

文章编号: 1000-5889(2005)03-0032-05

层合复合材料的自由角效应 —— 三维有限差分解

金培鹏^{1,2}, 许广济¹, 丁雨田¹

(1. 兰州理工大学 材料科学与工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 青海大学 建工系, 青海 西宁 810016)

摘要: 针对层合复合材料的自由角附近的层间高应力问题, 提出了一个三维有限差分法的方案, 计算层合复合材料在变温下的自由角效应问题, 同时与以前的解进行了比较. 研究表明, 所提出的有限差分方案所得的解是稳定的、收敛的, 对 $[90^\circ/0^\circ]$ 、对称铺层碳纤维增强塑料和 Ni/Al 层合复合材料算例来说, 比以前的半解析解更接近于用三维有限元计算的结果. 还讨论了层间应力的应力场和层间破坏之间的关系, 发现层间剥离应力, 即正应力可能是层间破坏的主要因素.

关键词: 层合复合材料; 层间应力; 自由边效应; 层合板自由角; 自由角效应; 热荷载

中图分类号: TB332 **文献标识码:** A

Free corner effect in laminates — a three dimensional finite difference solution

JIN Pei peng^{1,2}, XU Guang ji¹, DING Yu tian¹

(1. College of Materials Science and Engineering, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China; 2. Dept. of Civil Engineering, Qinghai University, Xining 810016, China)

Abstract: A three dimensional finite difference scheme was presented to examine the localized high stress field near a free corner of laminate subjected to a thermal loading and then the finite difference solution was compared to the results available until now. The study showed that the solution is stable, convergent, and agreeable much better with the results of 3-dimensional finite element analyses than half-analytic solution available for the cases of a carbon fibre reinforcement plastics (CFRP) cross ply laminate and a Ni/Al laminate. The correlation between stress field and interlaminar failure was also investigated. It was shown that peeling stress may be a significant factor for interlaminar failure.

Key words: laminated composite; interlaminar stress; free edge effect; laminate corner; free corner effect; thermal loading

层合复合材料自由边的层间高应力^[1~20], 来自于各层材料性质的不连续性, 由此引起的高应力现象超出了经典层合复合材料的理论范围, 将导致层合结构的脱层和过早的破坏. 相似的, 层合复合材料自由角附近区域的高应力破坏也是一个重要的现象. 虽然“自由角效应”(Free-Corner Effect)问题发生在许多很重要的工程实践中, 如在层合复合材料机翼中, 但由于它是三维问题, 不能化为二维问题, 因此其求解难度比较大. 自 1999 年以来 W. Becker 等人提出了模型, 并给出了 $[90^\circ/0^\circ]$ 、对称铺层的一个半解析解^[21], 文献^[22]后, 所见文献极少. C. Mittelstedt 等人就 $[90^\circ/0^\circ]$ 、对称铺层又给出了一

个半解析解^[23], 截至目前, 任意方向纤维铺层的研究尚未见到.

采用了文献^[24]中的思路给出了三维有限差分方案, 并对四层对称铺层碳纤维增强塑料层合板和四层 $[Ni/Al]$ 、对称铺层的层合板的变温问题进行了计算. 计算结果与用有限元分析软件 MSC/NASTRAN 三维模型计算所得的结果比 W. Becker 等的结果^[22]更为接近, 同时文中的有限差分方案还可以用来求解任意方向铺层的自由角问题. 另外, 由例子发现, 层间剥离应力可能是引起层间脱落的主要因素. 文中的有限差分方案是稳定的, 收敛的.

1 分析过程

1.1 基本方程和边界条件

对于变温问题有一个弹性对称面的各向异性材

收稿日期: 2004-09-21

作者简介: 金培鹏(1961-), 男, 甘肃榆中人, 博士生, 副教授.

料的广义虎克定理为

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zz} \\ \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ & c_{22} & c_{23} & & & \\ & & c_{33} & & & \\ & & & c_{44} & c_{45} & \\ & & & & c_{55} & \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zz} \\ \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T \quad (1)$$

式中: $\alpha_{ij}, \epsilon_{ij}, \alpha_{ij} (i, j) = x, y, z, c_{kl} (k, l) = 1, 2, \dots, 6$ 和 ΔT 分别是应力分量、应变分量、热膨胀系数、刚度系数和变温(横观各向同性的材料中的 13 个刚度系数减少为 4 个独立的刚度系数, 6 个热膨胀系数减少为 3 个)。

