

一类四维超混沌系统的同步研究*

马军¹, 唐国宁²

(1. 兰州理工大学 理学院 物理系, 甘肃 兰州 730050; 2. 广西师范大学 物理与信息工程学院, 广西 桂林 541004)

摘要:采用误差变量的线性组合对一类四维动态超混沌系统进行单向反馈控制, 解析地证明了实现同步的可能性, 从 Lyapunov 理论角度分析了对于四维动态系统采用单变量单向耦合的可行性, 求出同步所需控制器要满足的条件。当驱动系统参数做周期变化时, 用文中的控制器实现了两个超混沌系统很好同步。

关键词:超混沌系统; 动态系统; 反馈控制; 单向线性耦合

中图分类号: O415.5 **文献标识码:** A

1 引言

混沌系统的内随机性, 连续宽谱和对初值的极端敏感等特点, 使其特别适用于保密通讯, 近年来利用混沌和超混沌同步进行保密通信引起越来越多学者的兴趣, 并在这方面做了很多有益的工作^[1-4], 由于超混沌系统具有更复杂的动力学行为, 采用常规的相空间重构, 回归映像和非线性预测等很难破译利用超混沌加密的信号, 因而超混沌同步更有实际意义。相互耦合同步法是一种有效的方法, Wu 和 Chua 通过研究 Chua 电路从理论上证明只要两个混沌系统之间的耦合只要足够强就可以实现混沌同步^[5-6]。在文献^[7-8]采用单变量进行单向耦合实现了对一类四维超混沌动态系统的同步, 但是只有数值模拟验证而没有解析证明, 本文在追踪控制法^[9]的基础上对该超混沌系统采用误差变量的线性组合实现反馈控制, 从稳定性理论的角度证明该方法可以很好的实现两个动态超混沌系统精确的同步。当两个超混沌系统中的驱动系统参数作周期变化时, 应用该方法仍然可实现系统间良好同步。文中对此进行了详细证明, 并从数值模拟中得到验证。

2 原理

一类四维超混沌动态系统的动力学方程^[1]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - bx_2 \\ \dot{m}x_3 = x_1 - cx_3 - x_4 \\ \dot{e}x_4 = x_3 - d(x_4 - 1)H(x_4 - 1) \end{cases} \quad (1)$$

系统输出 4 个变量, $H(x)$ 是单位阶跃函数。其中: $H(x) = 1$, 当 $x \geq 0$; $H(x) = 0$ 当 $x < 0$ 。首先求出线性反馈控制器的一般表达式, 受控响应系统为:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \hat{a}y_1 - y_2 - y_3 + u_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 - \hat{b}y_2 + u_2 \\ \dot{m}y_3 = y_1 - \hat{c}y_3 - y_4 + u_3 \\ \dot{e}y_4 = y_3 - \hat{d}(y_4 - 1)H(y_4 - 1) \end{cases} \quad (2)$$

其中 u 为控制器, 是误差变量的线性组合, 用于使系统 (1) 和 (2) 同步。定义两个系统的误差为:

$$e_i = x_i - y_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 若 $e_i \rightarrow 0$, 则两个系统达到精确同步。下面通过构造 Lyapunov 函数方法来求解各种情况下全局同步所需要控制器的恰当形式。

* 收稿日期: 2002-10-10 修订日期: 2003-10-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10147101)

2.1 当两个系统参数完全匹配,且参数不发生变化时,只需一个控制器 u_1 就行

构造 Lyapunov 函数:
$$V(t) = e_2^2 + (e_2 + \dot{e}_2)^2 \tag{4}$$

$$\dot{V} = dV/dt = 2e_2\dot{e}_2 + 2(e_2 + \dot{e}_2)(\dot{e}_2 + \ddot{e}_2) = -2V + 2(e_2 + \dot{e}_2)(2e_2 + 2\dot{e}_2 + \ddot{e}_2) \tag{5}$$

满足条件 $2e_2 + 2\dot{e}_2 + \ddot{e}_2 = 0$ 时, 总有:
$$\dot{V} = -2V \tag{6}$$

故 $t \rightarrow \infty$ 时, 恒有 $e_2 \rightarrow 0$ 成立。或者说:
$$y_2(t) \rightarrow x_2(t) \tag{7}$$

又 $y_1 = \dot{y}_2 + by_2$; $x_1 = \dot{x}_2 + bx_2$ 知: $|y_1 - x_1| = |\dot{y}_2 - \dot{x}_2 + y_2 - x_2| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, 即: $y_1 \rightarrow x_1$
$$\tag{8}$$

