DOI：10.16783/j.cnki.nwnuz.2004.01.007
第 40 卷 2004 年第 1 期
Vol.40 2004 No.1
西北师范大学学报（自然科学版）
Journal of Northwest Normal University（Natural Science）

弱平坦性和平坦性一致的幺半群

侍爱玲，王亚芹，梁若筠
（兰州理工大学 应用数学系，甘肃 兰州 730050）

摘 要：在幺半群中，引入了弱左 *PSF* 幺半群的概念，并研究了它的性质，刻画了所有弱平坦 *S*-系是平坦 *S*-系的幺半群.

关键词：交换幺半群；弱左 PSF 幺半群；弱平坦 S-系；平坦 S-系
中图分类号：O 152.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-988Ⅹ(2004)01-0025-03

Monoids over which all weakly flat acts are flat

SHI Ai-ling，WANG Ya-qing，LIANG Ruo-jun
（Department of Applied Mathematics，Lanzhou University of Sience and Techology，Lanzhou 730050，Gansu，China）

Abstract：The definition and properties of commutative weakly left *PSF* monoids are introduced，and furthermore a kind of special monoid which all weakly flat acts are flat are discussed.

Key words：commutative monoid；weak left *PSF* monoids；weakly flat *S*-sets；flat *S*-sets

平坦系一定是弱平坦系，但弱平坦系不一定是平坦系[1]. Bulman-Fleming 与 McDowell 讨论了几类使所有弱平坦系是平坦系的特殊幺半群[2]，特别是左 *PSF* 幺半群[3]. 本文引入弱左 *PSF* 幺半群的概念，讨论一类特殊幺半群，即交换的弱左 *PSF* 幺半群的平坦性及弱平坦性.

1 预备知识

定义 1 称幺半群 S 是弱左 PSF 的，若 S 的任意主左理想作为 S-系是弱拉回平坦[4]的.

显然，左 PSF 幺半群是弱左 PSF 的.

定义 2 设 S 是幺半群，$u\in S$，称 u 是弱右半可消元，如果对于 $s,t\in S$，$z\in S$，若 $su=tu$，$zs=zt$，则存在 $r\in S$，使得 $ru=u$，$sr=tr$.

命题 1 S 是交换幺半群，则 S 是弱左 PSF 的，当且仅当任意 u∈S，Su 满足条件(E′)[4].

证明 只需证充分性.

设 $u\in S$，$B=Su$ 满足条件(E')，$s,t\in S$，$b,b'\in B$ 满足 $sb=tb'$. 因 $b,b'\in B$，$b=pu$，$b'=qu$，其中 $p,q\in S$，故 $spu=tqu$. 由 S 的交换性知 $usp=utq$. 由条件(E')知存在 $x\in S$，$b''=yu\in B$，使 $spx=tqx$，$u=xyu$. 于是

$$b=pu=pxyu=pxb'',$$
$$b'=qu=qxyu=qxb'',$$

即 $B=Su$ 满足条件(P)，Su 是弱拉回平坦的. 故 S 是弱左 *PSF* 幺半群. ▌

引理 1 以下条件等价：

(1) S 是弱左 PSF 幺半群；

(2) S 的任意主左理想可由弱右半可消元生成；

(3) S 的任意元素都是弱右半可消元.

证明 (1)$\Longrightarrow$(3). 设 $s,t,z\in S$，任取 $u\in S$ 满足 $su=tu$，$zs=zt$. 因为，Su 是弱拉回平坦的，故 Su 满足条件(E')，于是，存在 $v\in Su$，$p\in S$，使得 $u=pv$，$sp=tp$. 取 $v=qu$，$q\in S$，则有 $u=pqu$，$spq=tpq$. 故 u 是 S 的弱右半可消元.

(3)$\Longrightarrow$(2). 显然.

(2)$\Longrightarrow$(1). 由(2)知，S 的任意主左理想作为 S-系满足条件(E′)，故由命题 1 知，S 是弱左 PSF 的. ▌

同理可以定义并讨论弱右 PSF 幺半群及弱左半可消元.

