

当考虑非局部效应时, 式 (10) 变为

$$\left[ 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right] \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \theta \delta_{ij} \quad (14)$$

应用记忆依赖微分的新热传导方程为

$$q_i + \omega D_\omega q_i = -\kappa \theta_{,i} \quad (15)$$

这里核函数取 Wang 和 Li<sup>[25]</sup> 给出的形式

$$K(t - \xi) = \begin{cases} 1 \\ 1 - \frac{t - \xi}{\omega} \\ \left( 1 - \frac{t - \xi}{\omega} \right)^2 \end{cases} \quad (16)$$

对比记忆依赖微分和非局部弹性本构关系的形式, 发现记忆依赖微分可看作“时间尺度上的非局部

效应”, 那么令它也满足归一性条件, 可得到一改进的核函数形式

$$K(t-\xi) = \begin{cases} 1 \\ 2\left(1 - \frac{t-\xi}{\omega}\right) \\ 3\left(1 - \frac{t-\xi}{\omega}\right)^2 \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $u_i$  是位移矢量分量,  $\theta = T - T_0$ ,  $T$  为温度,  $T_0$  代表初始温度,  $\kappa$  是导热系数,  $\rho$  是密度,  $C_E$  为比热,  $\lambda, \mu$  为拉梅常数,  $Q$  为单位质量的热源,  $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ ,  $\alpha_t$  是线性膨胀系数,  $\eta$  为熵密度,  $q_i$  为热流失量分量,  $\delta_{ij}$  是克罗尼克符号.

### 2 建立模型的控制方程

考虑一个长为  $l_0$  的各向同性的均匀细杆, 两端固定, 沿长度  $x$  方向受到移动热源作用, 如图 1 所示.

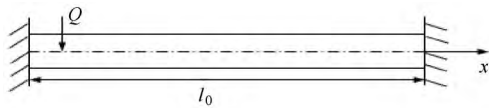


图 1 有限长杆件示意图

Fig. 1 The sketch of the finite rod

根据所选模型的几何形状, 可以视其为一维问题, 所以各物理量只是坐标  $x$  和时间  $t$  的函数, 唯一的非零位移分量可表示为  $u_x = u(x, t)$ . 则可得本构方程、运动方程和能量控制方程如下

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \sigma = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \theta \quad (18)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x} = \rho \left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (19)$$

$$\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = (1 + \omega D_\omega) \left( \rho C_E \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - Q \right) \quad (20)$$

引入下列无量纲量对方程进行无量纲化

$$\left. \begin{aligned} \{x^*, u^*\} &= c_0 \eta_0 \{x, u\}, \quad \eta_0 = \frac{\rho C_E}{\kappa} \\ \{t^*, \omega^*\} &= c_0^2 \eta_0 \{t, \omega\} \\ \theta^* &= \frac{\theta}{T_0}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\mu}, \quad Q^* = \frac{Q}{\kappa T_0 \eta_0} \\ (e_0 a)^* &= c_0 \eta_0 (e_0 a), \quad c_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

方程 (18) ~ 方程 (20) 变为 (去掉星号)

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \sigma = \beta^2 \frac{\partial u}{\partial x} - b \theta \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{b}{\beta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (23)$$

$$(1 + \omega D_\omega) \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + g \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - Q \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (24)$$

式中,  $\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$ ,  $b = \gamma T_0/\mu$ ,  $g = \gamma/\rho C_E$ .

初始条件

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \dot{u}(x, 0) = 0 \\ \theta(x, 0) &= \dot{\theta}(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

边界条件

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= u(l_0, t) = 0 \\ \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \theta(l_0, t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

移动热源取以下无量纲形式

$$Q = Q_0 \delta(x - vt) \quad (27)$$

这里  $Q_0$  和  $v$  分别指热源大小和速度,  $\delta$  是狄拉克函数.