从 $2e_2 + 2\dot{e}_2 + \ddot{e}_2 = 0$ 求出相应的控制器 u_1 满足:

$$u_1 = (2 - b + a)e_1 + (1 - b)^2 e_2 - e_3 \tag{9}$$

进一步将 (7), (8), (9) 代入两个系统的第一分量方程验证有:

$$y_3 \rightarrow x_3 \tag{10}$$

再将 (9), (11) 代入第三分量方程验证有:

$$x_4 \rightarrow y_4 \tag{11}$$

即如果两个系统的参数完全匹配时, 采用控制器 (9) 式可使两个系统达到精确同步。数值模拟结果见图 1~4 (横坐标表示时间, 单位是秒, 纵坐标是误差变量, 以下皆同)。

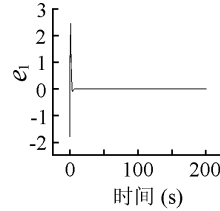


图 1 $x_1 - y_1$ 随时间的变化曲线

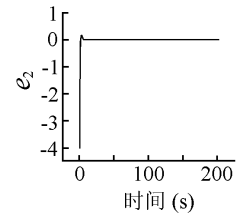


图 2 $x_2 - y_2$ 随时间的变化曲线

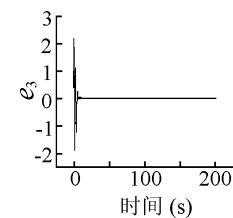


图 3 $x_3 - y_3$ 随时间的变化曲线

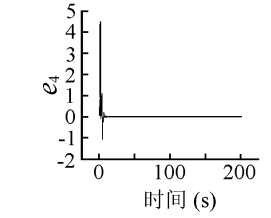


图 4 $x_4 - y_4$ 随时间的变化曲线

2.2 参数不匹配下的同步

下面讨论系统间两个参数不匹配时系统的同步问题。

(1) 当驱动系统参数固定但与响应系统参数不匹配时的同步问题:

考虑两个参数不匹配问题: $a \neq \hat{a}$ 、 $b \neq \hat{b}$ 、各个参数取值

分别使系统 (1) 和 (2) 系统处于超混沌状态。仿照前面的分析, 构造 Lyapunov 函数, 此时只需要两个控制器 u_1 、 u_2 即可。类似的构造函数: $V_2(t) = e_2^2 + (e_2 + \dot{e}_2)^2$, 欲使 $\dot{V}_2(t) = -2V_2(t)$ 则需要对应的控制器满足:
$$u_1 = -(2 - \hat{b})u_2 - \dot{u}_2 + (1 - b)^2 x_2 - x_3 + (2 + a - b)x_1 - (2 + \hat{a} - \hat{b})y_1 - (1 - \hat{b})^2 y_2 + y_3 \tag{12}$$

同样构造函数: $V_1(t) = e_1^2 + (e_1 + \dot{e}_1)^2$, 欲使 $\dot{V}_1(t) = -2V_1(t)$ 则需要对应的控制器满足:

$$u_2 = -(2 + \hat{a})u_1 - \dot{u}_1 + \left[(a + 1)^2 - \frac{1}{m} \right] x_1 + (b - a - 2)x_2 + \left(\frac{c}{m} - 2 - a \right) x_3 + \frac{1}{m} x_4 - \left[(\hat{a} + 1)^2 - \frac{1}{m} \right] y_1 + (2 + \hat{a} - \hat{b})y_2 + \left(2 + \hat{a} - \frac{c}{m} \right) y_3 - \frac{1}{m} y_4 \tag{13}$$

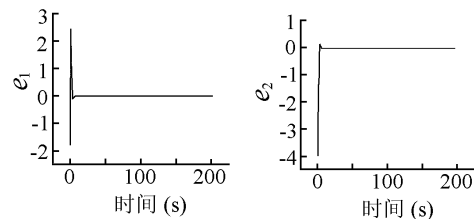


图 5 $x_1 - y_1$ 随时间的变化曲线

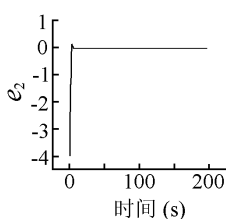


图 6 $x_2 - y_2$ 随时间的变化曲线

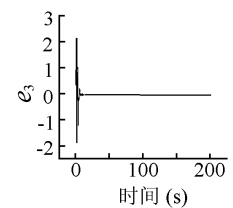


图 7 $x_3 - y_3$ 随时间的变化曲线

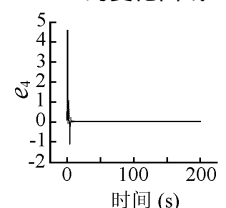


图 8 $x_4 - y_4$ 随时间的变化曲线

从理论上说, 只要使控制器满足 (12) 和 (13) 式, 那么就会实现: $t \rightarrow \infty, e_i = (x_i - y_i) \rightarrow 0, i = 1, 2$ 进一步考虑两个系统的第一和第三分量方程容易得出: $e_i = (x_i - y_i) \rightarrow 0, i = 3, 4$ 显然控制器 (12) 和 (13) 是比较复杂的, 为简单起见,