将式(1)代入无体积力的弹性力学的平衡微分方程中, 并用位移分量来表示, 有

$$\begin{aligned} &c_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} + \\ &0.5c_{16} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) + c_{26} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \\ &c_{36} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} + 0.5c_{66} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + \\ &0.5c_{44} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} \right) + 0.5c_{55} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} &c_{16} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c_{36} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + 0.5c_{66} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \\ &c_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + c_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} + \\ &0.5c_{26} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) + \\ &0.5c_{45} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + 0.5c_{55} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} &0.5c_{44} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) + 0.5c_{45} \left(2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right) + 0.5c_{55} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right) + \\ &c_{13} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + c_{23} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + c_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \\ &0.5c_{36} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2c)$$

考虑图 1 所示对称铺层的材料模型, 为四分之一无限大板, x, y 方向延伸到正无穷, 两个边为自由边, 这两个自由边构成一自由角, 在这个角附近的区域会产生很高的层间应力^[21]。

图 1 所示力学模型的边界条件是

$$x = +\infty, U = V = 0$$

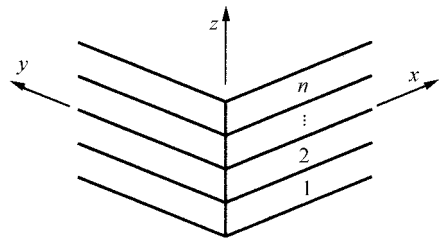


图 1 “自由角效应”的几何模型

Fig. 1 Geometry and coordinate system for free corner effect problem

$$y = +\infty, U = V = 0 \quad (3a)$$

$$x = 0, \sigma_{xx} = \alpha_{xy} = \sigma_{xy} = 0$$

$$y = 0, \sigma_{yx} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = 0 \quad (3b)$$

$$z = \pm t, \alpha_{zz} = \alpha_{zy} = \alpha_{zx} = 0$$

更进一步在相邻的两层之间应该满足位移和应力连续性条件, 即

$$U^{(k-1)} = U^{(k)}, V^{(k-1)} = V^{(k)}, W^{(k-1)} = W^{(k)} \quad (4a)$$

$$\alpha_{zz}^{(k-1)} = \alpha_{zz}^{(k)}, \alpha_{xz}^{(k-1)} = \alpha_{xz}^{(k)}, \alpha_{yz}^{(k-1)} = \alpha_{yz}^{(k)} \quad (4b)$$

图 1 所示模型并不完全符合工程实际, 因而在下面的有限差分方案中将上述模型稍作改动。

1.2 有限差分法的差分方案

有限差分的计算模型如图 2 所示。

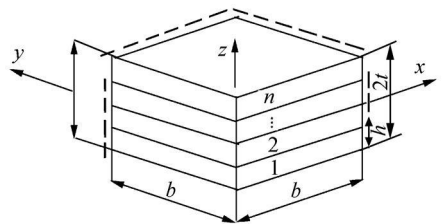


图 2 有限差分法计算模型

Fig. 2 Laminate geometry and constraints of the finite difference scheme

图 2 所示的力学模型是一个厚度尺寸远小于其它两个方向尺寸的一个层合板, 除自由边以外的边界在 x 和 y 方向都固定。由弹性力学知道, 这个模型与图 1 所示模型的应力、应变和位移场都具有很好的近似性。

图 2 所示问题的边界条件是:

$$x = b, U = V = 0 \quad (5a)$$

$$y = b, U = V = 0$$

$$x = 0, \sigma_{xx} = \alpha_{xy} = \sigma_{xy} = 0$$

$$y = 0, \sigma_{yx} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = 0 \quad (5b)$$

$$z = \pm t, \alpha_{zz} = \alpha_{zy} = \alpha_{zx} = 0$$

由于对称性, 取层合板的上部分作为研究对象

划分栅格,它由 $x = 0, y = 0$ 和 $z = 0$ 围成,网格尺寸 $\Delta x_i, \Delta y_i$ 和 Δz_i 分别叠加为 b 和 l . 此时,模型还有边界条件:

$$z = 0, \quad W = 0 \quad (5c)$$

连续性条件见式(4).

现在来建立满足边界条件式(5)和层间连续性条件式(4)的方程(2)的有限差分方案.

网格结点分为位于层内材料上的结点或内结点和位于层外的网格上的假想结点或虚结点. 具体方案见一个平行于 $yo z$ 面剖面,如图 3 所示.