### 3 拉普拉斯变换求解

应用下列拉普拉斯变换公式

$$\left. \begin{aligned} L[f(t)] &= \bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ Re(s) &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

方程 (22) ~ 方程 (24) 化为

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right] \bar{\sigma} = \beta^2 \frac{d\bar{u}}{dx} - b\bar{\theta} \quad (29)$$

$$\beta^2 \left[ (1 + (e_0 a)^2 s^2) \frac{d^2}{dx^2} - s^2 \right] \bar{u} = b \frac{d\bar{\theta}}{dx} \quad (30)$$

$$(1 + G_0) \left( s\bar{\theta} + g s \frac{d\bar{u}}{dx} - \alpha e^{-(s/v)x} \right) = \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} \quad (31)$$

式中

$$L\{\omega D_\omega f(t)\} = F(s) G_0(s) \quad (32)$$

$$G_0(s) = \begin{cases} 1 - e^{-s\omega}, & K = 1 \\ 1 - \frac{1 - e^{-s\omega}}{\omega s}, & K = 1 - \frac{t - \xi}{\omega} \\ \left(1 - \frac{2}{\omega s}\right) + \frac{2(1 - e^{-s\omega})}{\omega^2 s^2}, & K = \left(1 - \frac{t - \xi}{\omega}\right)^2 \end{cases} \quad (33)$$

$$F(s) = L\left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + g \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} - Q\right) = s\bar{\theta} + gs \frac{d\bar{u}}{dx} - \alpha e^{-(s/v)x}, \quad \alpha_0 = Q_0/v \quad (34)$$

边界条件化为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(0, s) = \bar{u}(l, s) = 0 \\ \frac{d\bar{\theta}(0, s)}{dx} = \frac{d\bar{\theta}(l, s)}{dx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

从方程 (30) 和 (31) 中消去  $\bar{\theta}$ , 得到一个四阶微分方程

$$\frac{d^4 \bar{u}}{dx^4} - m_1 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + m_2 \bar{u} = m_3 e^{-(s/v)x} \quad (36)$$

式中

$$m_1 = (1 + G_0)s + \frac{\beta^2 s^2 + (1 + G_0)bg s}{\beta^2 [1 + (e_0 a)^2 s^2]}$$

$$m_2 = \frac{(1 + G_0)s^3}{1 + (e_0 a)^2 s^2}, \quad m_3 = \frac{(1 + G_0)bs\alpha_0}{\beta^2 v [1 + (e_0 a)^2 s^2]}$$

方程 (36) 的通解为

$$\bar{u} = C_1 e^{-k_1 x} + C_2 e^{k_1 x} + C_3 e^{-k_2 x} + C_4 e^{k_2 x} + C_5 e^{-(s/v)x} \quad (37)$$

这里  $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是关于  $s$  的未知系数, 并且  $C_5 = m_3 / [(s/v)^4 - m_1 (s/v)^2 + m_2]$ ,  $k_1$  和  $k_2$  是下列特征方程的两个正根

$$k^4 - m_1 k^2 + m_2 = 0 \quad (38)$$

所以

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2}} \\ k_2 &= \sqrt{\frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

同样地, 从方程 (30) 和 (31) 中消去  $\bar{u}$ , 得到

$$\frac{d^4 \bar{\theta}}{dx^4} - m_1 \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + m_2 \bar{\theta} = m_4 e^{-(s/v)x} \quad (40)$$

式中

$$m_4 = (1 + G_0)\alpha_0 s^2 \{1/[1 + (e_0 a)^2 s^2] - 1/v^2\}$$

方程 (40) 的解为

$$\bar{\theta} = C_{11} e^{-k_1 x} + C_{22} e^{k_1 x} + C_{33} e^{-k_2 x} + C_{44} e^{k_2 x} + C_{55} e^{-(s/v)x} \quad (41)$$

式中  $C_{ii} (i = 1, 2, \dots, 5)$  是关于  $s$  的未知系数.

将式 (37) 和式 (41) 代入式 (30), 可得

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= -A_1 C_1, C_{22} = A_1 C_2 \\ C_{33} &= -A_2 C_3, C_{44} = A_2 C_4 \\ C_{55} &= \beta^2 s \{v^2 - [1 + (e_0 a)^2 s^2]\} C_5 / bv \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式中

$$A_i = \beta^2 \{[1 + (e_0 a)^2 s^2] k_i^2 - s^2\} / b k_i, \quad i = 1, 2$$

将式 (37) 和式 (41) 代入边界条件 (35), 可得

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= B_2 D_1 C_5, \quad C_2 = -B_2 D_2 C_5 \\ C_3 &= -B_1 D_3 C_5, \quad C_4 = B_1 D_4 C_5 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