收稿日期：2003-06-08；**修改稿收到日期**：2003-10-20
作者简介：侍爱玲（1972—），女，甘肃民勤人，讲师，硕士. 主要研究方向为半群代数.

2 主要结果

定理1 设 S 是交换的弱右 PSF 幺半群，A 是左 S-系，则如下条件等价：

(1) A 是主弱平坦的；

(2) 任意 $a,a'\in A$，$x\in S$，若 $xa=xa'$，则存在 $v\in S$，使得 $x=xv$，$va=va'$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 设 $a,a'\in A$，$x\in S$，满足 $xa=xa'$，则在 $S\otimes A$ 中有 $x\otimes a=x\otimes a'$. 因 A 是主弱平坦的，故在 $xS\otimes A$ 中有 $x\otimes a=x\otimes a'$. 所以存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$，$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$a=s_1a_1,$$
$$xs_1=xu_2t_1,\quad t_1a_1=s_2a_2,$$
$$xu_2s_2=xu_3t_2,\quad t_2a_2=s_3a_3,$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$
$$xu_ns_n=xt_n,\quad t_na_n=a'.$$

由于 S 是交换的，故 $s_1x=u_2t_1x$，$u_2s_2x=u_3t_2x$，$\cdots$，$u_ns_nx=t_nx$. 由引理1知 S 是弱右 PSF 的，故 x 是 S 的弱左半可消元. 故由 $xs_1=xu_2t_1$，$s_1x=u_2t_1x$ 知，存在 $v_1\in S$，使 $x=xv_1$ 且 $v_1s_1=v_1u_2t_1$，$xv_1u_2s_2=xu_2s_2=xu_3t_2=xv_1u_3t_2$，同时 $v_1u_2s_2x=v_1u_3t_2x$. 由 x 的弱左半可消性知，存在 $v_2\in S$，使 $x=xv_2$ 且 $v_2v_1u_2s_2=v_2v_1u_3t_2$. 令 $v_1'=v_2v_1$，于是 $x=xv_1'$，$v_1'u_2s_2=v_1'u_3t_2$. 利用数学归纳法原理知，存在 $v\in S$，使得

$$x=xv,\quad vs_1=vu_2t_1,\quad vu_ns_n=vt_n,$$
$$vu_is_i=vu_{i+1}t_{i+1},\quad i=2,\cdots,n-1.$$

因此，$va=vs_1a_1=vu_2t_1a_1=vu_2s_2a_2=\cdots=vu_ns_na_n=vt_na_n=va'$.

(2)$\Longrightarrow$(1). 设 $a,a'\in A$，$x\in S$，在 $S\otimes A$ 中，$x\otimes a=x\otimes a'$，所以 $xa=xa'$. 由(2)知，存在 $u\in S$，使得 $x=xu$，$ua=ua'$. 故在 $xS\otimes A$ 中有 $x\otimes a=xu\otimes a=x\otimes ua=x\otimes ua'=xu\otimes a'=x\otimes a'$，即 A 是主弱平坦的. ▮

引理2[3] 对于左 S-系 A，如下条件等价：

(1) A 是弱平坦的；

(2) A 是主弱平坦的，且对于任意 $x,y\in S$，任意 $a,a'\in A$，若 $xa=ya'$，则存在 $a''\in A$，$z\in xS\cap yS$，使 $xa=ya'=za''$.

定理2 设 S 是交换的弱右 PSF 幺半群，A 是左 S-系，则以下条件等价：

(1) A 是弱平坦的；

(2) 对 $a,a'\in A$，$x,y\in S$，若 $xa=ya'$，则存在 $a''\in A$，$x_1,y_1,u,v\in S$，使得

$$xu=x,\quad yv=y,\quad xx_1=yy_1,$$
$$ua=x_1a'',\quad va'=y_1a''.$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 设 $a,a'\in A$，$x\in S$ 满足 $xa=ya'$，则由引理2知，存在 $a''\in A$，$z=xs=yt\in xS\cap yS$，使 $xa=ya'=za''$. 因为 $xa=za''=xsa''$，由定理1知，存在 $u\in S$，使得 $x=xu$，$ua=usa''$.