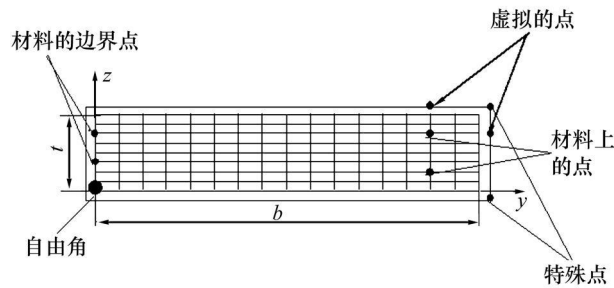


图 3 有限差分方案 — $yo z$ 面剖面

Fig. 3 Finite difference scheme — $yo z$ section

虚结点上的位移或应力是用材料边界结点的边界条件来表示的. 方程(2)采用显式中央差分方程进行离散,边界条件式(5)和连续性条件式(4)采用向前或向后显式差分方程离散. 用一个合理的位移场开始,通过迭代可以使得解答收敛.

特殊点为每一个虚平面上的角点. 由于任何一个角点都是奇异点,因此这些特殊点的边界条件不能精确定义,而要作一些假定. 采用静力等效的近似边界条件,由圣维南原理知,除过自由角非常微小的邻域,解是可用的. 其实,由文献[21、22]以及有限元分析软件的计算可知,虽然在自由角的一个极微小区域内,层间应力并不很高,然而,在大约距自由角 0.125 板长处范围内层间应力达到了最大值. 并且,事实上极端的尖角在现实中并不存在. 有限差分解的收敛性讨论和证明可见文献[24].

1.3 例子中的层合板的数据

采用文献[21]中使用的有限元计算模型,即令图 2 中的 $b = 4 \text{ mm}, t = 1 \text{ mm}, h = 0.5 \text{ m}$, 材料的数据也采用文献[21]中的 $[90^\circ/0^\circ]_s$ 四层对称铺层碳纤维增强塑料层合板和四层 $[\text{Ni}/\text{Al}]_s$ 对称铺层的层合板.

算例 1: 4 层对称铺层碳纤维增强塑料层合板.

$$E_1 = 135\,000 \text{ MPa}, G_{12} = G_{13} = 5\,000 \text{ MPa}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.27, \alpha_1 = -0.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, E_2 = E_3 = 10\,000 \text{ MPa}, G_{23} = 3\,972 \text{ MPa}, \nu_{23} = 0.27, \alpha_2 = \alpha_3 = 40 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

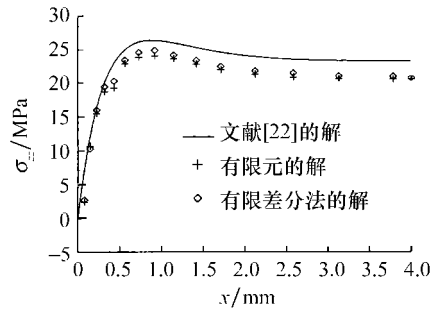
算例 2: 4 层 $[\text{Ni}/\text{Al}]_s$ 对称铺层的层合板.

$$E_{\text{Ni}} = 210\,000 \text{ MPa}, \nu_{\text{Ni}} = 0.31, \alpha_{\text{Ni}} = 13 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

$$E_{\text{Al}} = 71\,000 \text{ MPa}, \nu_{\text{Al}} = 0.34, \alpha_{\text{Al}} = 24 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

2 结果和讨论

关于构件的 $\Delta T = 100 \text{ K}$ 均匀升温问题,由图 4 可以看出,算例 1 中的 4 层对称铺层碳纤维增强塑料层合板,与文献[22]的结果相比,沿 x 边使用文中所示的有限差分方案,得到的层间剥离应力 σ_{xz} 与用商业有限元软件 MSC/Nastran 算得的结果更符合. 同时还可以看出,当远离自由角时,它趋向于常数,最大值发生在自由角的一个邻域内,在趋向自由角的过程中,它迅速地趋向于零. 这意味着,对这个例子来说,自由角本身相比自由边较少具有建立脱裂临界条件的意义,然而,在它的一个微小的邻域内有最大的剥离应力发生,此点可以作为临界点.



4 $[90^\circ/0^\circ]_s$ 层合板在 $90^\circ/0^\circ$ 界面沿 x 轴的剥离应力
Fig. 4 Resultant interlaminar peeling stress for $[90^\circ/0^\circ]_s$ laminate at $90^\circ/0^\circ$ interface along the x axis

由图 5 同样可以看出,三维有限差分的结果与三维有限元解比文献[22]的结果符合的更好. 层间剪应力 σ_{xz} 在远离自由角趋向于零,在非常接近自由角的某个点发生了区域高应力,在自由角处又为零.