式中

$$D_1 = \frac{e^{k_1 l} - e^{-(s/v)l}}{e^{k_1 l} - e^{-k_1 l}}$$

$$D_2 = \frac{e^{-k_1 l} - e^{-(s/v)l}}{e^{k_1 l} - e^{-k_1 l}}$$

$$D_3 = \frac{e^{k_2 l} - e^{-(s/v)l}}{e^{k_2 l} - e^{-k_2 l}}$$

$$D_4 = \frac{e^{-k_2 l} - e^{-(s/v)l}}{e^{k_2 l} - e^{-k_2 l}}$$

$$B_i = \frac{k_i^2 - s^2 / v^2}{k_1^2 - k_2^2} \quad (i = 1, 2)$$

至此, 完成问题在拉氏域的求解, 将  $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$  代入式 (37), 可得位移分量表达式

$$\bar{u} = B_2 D_1 C_5 e^{-k_1 x} - B_2 D_2 C_5 e^{k_1 x} - B_1 D_3 C_5 e^{-k_2 x} + B_1 D_4 C_5 e^{k_2 x} + C_5 e^{-(s/v)x} \quad (44)$$

无量纲温度表达式

$$\bar{\theta} = -A_1 B_2 D_1 C_5 e^{-k_1 x} - A_1 B_2 D_2 C_5 e^{k_1 x} + A_2 B_1 D_3 C_5 e^{-k_2 x} + A_2 B_1 D_4 C_5 e^{k_2 x} + \frac{\beta^2 s [v^2 - (1 + (e_0 a)^2 s^2)]}{bv} C_5 e^{-(s/v)x} \quad (45)$$

再将式 (44) 和式 (45) 代入式 (29), 得

$$\bar{\sigma} = E_1 e^{-k_1 x} + E_2 e^{k_1 x} + E_3 e^{-k_2 x} + E_4 e^{k_2 x} + E_5 e^{-(s/v)x} \quad (46)$$



式中

$$E_1 = \frac{-\beta^2 p^2 B_2 D_1 C_5}{k_1}$$

$$E_2 = \frac{-\beta^2 p^2 B_2 D_2 C_5}{k_1}$$

$$E_3 = \frac{\beta^2 p^2 B_1 D_3 C_5}{k_2}$$

$$E_4 = \frac{\beta^2 p^2 B_1 D_4 C_5}{k_2}$$

$$E_5 = -\beta^2 s \nu C_5$$

因为在拉氏域得到的表达式的形式冗长且复杂，很难得到解析的反变换解。因此，这里采用 Brancik<sup>[37]</sup> 提出的一种基于快速反变换技术的拉普拉斯反变换程序进行数值求解。

### 4 算例及讨论

前言中提到，记忆依赖微分可视为分数阶微分的衍生，不同分数阶参数  $\alpha$  的影响通过核函数  $K(t - \xi)$  来体现，时间延迟因子是作为一个新的参数出现的，那么这里将在第 1 小节讨论不同核函数 (线性/非线性形式) 下时间延迟因子的影响；第 2 小节着重讨论不同速度和非局部因子对各物理量分布的影响，计算中用到的相关材料参数如下

$$\lambda = 7.76 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, T_0 = 293 \text{ K } \nu = 2, l_0 = 10$$

$$\mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, Q_0 = 10, \rho = 8954 \text{ kg/m}^3$$

$$\alpha_t = 1.78 \times 10^{-5} \text{ k}^{-1}$$

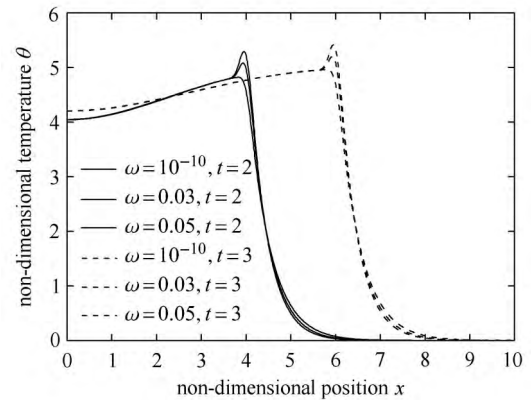
#### 4.1 核函数影响

##### 4.1.1 线性核函数

本小节研究线性核函数形式  $K(t - \xi) = 1$  下，时间延迟因子对各物理量的影响。计算中，选取了 3 个不同的值  $\omega = 10^{-10}$ ,  $\omega = 0.03$  和  $\omega = 0.05$  及两个时刻  $t = 2$  和  $t = 3$ ，同时，非局部因子取和  $e_0 a = 0$ ，其中， $\omega = 10^{-10}$  的情况即为经典热弹耦合理论结果，所得结果见图 2。