选取:
$$u_2 = (\hat{b} - b)x_2 (H(\hat{b} - b) + H(b - \hat{b})) = (\hat{b} - b)x_2 \tag{14a}$$

$$u_1 = (2 - b + a)(x_1 - y_1) + (1 - b)^2(x_2 - y_2) - (x_3 - y_3) + (a - \hat{a})x_1 \tag{14b}$$

$H(b - \hat{b}), H(\hat{b} - b)$ 是单位阶跃函数。即通过控制器 (14a) 中来对参数 \hat{b} 进行补偿, (14b) 实际上是对控制器 (9) 式的改进, 即多了最后一项来实现对参数 \hat{a} 的补偿。在控制器 u_1 的作用下: $t \rightarrow \infty$ 有:

$$y_2 \rightarrow x_2, y_1 = \dot{y}_2 + \hat{b}(y_2 - x_2) + bx_2, x_1 = \dot{x}_2 + bx_2, x_1 - y_1 = \dot{x}_2 - \dot{y}_2 - \hat{b}(y_2 - x_2) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \tag{15a}$$

再考虑两个系统的第一和第三分量方程, 经化简后容易验证:

$$y_3 \rightarrow x_3, y_4 \rightarrow x_4 \quad (15b)$$

即用两个简单的控制器仍然可以实现两个超混沌系统的精确同步。数值模拟结果见图 5~8。

(2) 驱动系统的两个参数做周期变化且与响应系统参数不匹配的同步问题：

a 和 b 做周期变化， $\dot{a} \neq 0$ 和 $\dot{b} \neq 0$ ， \hat{a} 和 \hat{b} 固定。仿照前面的做法，构造两个类似 (4) 式的 Lyapunov 函数，从稳定性条件就可以求出对应控制器的表达式。为了使控制器更简单，在参数匹配的基础上进行改进，通过引入参数补偿来实现参数不匹配情况下的超混沌系统同步。控制器为：控制器 u_2 仍然选为 (14a)，但控制器 u_1 的形式要改进：

$$\dot{u}_2 = (\hat{b} - \dot{b})x_2 + (\hat{b} - b)(x_1 - bx_2) = -\dot{b}x_2 + (\hat{b} - b)(x_1 - bx_2) \quad (16a)$$

$$u_1 = x_1(2 + a - \hat{b}) + x_2(1 - 2\hat{b} + \hat{b}^2) - x_3 - (2 + \hat{a} - \hat{b})y_1 - (1 - \hat{b})^2 y_2 + y_3 \quad (16b)$$

在控制器 u_1 和 u_2 下，经过一段时间后， $e_1 \rightarrow 0$ 、 $e_2 \rightarrow 0$ ，当前两个变量同步后，从系统的第一第三分量方程得到 $e_3 \rightarrow 0$ 、 $e_4 \rightarrow 0$ 。即达到了全局同步。数值模拟结果见图 9~12。

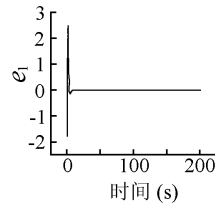


图 9 x_1-y_1 随时间的变化曲线

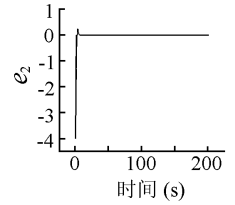


图 10 x_2-y_2 随时间的变化曲线

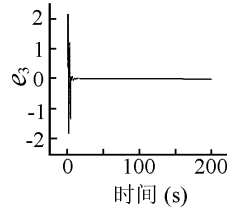


图 11 x_3-y_3 随时间的变化曲线

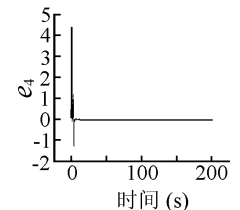


图 12 x_4-y_4 随时间的变化曲线

2.3 参数固定且匹配时的数值模拟

参数 $a = \hat{a} = 0.6, b = \hat{b} = 0.05, c = \hat{c} = 0.015, d = \hat{d} = 10, m = \hat{m} = 0.3, e = \hat{e} = 0.33$ ，采用四阶 R-K 积分，步长 $h = 0.001$ （以下皆同），各个对应变量的误差 $e_i(t) = x_i(t) - y_i(t), i = 1, 2, 3, 4$ ，随时间的演化见下图 1~4（横坐标表示时间，单位是秒，纵坐标是误差变量，以下皆同）。