同理由 $ya'=za''=yta''$ 知，存在 $v\in S$，使得 $y=yv$，$ya'=yta''$.

令 $x_1=us$，$y_1=vt$，则有等式组：

$$x=xu,$$
$$y=yv,$$
$$xx_1=xus=xs=yt=yvt=yy_1,$$
$$ua=usa''=x_1a'',$$
$$va'=vta''=y_1a''.$$

(2)$\Longrightarrow$(1). 设 $a,a'\in A$，$x,y\in S$，在 $S\otimes A$ 中有 $x\otimes a=y\otimes a'$，所以 $xa=ya'$.

由(2)知存在 $a''\in A$，$x_1,y_1,u,v\in S$，使得 $x=xu$，$y=yv$，$xx_1=yy_1$，$ua=x_1a''$，$va'=y_1a''$. 于是 $x\otimes a=xu\otimes a=x\otimes ua=x\otimes x_1a''=xx_1\otimes a''=yy_1\otimes a''=y\otimes y_1a''=y\otimes va'=yv\otimes a'=y\otimes a'$，即在 $(xS\cup yS)\otimes A$ 中有 $x\otimes a=y\otimes a'$，所以 A 是弱平坦的. ▮

引理3[1] 设 B 是左 S-系，则 B 是平坦的当且仅当对任意右 S-系 A，任意 $b,b'\in B$，任意 $a,a'\in A$，若在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$，则在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.

引理4[3] 设 A 是任意右 S-系，B 是弱平坦左 S-系，若 $a,a'\in A$，$b,b'\in B$，满足

$$a=a_1s_1,$$
$$a_1t_1=a',$$
$$s_1b=t_1b',$$

其中 $s_1,t_1\in S$，$a_1\in A$. 则在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.

定理3 设 S 是交换的弱右 PSF 幺半群，且对于任意 $u,v\in S$，存在 $z\in Su\cap Sv$，使得 $(z,u)\in\rho(u,v)$，则所有弱平坦的 S-系是平坦的. 其中 $\rho(u,v)$ 是 S 上的由 (u,v) 生成的最小右同余.

证明 设 B 是弱平坦 S-系，A 是任意右 S-系. 设 $a,a'\in A$，$b,b'\in B$，在 $A\otimes B$ 中有 $a\otimes b=a'\otimes b'$. 由文献[3]，只需证明在 $(aS\cup a'S)\otimes B$

中仍有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.

由文献[1]知 $a\otimes b=a'\otimes b'$，则存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$，$b_1,\cdots,b_n\in B$，$s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$\begin{aligned}&a=a_1s_1,\\&a_1t_1=a_2s_2,\quad s_1b=t_1b_2,\\&\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\\&a_nt_n=a',\quad s_nb_n=t_nb'.\end{aligned}$$

以下对 n 用数学归纳法证明.

设 $n=1$，此时有

$$\begin{aligned}&a=a_1s_1,\\&a_1t_1=a',\quad s_1b=t_1b'.\end{aligned}$$

由引理 4 知，在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中，有 $a\otimes b=a'\otimes b'$.

设 $n\geqslant 2$，令 $b_1=b$，$b_n=b'$. 对于 $s_ib_i=t_ib_{i+1}$，$i=1,\cdots,n-1$，由定理 2 知，存在 $u_i,v_i,x_i,y_i\in S$，$b_i''\in B$，使得 $s_iu_i=s_i$，$t_iv_i=t_i$，$s_ix_i=t_iy_i$，$u_ib_i=u_ix_ib_i''$，$v_ib_{i+1}=v_iy_ib''$. 对于 u_{i+1},v_i，由题设条件知，存在 $p_i,q_i\in S$，使 $p_iv_i=q_iu_{i+1}$，且 $(q_iu_{i+1},u_{i+1})\in\rho(u_{i+1},v_i)$. 定义