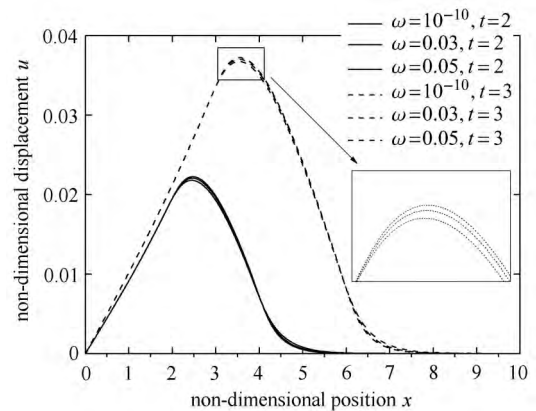
在图 2 (a) 中，无量纲温度首先上升，经典耦合理论所反映的热干扰区域明显较大且不为零 (即使值很小)。相较经典耦合理论的结果，时间延迟因子不为零时的两条分布曲线分别在  $x = 4$  和  $x = 6$  附近达到最大值，这个位置取决于  $x = \nu t$ ，之后极速下降至 0。这表明热干扰区域的范围取决于给定的时间，即记忆依赖广义热弹理论能很好地描述热传播速度是有限的。而热源所在位置会释放最大热量，而

且随着时间延迟因子  $\omega$  增大，无量纲温度的峰值增大，同时热波传播距离变小。



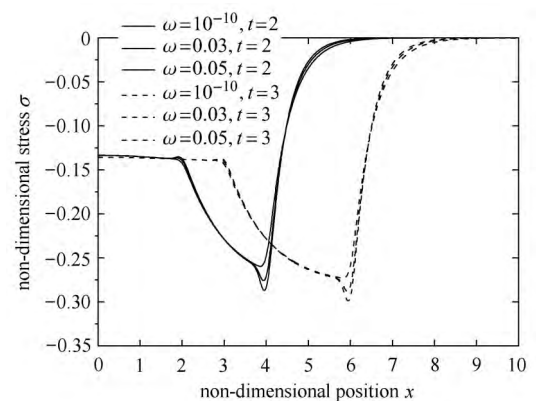
(a) 无量纲温度分布

(a) The distribution of non-dimensional temperature



(b) 无量纲位移分布

(b) The distribution of non-dimensional displacement



(c) 无量纲应力分布

(c) The distribution of non-dimensional stress

图 2 线性核函数下结果图示

Fig. 2 The distribution of non-dimensional physical quantities under linear kernel function

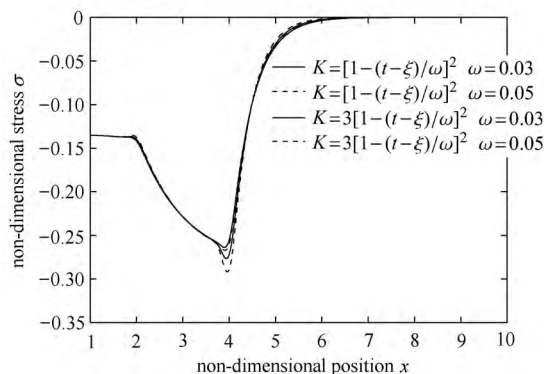
在图 2 (b) 中, 因为细杆两端固定, 所以两个端点处的位移始终为 0. 随着时间延迟因子增大, 最大位移值增大.

在图 2(c) 中, 可以看到细杆中的应力始终呈压应力状态, 这主要是因为细杆两端固定, 热膨胀变形受阻, 从而产生压应力, 应力峰值在  $x = 4$  和  $x = 6$  附近. 同样地, 随着时间延迟因子增大, 应力峰值增大.

4.1.2 非线性核函数

本节研究经典和改进的非线性核函数形式  $K(t - \xi) = (1 - \frac{t - \xi}{\omega})^2$  和  $K(t - \xi) = 3(1 - \frac{t - \xi}{\omega})^2$  下, 时间延迟因子  $\omega = 0.03$  和  $\omega = 0.05$  对物理量分布的影响情况, 非局部因子取  $e_0 a = 0$ , 时间取  $t = 2$  时刻, 所得结果见图 3.