沿着 y 边,原则上来说是相同的,三维有限差分解与三维有限元解也比文献[22]的解更接近,分布规律也与沿 x 边相似,只是正应力为压应力,剪应力改变了符号,见图 6.

图 7 描述了算例 2 $[\text{Ni}/\text{Al}]_s$ 层合板应力的分布,同样是一个 $\Delta T = 100 \text{ K}$ 均匀升温的温度荷载,三维有限差分的结果也比文献[22]的结果更接近于有限元的解. 在远离自由角处,剥离应力 σ_{xz} 趋向于一个常量,层间剪应力 σ_{xz} 趋向于零,同时与算例 1 的层间剪应力的分布曲线相似. 然而,剥离应力 σ_{xz} 此时在自由角处有一个相当于远离自由角时 2 倍的高应力,达到了最大值,对这个例子来说显然自由角

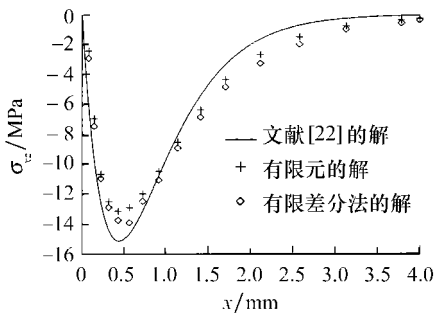


图 5 $[90^\circ/0^\circ]_s$ 层合板在 $90^\circ/0^\circ$ 界面的沿 x 轴的层间剪应力

Fig. 5 Resultant interlaminar shear stress for $[90^\circ/0^\circ]_s$ laminate at $90^\circ/0^\circ$ interface along the x axis

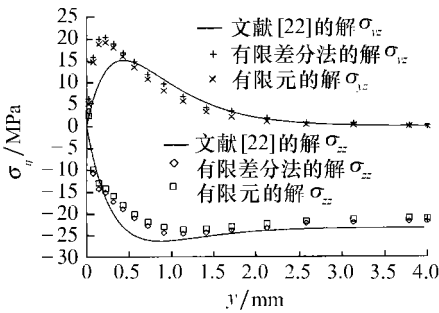


图 6 $[90^\circ/0^\circ]_s$ 层合板 $90^\circ/0^\circ$ 界面沿 y 轴的层间正应力和剪应力

Fig. 6 Resultant interlaminar stresses for $[90^\circ/0^\circ]_s$ laminate at $90^\circ/0^\circ$ interface along the y axis

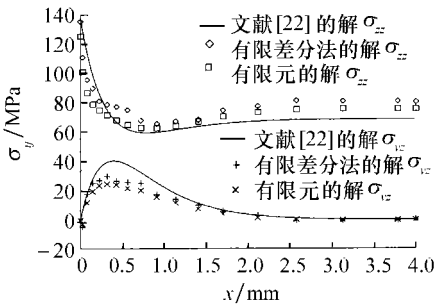


图 7 $[Ni/Al]_s$ 层合板在 Ni/Al 界面上沿 x 轴层间剥离应力和剪应力

Fig. 7 Resultant interlaminar stresses for $[Ni/Al]_s$ laminate at Ni/Al interface along the x axis

问题比自由边问题更具有建立脱裂临界条件的意义。

由上面的分析可以看出,剥离应力 σ_x 可能是层间脱落的主要因素,虽然层间的剪应力在自由边附近也比较高,但由两个例子的结果知道它们还是比剥离应力小很多。

由于对任意方向铺层的问题还没有见到半解析解,因此没有进行比较。但由文献[23]的经验知道,三维有限差分法对任意铺层的层合复合材料的自由角问题也是适用的。至于稳定性和收敛性的讨论可

参见文献[24]。

3 结论

1) 一种没有任何假设的三维有限差分法成功地被运用于层合复合材料的自由角效应问题的求解中。

2) 该方法所求得的解的精度,明显地得到了提高,虽然在特殊点上使用了外推法,同时解是稳定的和收敛的。

3) 有限差分方案可能对任意铺层的层合复合材料的自由角问题也适用,虽然由于没有其它结果可以比较,无法比较结果,但由 E. Altus 等^[24]用三维有限差分法对层合复合材料自由边效应问题的研究可以推测到。对此,当然还应做进一步的有限元分析、实验工作及文中的三维有限差分方案的计算工作,并加以比较,才能得出最后的结论。