$$\rho_i=\{(s,t)\in S\times S\mid a_{i+1}s_{i+1}s=a_{i+1}s_{i+1}\},$$

则 ρ_i 是 S 上的右同余. 因为 $a_{i+1}s_{i+1}u_{i+1}=a_{i+1}s_{i+1}=a_it_i=a_it_iv_i=a_{i+1}s_{i+1}v_i$，故 $(u_{i+1},v_i)\in\rho_i$. 又由条件知 $(q_iu_{i+1},u_{i+1})\in\rho_i$，因此，$a_{i+1}s_{i+1}q_iu_{i+1}=a_{i+1}s_{i+1}u_{i+1}=a_{i+1}s_{i+1}$. 故

$$\begin{aligned}(a_is_i)q_{i-1}u_ix_i&=a_is_ix_i=a_it_iy_i=\\&a_{i+1}s_{i+1}y_i=a_{i+1}s_{i+1}q_iu_{i+1}q_i=\\&a_{i+1}s_{i+1}p_iv_iy_i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{i-1}v_{i-1}y_{i-1}b_{i-1}''&=p_{i-1}v_{i-1}b_i=\\&q_{i-1}u_ib_i=q_{i-1}u_ix_ib_i'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}au_1x_1&=as_1u_1x_1=as_1x_1=\\&a_1t_1y_1=a_2s_2y_1=a_2s_2q_1u_2y_1=\\&a_2s_2p_1v_1y_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_ns_n)q_{n-1}u_nx_n&=a_ns_nx_n=a_nt_ny_n=\\&a_nt_nv_ny_n=a'v_ny_n,\end{aligned}$$

故有如下等式组

$$\begin{aligned}&a=a_1s_1=\\&\quad a_1s_1u_1=au_1,\\&(au_1)x_1=\\&\quad(a_1s_1)p_1v_1y_1,\qquad u_1b=u_1x_1b_1'';\\&(a_2s_2)q_1u_2x_2=\\&\quad(a_3s_3)p_2v_2y_2,\qquad p_1v_1y_1b_1''=q_1u_2x_2b_2'';\\&\quad\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots\\&(a_is_i)q_{i-1}u_ix_i=\qquad p_{i-1}v_{i-1}y_{i-1}b_{i-1}''=\\&\quad(a_{i+1}s_{i+1})p_iv_iy_i,\qquad q_{i-1}u_ix_ib_i'';\\&\quad\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots\\&(a_ns_n)q_{n-1}u_nx_n=\qquad p_{n-1}v_{n-1}y_{n-1}b_{n-1}''=\\&\quad a'v_ny_n,\qquad q_{n-1}u_nx_nb_n'';\\&a'v_n=a',\qquad v_ny_nb_n''=v_nb_n''.\end{aligned}$$

对于上述等式组中的中间 $2n-1$ 个等式应用数学归纳假定可知，在 $(au_1x_1S)\cup(a'v_ny_nS)\otimes B$ 中，有

$$au_1x_1\otimes b_1''=a'v_ny_n\otimes b_n'';$$

利用最前面的两行等式可知，在 $aS\otimes B$ 中，有

$$a\otimes b=a_2s_2p_1v_1y_1\otimes b_1''.$$

同理可知在 $a'S\otimes B$ 中，有

$$a'\otimes b'=a_ns_nq_{n-1}u_nx_n\otimes b_n''.$$

于是在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中，有

$$\begin{aligned}a\otimes b&=a_2s_2p_1v_1y_1\otimes b_1''=\\&au_1x_1\otimes b_1''=\\&a'v_ny_n\otimes b_n''=\\&a_ns_nq_{n-1}u_nx_n\otimes b_n''=\\&a'\otimes b'.\end{aligned}$$

这就证明了 B 是平坦左 S-系. 】

参考文献：

[1] 刘仲奎. **半群的S-系理论**[M]. 北京：科学出版社，1999.

[2] *Howie J.* An Introduction to Semigroup Theory [M]. London: Academic Press, 1976.

[3] *Bulman-Fleming S, McDowell K. Monoids over which all weakly flat acts are flat* [J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1990, **33**: 287-298.

[4] *Valdis L. On a generalization of strong flatness* [J]. Acta et Cementations Universitates Tartuensis de Mathematica, 1998.

(责任编辑　马宇鸿)