从图 3(a) 中无量纲温度的分布发现, 对于非线性核函数的两种经典和改进的形式下, 不同时间延迟因子对温度分布的影响的区别主要体现在不同的峰值上, 另外热波传播的距离也受轻微影响, 经典核函数下受影响较小, 改进后的核函数形式下受影响



(c) 无量纲应力分布

(c) The distribution of non-dimensional stress

图 3 非线性核函数下结果图示

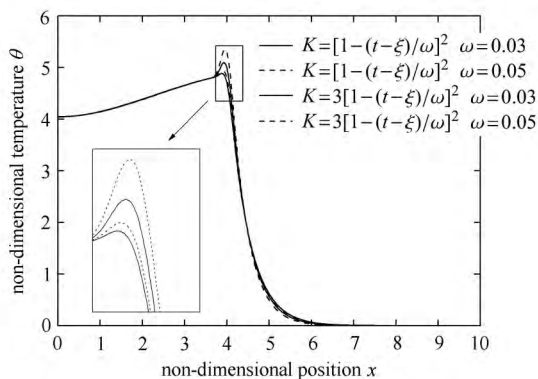
Fig. 3 The distribution of non-dimensional physical quantities under non-linear kernel function

较大. 同样地情况也体现在图 3(b) 和图 3(c) 中.

因此, 时间延迟因子可作为新的控制参数来模拟不同的响应. 且它在和修正的核函数的组合中影响更加明显.

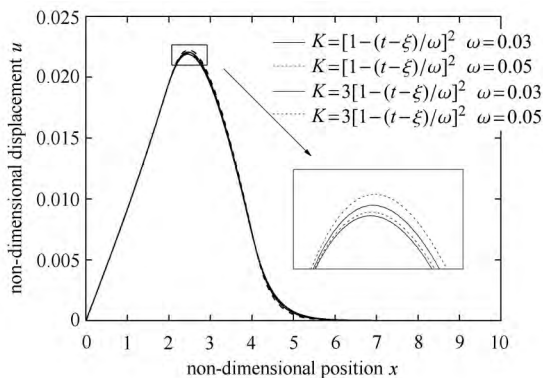
4.2 非局部影响

本节研究非局部因子对各无量纲量分布的影响. 计算中, 选取 3 个不同的非局部因子值  $e_0 a = 0$  (不考虑非局部影响情形),  $e_0 a = 0.05$  和  $e_0 a = 0.1$ , 同时, 时间延迟因子和核函数分别取  $\omega = 0.03$  和改进的线性形式  $K(t - \xi) = 2(1 - \frac{t - \xi}{\omega})$ , 时间取  $t = 2$ , 所得结果见图 4.