显然，此时采用单个控制器就可以很快的实现两个超混沌系统全局快速同步。文献^[7-8]中的控制器 $u = k(x_1 - y_1) = ke_1$ 只是 (9) 的一种特例。如此从理论上论证了采用单变量控制器实现超混沌系统同步的可能性，具有说服力，也在一定程度上避免了求解 Lyapunov 指数的复杂性工作。

2.4 参数不匹配时的数值模拟

1) 当驱动系统参数固定但与响应系统两个参数不匹配时的同步问题。 $a = 0.6, \hat{a} = 0.7, b = 0.05, \hat{b} = 0.06$ ，其他参数取值同前。进行数值积分， $e_i(t) = x_i(t) - y_i(t), i = 1, 2, 3, 4$ ，随时间的演化曲线见图 5~8。

2) 研究当驱动系统的参数 a 与 b 发生周期变化时系统间的同步问题。 $a = 0.6 + 0.3\sin t, \hat{a} = 0.7, \hat{b} = 0.06, b = 0.05 + 0.02\sin t$ ，其他参数取值同前。进行数值积分， $e_i(t) = x_i(t) - y_i(t), i = 1, 2, 3, 4$ 随时间的演化曲线见图 9~12。

数值模拟结果表明：采用控制器 (14a) 和 (16b) 式可以在当驱动系统参数作周期变化时实现两个超混沌系统精确的同步，数值模拟结果和理论分析一致。

3 结论

基于稳定性理论研究了一类四维超混沌系统，文中提出的线性耦合同步法可以使两个超混沌系统在参数不匹配下也可以达到快速全局同步，而且控制器简单且只需两个、达到全局同步的时间非常短。该方法可以避免使用 Lyapunov 指数方法带来的复杂性困难，可以推广到其他超混沌系统的同步研究。

参考文献：

[1] 王铁邦, 覃团发, 陈光旨. 物理学报, 2001, 50(10): 1851.
 [2] 罗晓曙, 方锦清等. 物理学报, 1999, 48(11): 2022.
 [3] 禹思敏, 丘水生, 罗伟民. 电路与系统学报, 2000, 5: 31.
 [4] 唐国宁, 罗晓曙, 孔令江等. 物理学报, 2000, 49(1): 30.
 [5] Wu C W, Chua L O. Int. J. Bifurcation Chaos, 1993, 3: 1619.

- [6] Wu C W, Chua L O. IEEE Trans.Circuits Syst., 1995, 42: 430.
[7] Tamasevicius A, Namajunas A, Cenys A. Electronics Letters, 1996, 32: 957.
[8] Tamasevicius A, Cenys A. Physical Review E, 1997, 55: 297.
[9] 陈士华, 谢进, 陆君安, 刘杰. 物理学报, 2002, 51(4): 749.

作者简介：马军（1973-），男，陕西杨凌人，兰州理工大学理学院教师；唐国宁，男，博士，广西师范大学物理与信息工程学院，副教授，硕士研究生导师。

Synchronization Approach of a Class of 4D Hyperchaotic System

MA Jun¹, TANG Guo-ning²

(1. School of science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;

2. College of information of Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

Abstract: A class of 4-dimension dynamic hyperchaotic systems can be synchronized under single directional feedback control of the linear combination of error variables. The possibility of system synchronization is proven by analytical deduction. Based on Lyapunov theory, the possibility of synchronization of 4D dynamic systems via single valuable uni-directional coupling is also analyzed as to obtain the necessary conditions that controller must be met for the synchronization of two hyperchaotic systems. It has been demonstrated that when the parameters of driving system vary periodically, two hyperchaotic systems can be synchronized steadily by the proposed controller.

Key words: Hyperchaotic system; dynamic system; feedback control; one-way linear coupling

(续第 142 页)(from pag142)

Realization of a Novel Architecture of Two Dimensional Discrete Wavelet Transform based on the Lifting-scheme

MENG Jun, WEI Tong-li

(Microelectronics Center, South East University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Based on the theory of Lifting Scheme, a novel architecture of two-dimensional discrete wavelet transform is proposed. Different from traditional algorithm, using the proposed architecture, row and column transforms are executed associatively so that the time of the transform can be reduced to one half without extra hardware requirement. Block diagrams together with the performance comparison between proposed and traditional architectures are also given.

Key words: discrete wavelet transform; lifting scheme; architecture