4) 由所举例子可见,层间脱落应力 σ_x 可能是层间破坏的决定因素,为了验证这一点,需要做更多的实验和理论工作。

5) 有限差分法的缺点是对任何问题它都是数值解。因此,对任意铺层的层合复合材料自由角效应问题的解析解和半解析解的求解还是十分必要的。

参考文献:

- [1] PIPES R B, PAGANO N J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension [J]. Journal of Composite Materials, 1970(4): 538-548.
- [2] JONES R M. Mechanics of Composite Materials [M]. New York: Hemisphere, 1975. 126-135.
- [3] WANG A S D, CROSSMAN F W. Some new results on edge effect in symmetric composite laminates [J]. Journal of Composite Materials, 1977(11): 92-106.
- [4] WANG A S D, CROSSMAN F W. Edge effects on thermally induced stresses in composite laminates [J]. Journal of Composite Materials, 1977(11): 300-312.
- [5] WHITCOMB J D, RAJU I S, GOREE J G. Reliability of the finite element method for calculating free edge stresses in composite laminates [J]. Computers and Structures, 1982(15): 23-37.
- [6] ROHWER K. Einsatz von finiten Elementen zur Berechnung von Faserverbundstrukturen [A]. NIEDERSTADT G, et al. Leichtbau mit kohlenstoffaser-verstärkten Kunststoffen [C]. Sindelfingen: Expert-Verlag, 1985. 346-352.
- [7] VHERAKOVICH C T. Free edge effects in laminated composites [A]. HERAKOVICH C T, TARNOPOL'SKII Y M. Handbook of Composites, Vol. 2 Structure and Design [C]. Amsterdam: Elsevier, 1989. 764-772.
- [8] NORWOOD D S. An analysis of interlaminar stresses in unsymmetrically laminated plates [D]. Virginia: Virginia Poly-

technic Institute and State University, 1990.

- [9] STIFTINGER M. Semi-analytical finite element formulations for layered composite shells with consideration of edge effects [R]. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1996.
- [10] PUPPO A H, EVENSEN H A. Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress [J]. Journal of Composite Materials, 1970(4): 204-220.
- [11] PAGANO N J. On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminate [J]. Journal of Composite Materials, 1974(8): 65-82.
- [12] TANG S A. Boundary layer theory — Part I: Laminated composites in plane stress [J]. Journal of Composite Materials, 1975(9): 33-41.
- [13] TANG S, LEVY A A. Boundary layer theory — Part II: Extension of laminated finite strip [J]. Journal of Composite Materials, 1975(9): 42-52.
- [14] WANG S S, Choi I. Boundary layer effects in composite laminates: Part 1—Free edge stress singularities [J]. Journal of Applied Mechanics, 1982(49): 541-548.
- [15] WANG S S, Choi I. Boundary layer effects in composite laminates: Part 2—Free edge stress solutions and basic characteristics [J]. Journal of Applied Mechanics, 1982(49): 549-560.
- [16] KASSAPOGLOU C, LAGACE P A. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle ply and cross ply laminates [J]. Journal of Composite Materials, 1987(21): 292-308.
- [17] BECKER W. Closed form solutions for the free edge effect in cross ply laminates [J]. Composite Structures, 1993(26): 39-45.
- [18] MORTON S K, WEBBER J P H. Interlaminar failure due to mechanical and thermal stresses at the free edges of laminated plates [J]. Composites Science and Technology, 1993(47): 1-13.
- [19] WEBBER J P H, MORTON S K. An analytical solution for the thermal stresses at the free edges of laminated plates [J]. Composites Science and Technology, 1993(46): 175-185.
- [20] YIN W L. Simple solutions of the free edge stresses in composite laminates under thermal and mechanical loads [J]. Journal of Composite Materials, 1994(28): 573-586.
- [21] BECKER W, JIN P P, NEUSER P. Interlaminar stresses at the free corner of a laminate [J]. Composite Structures, 1999(45): 155-162.
- [22] BECKER W, JIN P P, LINDEMANN J. The “free corner effect” in thermally loaded laminates [J]. Composite Structures, 2001(52): 97-102.
- [23] MITTELSTEDT C, BECKER W. Free corner Effects in Cross ply Laminates: An Approximate Higher order Theory Solution [J]. Journal of Composite Materials, 2003(37): 2 043-2 068.
- [24] ALTUS E, ROTEM A, SHMUELI M. Free Edge Effect in Angle Ply Laminates—A New Three Dimension Solution [J]. Journal of Composite Materials, 1980(1): 21-29.