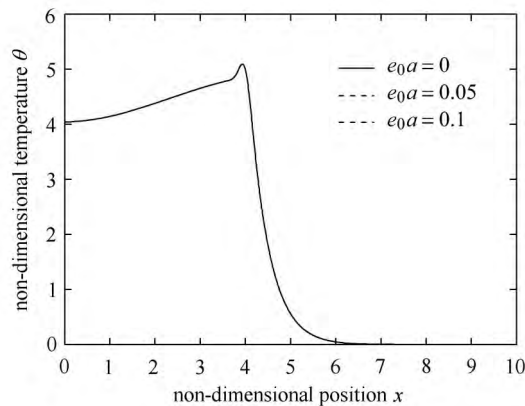
(a) 无量纲温度分布

(a) The distribution of non-dimensional temperature



(b) 无量纲位移分布

(b) The distribution of non-dimensional displacement

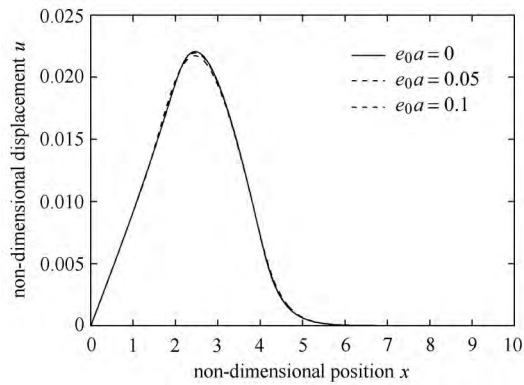


(a) 无量纲温度分布

(a) The distribution of non-dimensional temperature

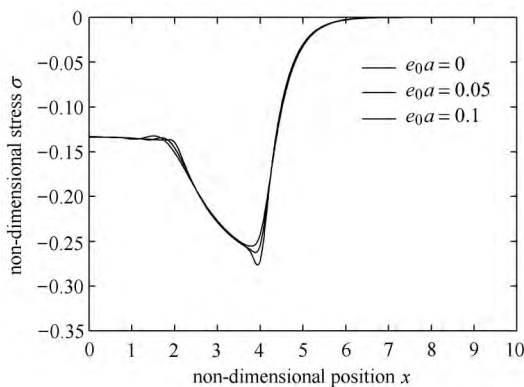
图 4 非局部影响结果图示

Fig. 4 The distribution of non-dimensional physical quantities under nonlocal effect



(b) 无量纲位移分布

(b) The distribution of non-dimensional displacement



(c) 无量纲应力分布

(c) The distribution of non-dimensional stress

图 4 非局部影响结果图示 (续)

Fig. 4 The distribution of non-dimensional physical quantities under nonlocal effect (continued)

考虑改进的核函数形式后, 在图 4(a) 中, 对于不同的非局部因子, 所得无量纲温度的分布曲线是重叠的, 即非局部因子对无量纲温度无明显影响. 从图 4(b) 中可见, 随着  $e_0 a$  增大, 位移峰值减小. 在图 4(c) 中, 考虑非局部效应时, 应力曲线明显更加光滑, 且随着非局部因子增大, 应力峰值的绝对值减小.

## 5 结论

本文基于同时考虑记忆依赖算子和非局部效应的广义热弹性理论, 研究了受移动热源作用的两端固定杆模型, 并类比非局部弹性关系中核函数归一化条件改进了记忆依赖微分中的核函数项, 分别得到了在不同类型核函数下时间延迟因子和非局部因子对无量纲温度、位移和应力的分布规律的影响. 通过以上分析和计算, 得到以下结论:

(1) 对比经典热弹耦合理论, 记忆依赖广义热弹

性理论所以测得热传播速度是有限的.

(2) 不同的响应分析可选取不同的核函数和时间延迟因子的组合来计算. 时间延迟因子可作为一个新的参数来预测不同的结果, 且它在改进的核函数下影响更明显.

(3) 非局部因子对无量纲温度的分布几乎无影响, 相反的, 对位移和应力的影响显著, 位移、应力的峰值随非局部因子增大而减小.

## 参 考 文 献

- 1 Biot MA. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, 1956, 27(3): 240-253
- 2 田晓耕, 沈亚鹏. 广义热弹性问题研究进展. 力学进展, 2012, 42(1): 18-28 (Tian Xiaogeng, Shen Yapeng. Research progress of the generalized thermoelasticity. *Advances in Mechanics*, 2012, 42(1): 18-28 (in Chinese))
- 3 Peshkov V. Second sound in helium II. *Journal of Physics*, 1944, 8: 381-386
- 4 Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *Comptes Rendus Physique*, 1958, 247: 431-433
- 5 Vernotte PM, Hebd CR. Paradoxes in the continuous theory of the heat conduction. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1958, 246: 3154-3155
- 6 Wang H, Dai W, Melnik R. A finite difference method for studying thermal deformation in a double-layered thin film exposed to ultrashort pulsed lasers. *International Journal of Thermal Sciences*, 2006, 45 (12): 1179-1196
- 7 Chen JK, Beraun JE, Tham CL. Ultrafast thermoelasticity for short-pulse laser heating. *International Journal of Thermal Sciences*, 2004, 42(8-9): 793-807
- 8 Lord HW, Shulman YA. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, 15: 299-309
- 9 Green AE, Lindsay KA. Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, 1972, 2(1): 1-7
- 10 Green AE, Naghdi PM. Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Elasticity*, 1993, 31(3): 189-208
- 11 Youssef HM. Theory of two-temperature-generalized thermoelasticity. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2006, 71(3): 383-390
- 12 Tzou DY. A unified field approach for heat conduction from macro to micro-scales. *Journal of Heat Transfer*, 1995, 117(1): 8-16
- 13 Qi XL, Suh CS. Generalized thermo-elastodynamics for semiconductor material subject to ultrafast laser heating. Part I: Model description and validation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, 53(1): 41-47
- 14 Kuang ZB. Variational principles for generalized dynamical theory of thermopiezoelectricity. *Acta Mechanica*, 2009, 203(1-2): 1-11
- 15 Wang YZ, Zhang XB, Song XN. A generalized theory of thermoelasticity based on thermomass and its uniqueness theorem. *Acta Mechanica*, 2014, 225(3): 797-808



- 16 Podlubny I. Fractional Differential Equations. New York: Academic Press, 1999
- 17 Meral FC, Royston TJ, Magin R. Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15: 939-945
- 18 Sherief HH, El-Sayed AMA, El-Latief AMA. Fractional order theory of thermoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(2): 269-275
- 19 Youssef HM. Theory of fractional order generalized thermoelasticity. *Journal of Heat Transfer*, 2010, 132(6): 61301
- 20 Ezzat MA, Karamany ASE. Fractional order heat conduction law in magneto-thermoelasticity involving two temperatures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2011, 62(5): 937-952
- 21 马永斌. 分数阶广义热弹性理论下多场耦合问题动态响应研究. [博士论文]. 兰州: 兰州理工大学, 2017 (Ma Yongbin. The dynamic response of multi-field coupling problem under the fractional generalized thermoelasticity. [PhD Thesis]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2017 (in Chinese))
- 22 徐业守, 徐赵东, 何天虎等. 热冲击下理想黏结三明治板的分数阶广义热弹性问题分析. 东南大学学报(自然科学版), 2017, 47(1): 130-136 (Xu Yeshou, Xu Zhaodong, He Tianhu, et al. Analysis of the fractional order generalized thermal elasticity of the ideal bonded sandwich board under thermal shock. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2017, 47(1): 130-136 (in Chinese))
- 23 Diethelm K. Analysis of Fractional Differential Equation: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010
- 24 Wang JL, Li HF. Surpassing the fractional derivative: concept of the memory-dependent derivative. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 62(3): 1562-1567
- 25 Yu YJ, Hu W, Tian XG. A novel generalized thermoelasticity model based on memory-dependent derivative. *International Journal of Engineering Science*, 2014, 81(811): 123-134
- 26 El-Karamany AS, Ezzat MA. Modified Fourier's law with time-delay and kernel function: Application in thermoelasticity. *Journal of Thermal Stresses*, 2015, 38(7): 811-834
- 27 Ezzat MA, El-Karamany AS, El-Bary AA. Electro-thermoelasticity theory with memory-dependent derivative heat transfer. *International Journal of Engineering Science*, 2016, 99: 22-38
- 28 Yu YJ, Tian XG, Liu XR. Size-dependent generalized thermoelasticity using Eringen's nonlocal model. *European Journal of Mechanics*, 2015, 51: 96-106
- 29 Lotfy K, Sarkar N. Memory-dependent derivatives for photothermal semiconducting medium in generalized thermoelasticity with two-temperature. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2017, 21(4): 519-534
- 30 Ezzat MA, El-Karamany AS, El-Bary AA. On dual-phase-lag thermoelasticity theory with memory-dependent derivative. *Mechanics of Composite Materials & Structures*, 2017, 24(11): 908-916
- 31 Ezzat MA, El-Bary AA. Thermoelectric MHD with memory-dependent derivative heat transfer. *International Communications in Heat & Mass Transfer*, 2016, 75: 270-281
- 32 Shaw S. A note on the generalized thermoelasticity theory with memory-dependent derivatives. *Journal of Heat Transfer*, 2017, 139(9): 092005
- 33 Eringen AC. Nonlocal continuum field theories. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, 56(2): 391-398
- 34 Aifantis EC. Gradient deformation models at nano, micro, and macro scales. *Journal of Materials Processing Technology*, 1999, 212: 189-202
- 35 Yang F, Chong A, Lam D, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids & Structures*, 2002, 39: 2731-2743
- 36 Li CL, Guo HL, Tian XG. A size-dependent generalized thermoelastic diffusion theory and its application. *Journal of Thermal Stresses*, 2017, 40(5): 603-626
- 37 Brancik L. Programs for fast numerical inversion of Laplace transforms in MATLAB language environment//Proceedings of the 7th Conference MATLAB'99, pp. 27-39, Czech Republic, Prague, 1999